УДК 512.542

ТОТАЛЬНО НАСЫЩЕННЫЕ ФОРМАЦИИ l_∞-ДЛИНЫ ≤ 4

канд. физ.-мат. наук, доц. В.Г. САФОНОВ
(Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины)

В работе получено описание тотально насыщенных формаций конечных групп, у которых длина решетки тотально насыщенных подформаций не превосходит 4.

Введение

Рассматриваются только конечные группы. Изучению и классификации формаций различных типов, имеющих заданную длину, посвящены работы [1 – 7; 8, гл. 4; 9, гл. 5]. Базовые результаты теории тотально насыщенных формаций изложены в книгах [8 – 10]. Исследование общих свойств решетки тотально насыщенных формаций, а также тотально насыщенных формаций с заданными ограничениями на структуру их подформаций проводилось в работах [11 – 18]. В работе автора [15] было установлено, что для тотально насыщенной формации $\boldsymbol{F}$ условие конечности длины решетки ее тотально насыщенных подформаций $L_\infty(\boldsymbol{F})$ равносильно условию конечности решетки $L_\infty(\boldsymbol{F})$, а также разрешимости и однопорожденности формации $\boldsymbol{F}$. В настоящей работе получено описание тотально насыщенных формаций $\boldsymbol{F}$, у которых длина решетки $L_\infty(\boldsymbol{F})$ не превосходит 4.

1. Определения и обозначения

Мы придерживаемся терминологии, принятой в книгах [8 – 10]. Напомним здесь лишь некоторые из используемых определений и обозначений. Всякую формацию называют 0-кратно насыщенной. При $n \geq 1$ формацию $\boldsymbol{F}$ называют n-кратно насыщенной, если она имеет такой локальный экран, все непустые значения которого $(n-1)$-кратно насыщенные формации. Формацию n-кратно насыщенную для любого целого неотрицательного n называют тотально насыщенной.

Пусть $\boldsymbol{X}$ – некоторая совокупность групп. Тогда через $l_\infty\mathrm{form}\boldsymbol{X}$ обозначают пересечение всех тотально насыщенных формаций, содержащих $\boldsymbol{X}$. Формацию $l_\infty\mathrm{form}\boldsymbol{X}$ называют тотально насыщенной формацией, порожденной совокупностью групп $\boldsymbol{X}$. Если $\boldsymbol{X} = \{G\}$, то $l_\infty\mathrm{form}\,\boldsymbol{X} = l_\infty\mathrm{form}G$ называют однопорожденной тотально насыщенной формацией. Для любых тотально насыщенных формаций $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{H}$ полагают $\boldsymbol{M} \vee_\infty \boldsymbol{H} = l_\infty\mathrm{form}(\boldsymbol{M} \cup \boldsymbol{H})$.

Частично упорядоченное по включению $\subseteq$ множество всех тотально насыщенных формаций l_∞ вместе с операциями $\vee_\infty$ и $\cap$ образует полную решетку. Формации из l_∞ называют l_∞-формациями. Для любой l_∞-формации $\boldsymbol{F}$ через $L_\infty(\boldsymbol{F})$ обозначают решетку всех тотально насыщенных формаций, содержащихся в формации $\boldsymbol{F}$.

Экран, все непустые значения которого l_∞-формации, называется l_∞-значным. Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ – некоторая система l_∞-значных экранов. Тогда через $\vee_\infty(f_i \mid i \in I)$ обозначается такой экран f, что $f(p) = l_\infty\mathrm{form}(\cup_{i\in I} f_i(p))$, если по крайней мере одна из формаций $f_i(p) \neq \varnothing$. В противном случае полагают $f(p) = \varnothing$.

Тотально насыщенную формацию $\boldsymbol{F}$ называют $\boldsymbol{H}_\infty$-критической (или, иначе, минимальной тотально насыщенной не $\boldsymbol{H}$-формацией), если $\boldsymbol{F} \not\subseteq \boldsymbol{H}$, но все собственные тотально насыщенные подформации из $\boldsymbol{F}$ содержатся в классе групп $\boldsymbol{H}$.

