УДК 517.9

О РЕШЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЕЙ ГАУССА В ЯДРАХ

д-р физ.-мат. наук, проф.А.А. КИЛБАС
(Белорусский государственный университет, Минск),
О.В. СКОРОМНИК
(Полоцкий государственный университет)

Рассматривается вопрос решения четырех интегральных уравнений первого рода, содержащих в ядрах гипергеометрическую функцию Гаусса. С использованием представления интегральных операторов левых частей рассматриваемых уравнений в виде композиции двух операторов дробного интегрирования со степенными весами доказываются условия их ограниченности из одних весовых пространств p-суммируемых функций в другие. На основании этого выводятся явные формулы решений таких интегральных уравнений в рассматриваемых весовых пространствах.

Гипергеометрическая функция Гаусса определяется при $|z|<1$ как сумма гипергеометрического ряда

$$ {}_2F_1(a,b;c;z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k}\cdot\frac{z^k}{k!}. \tag{1}$$

Его параметры a, b, c и переменная z могут быть комплексными, причем $c\neq 0,-1,-2,\ldots$, а $(a)_k=a(a+1)(a+2)\ldots(a+k-1)$, $k=1,2,3\ldots,(a)_0\equiv 1$ – символ Похгаммера.

Ряд (1) сходится при $|z|<1$ и при $|z|=1$, $Re(c-a-b)>0$, а при остальных значениях z функция Гаусса определяется как аналитическое продолжение этого ряда. Один из способов такого продолжения – использование интегрального представления Эйлера:

$$ {}_2F_1(a,b;c;z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}\,dt, \tag{2}$$

$$0<Re\,b<Re\,c, |arg(1-z)|<\pi,$$

где правая часть определена при указанных условиях, обеспечивающих сходимость интеграла. Классические результаты в теории этой функции представлены в монографиях Г. Бейтмена и А. Эрдейи [1], М.М. Джрбашяна [2] и справочнике А.П. Прудникова, Ю.А. Брычкова, О.И. Маричева [3].

Интерес к функциям (1) и (2) и их различным обобщениям вызван их применениями в прикладных задачах и в теории дифференциальных и интегральных уравнений [4].

Интегралы

$$\left(\mathrm{I}^{\alpha}_{a+}\varphi\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt, \quad x>a, \tag{3}$$

$$\left(\mathrm{I}^{\alpha}_{b-}\varphi\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b\frac{\varphi(t)}{(t-x)^{1-\alpha}}dt, \quad x<b, \tag{4}$$

где $Re(\alpha)>0$, называются интегралами Римана – Лиувилля дробного порядка α [5]. Первый из них называют левосторонним, а второй – правосторонним. Операторы $\mathrm{I}^{\alpha}_{a+},\mathrm{I}^{\alpha}_{b-}$ называют операторами дробного интегрирования.

Рассматриваются четыре интегральных уравнения с гипергеометрической функцией Гаусса в ядре [5, § 35]:

$$ {}_1\mathrm{I}^{c}_{0+}(a,b)\varphi(x)\equiv\int_0^x\frac{(x-\tau)^{c-1}}{\Gamma(c)}\,{}_2F_1\left(a,b;c;1-\frac{x}{\tau}\right)\varphi(\tau)d\tau=g(x); \tag{5}$$

$$ {}_2\mathrm{I}^c_{0+}(a,b)\varphi(x) \equiv \int\limits_0^x \frac{(x-\tau)^{c-1}}{\Gamma(c)}\,{}_2F_1\left(a,b;c;1-\frac{\tau}{x}\right)\varphi(\tau)d\tau = g(x)\,; \qquad (6) $$

$$ {}_3\mathrm{I}^c_-(a,b)\varphi(x) \equiv \int\limits_x^\infty \frac{(\tau-x)^{c-1}}{\Gamma(c)}\,{}_2F_1\left(a,b;c;1-\frac{x}{\tau}\right)\varphi(\tau)d\tau = g(x)\,; \qquad (7) $$

$$ {}_4\mathrm{I}^c_-(a,b)\varphi(x) \equiv \int\limits_x^\infty \frac{(\tau-x)^{c-1}}{\Gamma(c)}\,{}_2F_1\left(a,b;c;1-\frac{\tau}{x}\right)\varphi(\tau)d\tau = g(x)\,. \qquad (8) $$

