МАТЕМАТИКА

УДК 517.986

ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

д-р физ.-мат. наук, проф. А.Р. МИРОТИН, М.А. РОМАНОВА
(Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины)

Изучаются алгебры обобщенных аналитических функций на пространстве полухарактеров $\hat{S}$ дискретной абелевой подгруппы S, погружающейся в группу. Обобщенная аналитичность понимается в двух смыслах. Равномерные алгебры аналитических функций обозначаются в них соответственно $A_0(\hat{S})$ и $A(\hat{S})$. Проводится анализ уже имеющихся граничных теорем единственности, касающихся алгебры $A_0(\hat{S})$. Показано, что аналоги классических теорем единственности (граничных и внутренних) для алгебры обобщенных аналитических функций $A(\hat{S})$, вообще говоря, неверны. Доказаны две граничные теоремы единственности для $A(\hat{S})$, обобщающие результат К.Ф. Хоффмана для $A_0(\hat{S})$, а также три внутренние теоремы единственности для алгебр $A_0(\hat{S})$ и $A(\hat{S})$ при различных ограничениях на полугруппу S и соответствующие открытые подмножества полугруппы полухарактеров $\hat{S}$.

1. Введение и предварительные сведения

Теория обобщенных аналитических функций на пространствах полухарактеров полугрупп берет свое начало с работы Р. Аренса и И.М. Зингера [1]. В настоящее время она превратилась в довольно развитый раздел функционального анализа, расположенный на стыке теории равномерных алгебр, абстрактного гармонического анализа и теории аналитических функций [2 – 6]. Более общее, чем в [1], определение обобщенной аналитической функции было позднее дано в [7]. В [1], помимо прочего, установлена граничная теорема единственности для обобщенных аналитических (по Аренсу – Зингеру) функций. Обобщение этой теоремы для частного случая линейной архимедовой упорядоченности получено К. Хоффманом [8].

Целью данной работы является перенесение этого результата на случай алгебр обобщенных аналитических функций в смысле [7] при существенном ослаблении требования линейной архимедовой упорядоченности, а также получение внутренних теорем единственности для обобщенных аналитических по Аренсу – Зингеру функций.

Всюду ниже S – записываемая мультипликативно дискретная абелева полугруппа с сокращениями и единицей e, не являющаяся группой, $G = S^{-1}S$ – (дискретная) группа частных для S [9].

Полухарактером полугруппы S называется гомоморфизм ψ полугруппы S в мультипликативную полугруппу $\bar{D} = \{z \in C \mid |z| \le 1\}$, не являющийся тождественным нулем. *Характерами* называются полухарактеры, равные по модулю единице.

Множество всех полухарактеров далее обозначается $\hat{S}$, а его подмножество, состоящее из неотрицательных полухарактеров, – $\hat{S}_+$. Наделенные топологией поточечной сходимости это компактные топологические полугруппы по умножению с единицей 1 ($\hat{S}$ компактно как замкнутое подмножество в $\bar{D}^S$). Компактную группу характеров полугруппы S будем обозначать X. Согласно [1, теорема 3.1] каждый полухарактер $\psi \in \hat{S}$ допускает «полярное разложение» $\psi = \rho\chi$, где $\chi \in X$, а $\rho \in \hat{S}_+$, которое единственно, если ψ не принимает нулевых значений.

Каждый характер $\chi \in X$ единственным образом продолжается до характера группы G по формуле $\chi(a^{-1}b) := \overline{\chi(a)}\chi(b)$, что позволяет отождествлять X с группой характеров группы G. Аналогично каждый полухарактер $\rho \in \hat{S}_+$ единственным образом продолжается со своего носителя $S(\rho)$ до гомоморфизма $\tilde{\rho}$ группы частных $G(\rho)$ полугруппы $S(\rho)$ в мультипликативную полугруппу положительных действительных чисел.

Через ω мы обозначаем индикатор одноточечного множества $\{e\}$, который принадлежит $\hat{S}_+$, если $S \cap S^{-1} = \{e\}$. Отметим, что степень ρ^0 по определению есть индикатор носителя ρ и что $\rho^z \in \hat{S} \setminus X$ при $\rho \in \hat{S}_+$, $\rho \ne 1$, $z \in \Pi$, где $\Pi := \{Re\, z > 0\}$ [1, § 7]. Сужение функции f на подмножество M ее области определения обозначается $f \mid M$, конец доказательства или примера – □.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [1]. Комплекснозначная функция F на $\hat{S}\setminus X$ называется *обобщенной аналитической в смысле Аренса – Зингера*, если F может быть равномерно приближена на компактных подмножествах $\hat{S}\setminus X$ функциями вида $\hat{f}(\psi)=\sum_{s\in S} f(s)\psi(s)$, где $f\in l_1(S)$, $\psi\in\hat{S}$.

Равномерную алгебру всех функций, непрерывных на $\hat{S}$ и обобщенных аналитических в смысле Аренса – Зингера, обозначим $A_0(\hat{S})$ (фактически она зависит от S, а не только от $\hat{S}$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [7]. Комплекснозначная функция F на $\hat{S}\setminus X$ называется *обобщенной аналитической*, если при ρ, $\psi\in\hat{S}\setminus X$, $\rho\geq 0$ функция $z\mapsto F(\rho^z\psi)$ аналитична на Π и непрерывна в $+0$.