Будем говорить, что тотально насыщенная формация $\boldsymbol{F}$ имеет *l_∞-длину* равную n, если существует такая совокупность формаций $\boldsymbol{F}_0, \boldsymbol{F}_1, \ldots, \boldsymbol{F}_n$, что $\boldsymbol{F}_n = \boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{F}_0 = (1)$ – формация всех единичных групп, и $\boldsymbol{F}_{i-1}$ – максимальная тотально насыщенная подформация формации $\boldsymbol{F}_i$, $i = 1, \ldots, n$. В противном случае будем говорить, что формация $\boldsymbol{F}$ имеет бесконечную l_∞-длину. Корректность данного определения основана на установленной модулярности решетки всех тотально насыщенных формаций [16, 17]. Непосредственно из определения l_∞-длины тотально насыщенной формации $\boldsymbol{F}$ следует, что она равна длине решетки $L_\infty(\boldsymbol{F})$.

Для любых двух l_∞-формаций $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{M}$, где $\boldsymbol{M} \subseteq \boldsymbol{F}$ через $\boldsymbol{F}/_\infty\boldsymbol{M}$ обозначают решетку l_∞-формаций, заключенных между $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{F}$. Пусть $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{H}$ – произвольные l_∞-формации. Тогда $\boldsymbol{H}_\infty$-дефектом формации $\boldsymbol{F}$ называют длину решетки $\boldsymbol{F} /_\infty \boldsymbol{H} \cap \boldsymbol{F}$ (конечную или бесконечную) и обозначают $|\boldsymbol{F} : \boldsymbol{H} \cap \boldsymbol{F}|_\infty$. В случае, когда $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{N}$ – формация всех нильпотентных групп $\boldsymbol{N}_\infty$-дефект l_∞-формации, называют её нильпотентным l_∞-дефектом.

Тотально насыщенная формация $\boldsymbol{F}$ называется неприводимой (или l_∞-неприводимой формацией), если $\boldsymbol{F} \neq l_\infty\mathrm{form}(\cup_{i\in I}\boldsymbol{X}_i) = \vee_\infty(\boldsymbol{X}_i \mid i \in I)$, где $\{\boldsymbol{X}_i \mid i \in I\}$ – набор всех собственных тотально насыщенных подформаций из $\boldsymbol{F}$. В противном случае формация $\boldsymbol{F}$ называется приводимой тотально насыщенной формацией (или l_∞-приводимой формацией).

Для любых формаций $F_1, \ldots, F_n$ через $F_1 \oplus \ldots \oplus F_n$ обозначается совокупность групп вида $A_1 \times \ldots \times A_n$, где $A_i \in F_i$ и $F_i \cap F_j = (1)$ для всех различных i и j из $\{1, \ldots, n\}$.

Произведением формаций F и M называют формацию $FM = (G \mid G^M \in F)$, где G^M – M-корадикал группы G, т.е. пересечение всех нормальных подгрупп K группы G, для которых $G/K \in M$.

Говорят, что группа Шмидта G имеет тип (p, q), если $\pi(G) = \{p, q\}$ и в G нормальна силовская p-подгруппа.

В дальнейшем через N, S и (1) будем обозначать соответственно формацию всех нильпотентных, всех разрешимых и всех единичных групп.

2. Используемые результаты

Следующая лемма непосредственно вытекает из леммы 5.2.7 [9, с. 193].

Лемма 1. *Пусть M, F и H – l_∞-формации, где $M \subseteq F$. Тогда $|M : H \cap M|_\infty \leq |F : H \cap F|_\infty$.*

Лемма 2 [16, 17]. *Решетка всех тотально насыщенных формаций модулярна.*

Лемма 3 [10, с. 37]. *Пусть f – однородный экран формации F, $\pi = \pi(F)$. Тогда $N \cap F = N_\pi$, $\pi = \{ p \mid f(p) \neq \varnothing \}$.*

Лемма 4 [15]. *Пусть F – тотально насыщенная формация. Тогда следующие утверждения равносильны:*

1) решетка $L_\infty(F)$ имеет конечную длину;

2) решетка $L_\infty(F)$ конечна;

3) F – разрешимая однопорожденная l_∞-формация.