В [5, § 10.1] были получены следующие композиционные разложения для этих операторов в пространствах $L_p(a,b)$, $-\infty < a < b < +\infty$, $1 \le p < +\infty$:

$$ {}_1\mathrm{I}^c_{0+}(a,b)\varphi(x) = \mathrm{I}^{c-b}_{0+}x^{-a}\mathrm{I}^b_{0+}x^a\varphi(x)\,; \qquad (9) $$

$$ {}_1\mathrm{I}^c_{0+}(a,b)\varphi(x) = x^{c-a-b}\mathrm{I}^b_{0+}x^{a-c}\mathrm{I}^{c-b}_{0+}x^b\varphi(x)\,; \qquad (10) $$

$$ {}_2\mathrm{I}^c_{0+}(a,b)\varphi(x) = x^a\mathrm{I}^b_{0+}x^{-a}\mathrm{I}^{c-b}_{0+}\varphi(x)\,; \qquad (11) $$

$$ {}_2\mathrm{I}^c_{0+}(a,b)\varphi(x) = x^b\mathrm{I}^{c-b}_{0+}x^{a-c}\mathrm{I}^b_{0+}x^{c-a-b}\varphi(x)\,; \qquad (12) $$

$$ {}_3\mathrm{I}^c_-(a,b)\varphi(x) = x^{c-a-b}\mathrm{I}^b_-x^{a-c}\mathrm{I}^{c-b}_-x^b\varphi(x)\,; \qquad (13) $$

$$ {}_3\mathrm{I}^c_-(a,b)\varphi(x) = \mathrm{I}^{c-b}_-x^{-a}\mathrm{I}^b_-x^a\varphi(x)\,; \qquad (14) $$

$$ {}_4\mathrm{I}^c_-(a,b)\varphi(x) = x^a\mathrm{I}^b_-x^{-a}\mathrm{I}^{c-b}_-\varphi(x)\,; \qquad (15) $$

$$ {}_4\mathrm{I}^c_-(a,b)\varphi(x) = x^b\mathrm{I}^{c-b}_-x^{a-c}\mathrm{I}^b_-x^{c-a-b}\varphi(x)\,. \qquad (16) $$

Ограниченность операторов, стоящих в левых частях (5) – (8) и справедливость представлений (9) – (16) в весовых пространствах $L_p(R^1_+,x^\mu)$, $1 \le p < +\infty$, устанавливает следующая теорема 1.

Теорема 1. Пусть $c,a,b \in \mathbb{R}, 1 \le p < \infty$, $b > 0, c-b > 0, a-b \ne 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, и выполняются какие-либо из условий A_j таблицы. Тогда соответствующий оператор B_j определен на множестве C_j и ограниченно отображает C_j на множество D_j, причем, имеют место равенства E_j.

j	A_j	B_j	C_j	D_j	E_j
1	$\mu < p(min(a,b)+1)-1$	${}_1\mathrm{I}^c_{0+}(a,b)$	$L_p(R^1_+,x^\mu)$	$L_p(R^1_+,x^{\mu-cp})$	(9) (10)
2	$\mu < p(c-min(a,b))-1$ $\mu < p(min(0,c-a-b)+1)-1$	${}_2\mathrm{I}^c_{0+}(a,b)$	$L_p(R^1_+,x^\mu)$	$L_p(R^1_+,x^{\mu-cp})$	(11) (12)
3	$\mu < p(c-min(a,b))-1$ $\mu < p(min(0,c-a-b)+1)-1$	${}_3\mathrm{I}^c_-(a,b)$	$L_p(R^1_+,x^{p(c+1)-\mu-2})$	$L_p(R^1_+,x^{p-\mu-2})$	(13) (14)
4	$\mu < p(min(a,b)+1)-1$	${}_4\mathrm{I}^c_-(a,b)$	$L_p(R^1_+,x^{p(c+1)-\mu-2})$	$L_p(R^1_+,x^{p-\mu-2})$	(15) (16)

Доказательство

Рассмотрим первый случай таблицы. Покажем, что ${}_1\mathrm{I}^c_{0+}$ ограниченно действует из $L_p(R^1_+,x^\mu)$ в $L_p(R^1_+,x^{\mu-cp})$, т.е. выполняется: $\left\|{}_1\mathrm{I}^c_{0+}\varphi\right\|_{L_p(R^1_+,x^{\mu-cp})} \le k\|\varphi\|_{L_p(R^1_+,x^\mu)}$, где $k>0$ – некоторая постоянная.

Положим $\mathrm{K}(x,t) = \begin{cases} \dfrac{(x-t)^{c-1}}{\Gamma(c)}\,{}_2F_1\left(a,b;c;1-\dfrac{x}{t}\right), & x > t \\ 0, & x < t \end{cases}$; $\mathrm{K}(x,t)$ – однородное ядро степени ($c-1$),

т.е. выполняется $\mathrm{K}(\lambda x,\lambda t) = \lambda^{c-1}\mathrm{K}(x,t), (\lambda > 0)$.