Лемма 5 [16]. *Пусть F – ненильпотентная тотально насыщенная формация. Тогда в F найдется, по меньшей мере, одна минимальная тотально насыщенная ненильпотентная подформация.*

Лемма 6 [16]. *Пусть F – l_∞-формация. Тогда и только тогда F – N_∞-критическая формация, когда $F = N_pN_q$ для некоторых различных простых чисел p и q.*

Лемма 7 [9, с. 94]. *Пусть F – разрешимая формация. Тогда в том и только в том случае F – минимальная тотально локальная не N^m-формация, когда $F = l_\infty$*form*G, где $G = [P_1]([P_2]\ldots([P_m]N)\ldots)$ – минимальная не N^m-группа, P_i – самоцентрализуемая минимальная нормальная подгруппа в $[P_i]([P_{i+1}]\ldots([P_m]N)\ldots)$ при всех $i = 1, \ldots, m$ и N – группа простого порядка.*

Лемма 8 [9, с. 172]. *Пусть $\{ F_i \mid i \in I \}$ – такая система формаций, что*

$$F = \vee(F_i \mid i \in I) = \mathrm{form}(\cup_{i\in I} F_i)$$

и $F_i \cap F_j = (1)$ для любых различных i и j из I. Тогда $F = \oplus_{i\in I} F_i$.

Лемма 9 [9, с. 174]. *Пусть $F = \oplus_{i\in I} F_i$ для некоторых формаций F_i. Тогда в том и только в том случае формация F является тотально насыщенной, когда тотально насыщена каждая из формаций F_i.*

Лемма 10 [18]. *Пусть F – тотально насыщенная формация. Тогда и только тогда $|F : N \cap F|_\infty = 1$, когда $F = M \vee_\infty H$, где M – нильпотентная тотально насыщенная формация, H – N_∞-критическая формация, при этом:*

1) всякая нильпотентная подформация из F входит в $M \vee_\infty (H \cap N)$;

2) всякая ненильпотентная l_∞-подформация F_1 из F имеет вид $H \vee_\infty (F_1 \cap N)$.

Лемма 11 [18]. *Пусть F – тотально насыщенная формация. Тогда и только тогда $|F : F \cap N|_\infty = 2$, когда $F = H_1 \vee_\infty H_2 \vee_\infty M$, где H_1 и H_2 – различные N_∞-критические формации, а $M \subseteq N$.*

3. Основной результат

Докажем прежде некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 12. *Пусть F, M и H – тотально насыщенные формации, причем $H \subseteq M$. Тогда и только тогда H_∞-дефект формации F конечен, когда конечны H_∞-дефект формации $F \cap M$ и M_∞-дефект формации F, при этом $|F : H \cap F|_\infty = |F \cap M : H \cap (F \cap M)|_\infty + |F : M \cap F|_\infty$.*

Доказательство. Необходимость. По лемме 1 имеет место неравенство:

$$|F \cap M : H \cap (F \cap M)|_\infty \leq |F : H \cap F|_\infty.$$

Положим $n = |F : H \cap F|_\infty$, $k = |F \cap M : H \cap (F \cap M)|_\infty$.

Ввиду леммы 2 существуют цепи:

$$F \cap H = F_0 \subset F_1 \subset \ldots \subset F_{n-1} \subset F_n = F,$$

$$F \cap H = (F \cap M) \cap H = L_0 \subset L_1 \subset \ldots \subset L_{k-1} \subset L_k = F \cap M,$$

где F_i и L_j – максимальная тотально насыщенная подформация в F_{i+1} и L_{j+1}, соответственно $i = 0, 1, \ldots, n-1$ и $j = 0, 1, \ldots, k-1$. Поскольку $H \subseteq M$, то $F \cap H \subseteq F \cap M$ и $F /_\infty F \cap M$ подрешетка решетки конечной длины $F /_\infty F \cap H$. Поэтому решетка $F /_\infty F \cap M$ также имеет конечную длину. Обозначим длину решетки $F /_\infty F \cap M$ через t. Тогда $t = | F : M \cap F |_\infty$ и существует цепь длины t:

$$F \cap M = X_0 \subset X_1 \subset \ldots \subset X_{t-1} \subset X_t = F,$$

где X_i – максимальная тотально насыщенная подформация в X_{i+1}, $i = 0, 1, \ldots, t-1$.

Таким образом, существует максимальная цепь тотально насыщенных формаций длины $k + t$:

$$F \cap H = L_0 \subset L_1 \subset \ldots \subset L_{k-1} \subset L_k = F \cap M = X_0 \subset X_1 \subset \ldots \subset X_{t-1} \subset X_t = F,$$

Привлекая теперь лемму 2, заключаем, что $n = k + t$.

Достаточность. Пусть $k = |F \cap M : H \cap (F \cap M)|_\infty$, $t = | F : M \cap F |_\infty$. Тогда ввиду леммы 2 существуют цепи:

$$F \cap M = X_0 \subset X_1 \subset \ldots \subset X_{t-1} \subset X_t = F,$$

$$F \cap H = (F \cap M) \cap H = L_0 \subset L_1 \subset \ldots \subset L_{k-1} \subset L_k = F \cap M,$$

где F_i и L_j – максимальная тотально насыщенная подформация в F_{i+1} и L_{j+1} соответственно, $i = 0, 1, \ldots, n-1$ и $j = 0, 1, \ldots, k-1$.

Таким образом, существует максимальная l_∞-цепь длины $k + t$ от $F \cap H$ до F. Последнее означает, что $|F : H \cap F|_\infty = k + t$. Лемма доказана.

Следующая лемма доказывается аналогично лемме 5.3.4 [9].

Лемма 13. *Пусть $F = F_1 \oplus \ldots \oplus F_t$, где F_i – неединичная тотально насыщенная формация конечной длины n_i. Тогда $l_\infty(F) = n_1 + \ldots + n_t$.*

Лемма 14. *Тогда и только тогда l_∞-длина тотально насыщенной формации F конечна, когда конечны $\pi(F)$ и $| F : N \cap F |_\infty$, при этом $l_\infty(F) = | \pi(F) | + | F : N \cap F |_\infty$.*

Доказательство. Применяя лемму 12 при $H = (1)$, $M = N$, получаем

$$| F : (1) |_\infty = | F \cap N : (1) \cap (F \cap N) |_\infty + | F : N \cap F |_\infty.$$

Но $| F : (1) |_\infty = l_\infty(F)$ и $| F \cap N : (1) \cap (F \cap N) |_\infty = l_\infty(F \cap N)$. Кроме того, ввиду леммы 3 $F \cap N = N_\pi$, где $\pi = \pi(F)$. Поэтому $l_\infty(F) = l_\infty(N_\pi) + | F : N \cap F |_\infty$. Допустим, что множество π бесконечно, и рассмотрим следующую цепь l_∞-формаций:

$$(1) = L_0 \subset N_{p1} = L_1 \subset N_{\{p1, p2\}} = L_2 \subset \ldots \subset N_{\{p1, \ldots, pn\}} = L_n \subset \ldots .$$

Учитывая лемму 3, нетрудно убедиться, что L_i – максимальная l_∞-подформация формации L_{i+1} $(i = 1, 2, \ldots)$. Но L_i – l_∞-подформация N_π. Значит, N_π содержит бесконечную максимальную цепь l_∞-подформаций:

$$L_0 \subset L_1 \subset L_2 \subset \ldots \subset L_n \subset \ldots .$$

Последнее в силу леммы 2 противоречит условию. Следовательно, $| \pi | < \infty$. Пусть $\pi = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$, т.е. $| \pi | = n$. Ввиду лемм 8 и 9 имеет место равенство $N_\pi = N_{p1} \oplus \ldots \oplus N_{pn}$. Кроме того, поскольку по лемме 12 $l_\infty(N_{pi}) = 1$ $(i = 1, \ldots, n)$, то в силу леммы 13 имеем $l_\infty(N_\pi) = n$. Таким образом, $l_\infty(F) = | \pi(F) | + | F : N \cap F |_\infty$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть F – тотально насыщенная формация. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $l_\infty(F) \leq 2$ тогда и только тогда, когда $F = l_\infty \mathrm{form}A$, где A нильпотентная группа с $|\pi(A)| \leq 2$;