Осуществляя замену $t = x\tau$ и используя однородность ядра, имеем

$$\left({}_1\mathrm{I}^c_{0+}\varphi\right)(x) \equiv \int_0^\infty \mathrm{K}(x,t)\varphi(t)dt = \int_0^\infty \mathrm{K}(x,x\tau)\varphi(x\tau)xd\tau = x^c\int_0^\infty \mathrm{K}(1,t)\varphi(xt)dt.$$

Применяя обобщенное неравенство Минковского [5, (1.33)], находим:

$$\|\mathrm{K}\varphi\|_{L_p\left(R^1_+,x^{\mu-cp}\right)} = \left(\int_0^\infty x^{\mu-cp}\left|\int_0^\infty \mathrm{K}(1,t)\varphi(xt)x^c dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \le \int_0^\infty |\mathrm{K}(1,t)|\,dt\left(\int_0^\infty x^{\mu-cp}x^{cp}|\varphi(xt)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left[x = \frac{\tau}{t}\right] =$$

$$= \int_0^\infty |\mathrm{K}(1,t)|\,dt\left(\int_0^\infty \frac{\tau^\mu}{t^\mu}|\varphi(\tau)|^p\frac{d\tau}{t}\right)^{\frac{1}{p}} = \int_0^\infty |\mathrm{K}(1,t)|\,t^{\frac{-(\mu+1)}{p}}dt\left(\int_0^\infty \tau^\mu|\varphi(\tau)|^p d\tau\right)^{\frac{1}{p}} = k\|\varphi\|_{L_p\left(R^1_+,x^\mu\right)},$$

здесь

$$k = \int_0^\infty |\mathrm{K}(1,t)|\,t^{\frac{-(\mu+1)}{p}}dt. \tag{17}$$

Непосредственно проверяем с помощью асимптотической формулы [5, (10.13)]:

$${}_2F_1(a,b;c;z) = O\left(z^{-a}\right)+O\left(z^{-b}\right),\ z\to\infty,\ a-b\ne 0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots,$$

что несобственный интеграл (17) сходится при $a-b\ne 0,\pm1,\pm2,\ldots$, $\mu < p(a+1)-1$ и $\mu < p(b+1)-1$, $c-b>0$, $b>0$.

Таким образом,

$$\left\|{}_1\mathrm{I}^c_{0+}(a,b)\varphi\right\|_{L_p\left(R^1_+,x^{\mu-cp}\right)} \le k\|\varphi\|_{L_p\left(R^1_+,x^\mu\right)} \tag{18}$$

при выполнении условий $a-b\ne 0,\pm1,\pm2,\ldots$, $\mu < p\left(min(a,b)+1\right)-1, c-b>0, b>0$.

Рассмотрим далее оператор $\mathrm{I}^{c-b}_{0+}x^{-a}\mathrm{I}^b_{0-}x^a\varphi(x)$.

На основании теоремы 5.4 [5, § 5] оператор $\mathrm{I}^b_{0+}x^a$ ограниченно действует из пространства $L_p\left(R^1_+,x^{\mu-ap}\right)$ в $L_p\left(R^1_+,x^{\mu-ab-bp}\right)$:

$$\left(\int_0^\infty x^{\mu-ab-bp}\left|\left(\mathrm{I}^b_{0+}x^a\varphi(x)\right)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \le k_1\left(\int_0^\infty x^{\mu-ap}\left|x^a\varphi(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

при выполнении условий $1\le p<\infty; b>0; \mu<p(a+1)-1$.

По теореме 5.4 [5, § 5] оператор I^{c-b}_{0+} ограниченно действует из $L_p\left(R^1_+,x^{\mu-bp}\right)$ в $L_p\left(R^1_+,x^{\mu-cp}\right)$ при выполнении условий: $\mu<p(b+1)-1$; $c-b>0$; $1\le p<\infty$.

Следовательно, оператор $\mathrm{I}^{c-b}_{0+}x^{-a}\mathrm{I}^b_{0+}x^a\varphi(x)$ ограниченно действует из пространства $L_p\left(R^1_+,x^\mu\right)$ в пространство $L_p\left(R^1_+,x^{\mu-cp}\right)$ при выполнении условий: $\mu<p\left(min(a,b)+1\right)-1$, $c-b>0$, $b>0$, $1\le p<\infty$.

Аналогично показывается, что оператор $x^{c-a-b}\mathrm{I}^b_{0+}x^{a-c}\mathrm{I}^{c-b}_{0-}x^b\varphi(x)$ ограниченно действует из пространства $L_p\left(R^1_+,x^\mu\right)$ в пространство $L_p\left(R^1_+,x^{\mu-cp}\right)$ при выполнении условий: $1\le p<\infty$; $c-b>0$, $b>0$; $\mu<p\left(min(a,b)+1\right)-1$.

Это завершает доказательство теоремы 1 в первом случае.

Аналогично доказывается второй случай теоремы 1.