2) $l_\infty(F) = 3$ тогда и только тогда, когда $F = l_\infty \mathrm{form}A$, где A либо группа Шмидта, либо нильпотентная группа с $|\pi(A)| = 3$.

Доказательство. Пусть $l_\infty(F) \leq 2$. В силу леммы 4 формация F разрешима. Предположим, что F не является нильпотентной. Тогда в силу леммы 5 в формации F содержится, по меньшей мере, одна минимальная тотально насыщенная ненильпотентная подформация H. Ввиду леммы 6 $H = N_pN_q$, где p и q – различные простые числа. Так как $|\pi(H)| = 2$ и $| H : N \cap H |_\infty = 1$, то в силу леммы 14 имеем $l_\infty(H) = 3$. Но $H \subseteq F$. Следовательно, по лемме 1 $l_\infty(H) \leq 2$. Противоречие. Поэтому, $F \subseteq N$. Ввиду леммы 3 $F = F \cap N = N_{\pi(F)}$. Применяя теперь лемму 14, получим $|\pi(F)| \leq 2$. Таким образом, если A – такая группа из F, что $\pi(A) = \pi(F)$, то $F = l_\infty \mathrm{form}A$.

Пусть $l_\infty(F) = 3$. Если $F \subseteq N$, то в силу леммы 14 $|\pi(F)| = 3$. Пусть $\pi(F) = \{p, q, r\}$ и P, Q и R группы порядков p, q и r соответственно. Тогда ввиду лемм 8 и 9

$$F = N_p \oplus N_q \oplus N_r = l_\infty\text{form}(P\times Q\times R) = l_\infty\text{form}A,$$

где A – нильпотентная группа с $|\pi(A)| = 3$.

Пусть теперь формация F не является нильпотентной. Тогда согласно лемме 5 в F имеется минимальная, тотально насыщенная ненильпотентная подформация H. Ввиду леммы 6, $|\pi(H)| = 2$. Применяя теперь лемму 14, получим, что $l_\infty(H) = 3$. Поэтому $F = H$. В силу лемм 6 и 7 $F = N_pN_q = l_\infty\text{form}A$, где A – группа Шмидта.

Если теперь $F = l_\infty\text{form}A$, где A – либо группа Шмидта, либо нильпотентная группа с $|\pi(A)| = 3$, то ввиду лемм 7 и 14 имеем $l_\infty(F) = 3$. Теорема доказана.

Следующая теорема непосредственно вытекает из теоремы 1.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть F – тотально насыщенная формация. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $l_\infty(F) \leq 2$ тогда и только тогда, когда $F = N_\pi$, где $|\pi| \leq 2$;

2) $l_\infty(F) = 3$ тогда и только тогда, когда $F = N_\pi$, где $|\pi| = 3$, либо $F = N_pN_q$, где p и q – различные простые числа.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть F – тотально насыщенная формация. Тогда и только тогда l_∞-длина формации F равна 4, когда $F = l_\infty\text{form}G$, где G – одна из следующих групп:*

1) нильпотентная группа с $|\pi(G)| = 4$;

2) группа вида $P \times A$, где $|P| = p \in \pi \setminus \pi(A)$, а A – группа Шмидта;

3) группа вида $A \times B$, где A и B – группы Шмидта различных типов с $\pi(A) = \pi(B)$.

Доказательство. Необходимость. Пусть F – тотально насыщенная формация l_∞-длины 4. В силу леммы 4 формация F разрешима. Допустим, что $F \subseteq N$. Тогда по лемме 14 $|\pi(F)| = 4$. Пусть $\pi(F) = \{p, q, r, s\}$ и P, Q, R и S – соответственно группы порядков p, q, r и s. Тогда в силу лемм 8 и 9

$$F = N_p \oplus N_q \oplus N_r \oplus N_s = l_\infty\text{form}(P\times Q\times R\times S).$$

Таким образом, относительно формации F выполняется условие 1).

Пусть $|F : N \cap F|_\infty = 1$. Тогда согласно лемме 10 $F = M \vee_\infty H$, где $M \subseteq N$, а H – минимальная тотально насыщенная ненильпотентная формация. Ввиду леммы 7 $H = l_\infty\text{form}A$, где A – группа Шмидта. По теореме 1 $l_\infty(H) = 3$. Поэтому $M \not\subseteq H$. Пусть $p \in \pi(M) \setminus \pi(H)$. Тогда $N_p \not\subseteq H$. Привлекая леммы 8 и 9, заключаем, что $N_p \oplus H \in l_\infty$. Ввиду леммы 13 $l_\infty(N_p\oplus H) = 4$. Поэтому

$$F = N_p\oplus H = l_\infty\text{form}(N_p \cup H) = l_\infty\text{form}(P\times A),$$

где P – группа порядка p. Таким образом, относительно формации F выполняется условие 2).

Пусть теперь $|F : N \cap F|_\infty = 2$. В силу леммы 14 $|\pi(F)| = 2$. Ввиду леммы 11 $F = H_1 \vee_\infty H_2 \vee_\infty M$, где $M \subseteq N$, а H_1 и H_2 – различные минимальные тотально насыщенные ненильпотентные формации. Согласно лемме 7 $H_i = l_\infty\text{form}A_i$, где A_i – группа Шмидта, $i = 1, 2$. В силу теоремы 1 $l_\infty(H_i) = 3$. Допустим теперь, что найдется такое $p \in \pi(F)$, что $p \notin \pi(H_1)$. Тогда ввиду лемм 8 и 9 $N_p \oplus H_1 \in l_\infty$. Понятно, что $N_p\oplus H_1 \subseteq F$. Согласно лемме 13 $l_\infty(N_p\oplus H_1) = 4$. Значит, $N_p\oplus H_1 = N_p \vee_\infty H_1 = F$. Однако, тогда согласно лемме 10 $|F : N \cap F|_\infty = 1$. Полученное противоречие показывает, что $\pi(H_1) = \pi(H_2) = \pi(F) = \{p, q\}$. Следовательно, A_1 и A_2 – группы Шмидта различных типов. Таким образом, относительно формации F выполняется условие 3).

Достаточность. Пусть $F = l_\infty\text{form}G$ и для группы G выполняется условие 1). Тогда $|\pi(F)| = 4$ и ввиду леммы 14 $l_\infty(H) = 4$.

Пусть G – группа, удовлетворяющая условию 2). Тогда, с учетом лемм 8 и 9, имеем

$$F = l_\infty\text{form}G = l_\infty\text{form}(P\times A) = l_\infty\text{form}P \vee_\infty l_\infty\text{form}A = N_p \vee_\infty N_qN_r = N_p \oplus N_qN_r,$$

где $\{q, r\} = \pi(A)$. В силу леммы 10 $|F : N \cap F|_\infty = 1$. Так как при этом $|\pi(F)| = 3$, то по лемме 14 имеем $l_\infty(F) = 4$.

Пусть теперь G – группа из пункта 3). Тогда

$$F = l_\infty\text{form}G = l_\infty\text{form}(A\times B) = l_\infty\text{form}A \vee_\infty l_\infty\text{form}B.$$

Поскольку $\pi(A) = \pi(B)$, то ввиду леммы 6 $F = N_pN_q \vee_\infty N_qN_p$. Согласно лемме 11 F – формация с N_∞-дефектом. Следовательно, в силу леммы 14 $l_\infty(H) = 4$. Теорема доказана.