При рассмотрении случаев $j = 3, 4$ (см. табл.) воспользуемся формулой [5, (10.32)]:

$${}_j\mathrm{I}^c(a,b)\varphi(x) = y^{1-c}\,{}_{4-j}\mathrm{I}^c(a,b)\varphi_1(y),\quad xy=1,$$

$$\varphi_1(y) = x^{c+1}\varphi(x),\quad j = 1,2,3,4,$$

а затем используем уже доказанные второй и первый случаи теоремы по отношению к функции $\varphi_1(x) = x^{-c-1}\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$. Теорема доказана.

Как показывают формулы (9) – (16), интегралы ${}_j\mathrm{I}^{c}_{0+}(a,b)\varphi \in L_p\left(R^1_+, x^{\mu-cp}\right)$ $(j = 1,2,3,4)$ представимы в виде композиций двух односторонних дробных интегралов со степенными весами. Условия такой представимости в весовых пространствах суммируемых функций на полуоси отражает теорема 1, из которой следует, что если $\varphi(x)$ принадлежит пространству $L_p\left(R^1_+,\, x^{\mu}\right)$ (или некоторому его подпространству), то при соответствующих условиях операторы ${}_j\mathrm{I}^{c}_{0+}(a,b)\varphi$ $(j = 1,2,3,4)$ действуют на определенное подпространство из $L_p\left(R^1_+, x^{\nu}\right)$, $1 \le p < \infty$, и справедливы те или иные из формул (9) – (16). Это означает, что если правая часть – функция $g(x)$ – берется из указанной области, на которую действует оператор ${}_j\mathrm{I}^{c}_{0+}(a,b)\varphi$ $(j = 1,2,3,4)$, то соответствующее уравнение ${}_j\mathrm{I}^{c}_{0+}(a,b)\varphi = g$ $(j = 1,2,3,4)$ однозначно разрешимо путем последовательного обращения двух интегродифференциальных операторов, композиция которых составляет ${}_j\mathrm{I}^{c}_{0+}(a,b)\varphi$ $(j = 1,2,3,4)$.

Осуществляя такие обращения, из формул (9) – (16) получим следующие представления решений уравнений (5) – (8) [5, § 35]:

$$\varphi(x) = x^{-a}\mathrm{I}^{-b}_{0+}x^{a}\mathrm{I}^{b-c}_{0+}g(x)\,; \tag{19}$$

$$\varphi(x) = x^{-b}\mathrm{I}^{b-c}_{0+}x^{c-a}\mathrm{I}^{-b}_{0+}x^{a+b-c}g(x)\,; \tag{20}$$

$$\varphi(x) = \mathrm{I}^{b-c}_{0+}x^{a}\mathrm{I}^{-b}_{0+}x^{-a}g(x)\,; \tag{21}$$

$$\varphi(x) = x^{a+b-c}\mathrm{I}^{-b}_{0+}x^{c-a}\mathrm{I}^{b-c}_{0+}x^{-b}g(x)\,; \tag{22}$$

$$\varphi(x) = x^{-b}\mathrm{I}^{b-c}_{-}x^{c-a}\mathrm{I}^{-b}_{-}x^{a+b-c}g(x)\,; \tag{23}$$

$$\varphi(x) = x^{-a}\mathrm{I}^{-b}_{-}x^{a}\mathrm{I}^{b-c}_{-}g(x)\,; \tag{24}$$

$$\varphi(x) = \mathrm{I}^{b-c}_{-}x^{a}\mathrm{I}^{-b}_{-}x^{-a}g(x)\,; \tag{25}$$

$$\varphi(x) = x^{a+b-c}\mathrm{I}^{-b}_{-}x^{c-a}\mathrm{I}^{b-c}_{-}x^{-b}g(x)\,. \tag{26}$$

Тогда имеют место следующие утверждения.

1. Уравнение (5) имеет единственное решение $\varphi \in L_p\left(R^1_+, x^{\mu}\right)$, выражаемое формулами (19) или (20).
2. Уравнение (6) имеет единственное решение $\varphi \in L_p\left(R^1_+, x^{\mu}\right)$, выражаемое формулами (21) или (22).
3. Уравнение (7) имеет единственное решение $\varphi \in L_p\left(R^1_+, x^{\mu}\right)$, выражаемое формулами (23) или (24).
4. Уравнение (8) имеет единственное решение $\varphi \in L_p\left(R^1_+, x^{\mu}\right)$, выражаемое формулами (25) или (26).

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проекты ФО5МС-050 и ФО5Р-036).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. – М.: Наука, 1965.
2. Джрбашян М.М. Итегральные преобразования и представления функций в комплексной области. – М.: Наука, 1966.
3. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды: Дополнительные главы. – М.: Наука, 1986. – 801 с.
4. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equation / North-Hollend Mathematics Studies. – Amsterdem, etc.: Elsevier, 2006. – 204 p.
5. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Мн.: Наука и техника, 1987.