Приведем также другую формулировку теоремы 3.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть* $\mathbf{F}$ *– тотально насыщенная формация. Тогда и только тогда* l_∞*-длина формации* $\mathbf{F}$ *равна* 4, *когда* $\mathbf{F}$ *– одна из следующих формаций*:

1) $\mathbf{N}_\pi$, *где* $|\pi| = 4$;

2) $\mathbf{N}_p \vee_\infty \mathbf{N}_q \mathbf{N}_r = \mathbf{N}_p \oplus \mathbf{N}_q \mathbf{N}_r$, *где p, q и r – различные простые числа;*

3) $\mathbf{N}_p \mathbf{N}_q \vee_\infty \mathbf{N}_q \mathbf{N}_p$, *где p и q – различные простые числа.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований, грант Ф06МС-017.

ЛИТЕРАТУРА

1. Скиба А.Н. О локальных формациях длины 5 // Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп. – Мн.: Наука и техника, 1986. – С. 135 – 149.
2. Эйдинов М.И. Элементы высоты два решетки формаций конечных групп // Изв. вузов. Математика. – 1990. – № 6. – С. 77 – 80.
3. Ведерников В.А. Формации конечных групп с дополняемыми подформациями длины 3 // Вопросы алгебры. – Мн.: Университетское, 1992. – Вып. 6. – С. 16 – 21.
4. Джарадин Джехад. Элементы высоты 3 решетки *p*-насыщенных формаций // Вопросы алгебры. – Гомель: Изд-во Гом. гос. ун-та, 1996. – Вып. 9. – С. 45 – 59.
5. Ведерников В.А., Коптюх Д.Г. Композиционные формации *c*-длины 3 // Дискретная математика. – 2001. – Т. 13, Вып. 1. – С. 119 – 131.
6. Близнец И.М. Описание элементов высоты 2 решетки ω-локальных формаций // Вестн. Белорус. ун-та, Сер. 1. – 2003. – № 2. – С. 57 – 60.
7. Близнец И.М. Об элементах высоты 3 решетки τ-замкнутых ω-локальных формаций // Докл. НАН Беларуси. – 2003. – Т. 47, № 2. – С. 50 – 53.
8. Шеметков Л.А., Скиба А.Н. Формации алгебраических систем. – М.: Наука, 1989. – 253 с.
9. Скиба А.Н. Алгебра формаций. – Мн.: Беларуская навука, 1997. – 240 с.
10. Шеметков Л.А. Формации конечных групп. – М.: Наука, 1978. – 267 с.
11. Каморников С.Ф. О некоторых свойствах тотально локальных формаций // Матем. заметки. – 1996. – Т. 60, № 1. – С. 24 – 29.
12. Воробьёв Н.Н. Об одном вопросе теории локальных классов конечных групп // Вопросы алгебры. – Гомель: Изд-во Гомельского гос. ун-та, 1999. – Вып. 14. – С. 132 – 140.
13. Guo W., K.P.Shum On totally local formations of groups // Comm. Algebra. – 2002. – V. 30, № 5. – P. 2117 – 2131.
14. Сафонов В.Г. Об одном вопросе теории тотально локальных формаций конечных групп // Алгебра и логика. – 2003. – Т. 42, № 6. – С. 727 – 736.
15. Сафонов В.Г. О тотально насыщенных формациях конечной длины // Изв. Гомельского гос. ун-та. – 2004. – № 6. – С. 150 – 155.
16. Сафонов В.Г. О двух задачах теории тотально насыщенных формаций // Докл. НАН Беларуси. – 2005. – Т. 49, № 5. – С. 16 – 20.
17. Сафонов В.Г. О модулярности решетки τ-замкнутых тотально насыщенных формаций конечных групп // Украинск. матем. журнал. – 2006. – Т. 58, № 6. – С. 852 – 858.
18. Сафонов В.Г. О приводимых тотально насыщенных формациях нильпотентного дефекта 3 // Изв. Гомельского гос. гос. ун-та. – 2005. – № 4. – С. 157 – 162.