Равномерную алгебру всех функций, непрерывных на $\hat{S}$ и обобщенных аналитических в смысле определения 2, обозначим $A(\hat{S})$.

Из [1, теорема 7.4] следует, что $A_0(\hat{S})\subset A(\hat{S})$, но следующий пример показывает, что строгое включение возможно.

ПРИМЕР 1. Если S есть аддитивная полугруппа $\{0, 2, 3, ...\}$, то функция $F(z)=z$ принадлежит $A(\hat{S})=A(\overline{D})$, но по [1, теорема 2.6] не аналитична по Аренсу – Зингеру, так как преобразование Фурье ее сужения на единичную окружность не сосредоточено на S. □

2. Граничные теоремы единственности

Классическая граничная теорема единственности Лузина – Привалова [10, с. 80], утверждает, что если множество нулевых некасательных граничных значений некоторой аналитической в полуплоскости Π функции имеет положительную лебегову меру, то эта функция нулевая. Для алгебры $A_0(\hat{S})$, а потому и для $A(\hat{S})$, аналог этого результата, вообще говоря, неверен. А именно, в [1, с. 392] приведен пример такой ненулевой обобщенной аналитической в смысле Аренса – Зингера функции, которая равна нулю на непустом открытом подмножестве группы X. Однако при некоторых ограничениях в [1] был установлен следующий ослабленный вариант граничной теоремы единственности.

Для $\rho\in\hat{S}_+$ положим $G^\rho:=\{x\in G\mid \bar{\rho}(x)=1\}$, через X^ρ обозначим аннулятор G^ρ в X, и пусть

$$X_0=X\cap(\cup\{\rho^0X^\rho\mid\rho\in\hat{S}_+\})^-$$

(черта обозначает замыкание в $\hat{S}$).

ТЕОРЕМА А [1, теорема 8.2]. *Если $X_0=X$ и функция $F\in A_0(\hat{S})$ обращается в нуль на непустом открытом подмножестве группы X, то $F=0$.*

Для формулировки результата К. Хоффмана и его обобщения нам понадобятся гармонические меры μ_ς, построенные в [1, § 5]. В случае, когда полухарактер $\varsigma=\rho\chi$ не принимает нулевых значений (а только этот случай нам и потребуется), интеграл по мере μ_ς определяется для любой ограниченной борелевской функции φ на X формулой:

$$\int_X\varphi\, d\mu_\varsigma=\frac{1}{\pi}\int_R\varphi(\rho^{iv}\chi)\frac{dv}{1+v^2}. \tag{1}$$

При этом для любой функции $F\in A_0(\hat{S})$ справедлив аналог формулы Пуассона:

$$\int_X F d\mu_\varsigma=F(\varsigma).$$

Кроме того, в случае, когда $S\cap S^{-1}=\{e\}$, полугруппа S определяет на G частичный порядок по формуле $x\leq y:=y\in xS$. Этот порядок называется *архимедовым*, если для любых $a,b\in S$, $a^{-1}\notin S$ существует натуральное n, при котором $b\leq a^n$. При этом говорят, что S *архимедово упорядочивает* G.

ТЕОРЕМА В [8, теорема 6.2]. *Предположим, что S архимедово и линейно упорядочивает группу G, $F\in A_0(\hat{S})$. Если для некоторого $\varsigma\neq 1$ сужение $F\mid X$ обращается в нуль на множестве положительной μ_ς-меры, то $F=0$.*

Ниже мы обобщим теорему В в двух направлениях. Во-первых, алгебра $A_0(\hat{S})$ будет заменена более широкой алгеброй $A(\hat{S})$. Во-вторых, будет снято сильное условие линейной упорядоченности и ослаблено условие архимедовой упорядоченности. Для этого отметим, что идеал I полугруппы S называется *простым*, если $S \setminus I$ есть полугруппа, I называется *нетривиальным*, если $I \neq S \setminus \{e\}$. Легко проверяется, что в архимедовом случае полугруппа S не содержит нетривиальных простых идеалов. Кроме того [8, теорема 2.1], в этом случае любой неотрицательный полухарактер $\rho \neq 1, \omega$ разделяет точки S.

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что полугруппа S не содержит нетривиальных простых идеалов, $F \in A(\hat{S})$. Если для фиксированного $\varsigma = \rho_0\chi_0$ сужение $F \mid X$ обращается в нуль на множестве положительной μ_ς-меры, причем ρ_0 разделяет точки S, то $F = 0$.*

Доказательство. Сначала отметим, что полухарактеры полугруппы S, отличные от ϖ, не принимают нулевых значений (иначе множество нулей такого полухарактера было бы нетривиальным простым идеалом), а потому верна формула (1). Пусть $F \mid A = 0$ для некоторого множества $A \subseteq X$ положительной μ_ς-меры, $\varsigma = \rho_0\chi_0$. Для комплексного $z = x + iy$, $x \geq 0$, $y \in R$ положим $f(z) := F(\rho_0^z\chi_0)$. По условию теоремы $f(iy) = 0$, если $y \in B := \{y \in R \mid \rho_0^{iy}\chi_0 \in A\}$. Но равенство $\mu_\varsigma(A) = \int\limits_X 1_A d\mu_\varsigma = \frac{1}{\pi}\int\limits_R 1_A(\rho_0^{iv}\chi_0)\frac{dv}{1+v^2} = \frac{1}{\pi}\int\limits_B \frac{dv}{1+v^2}$ (1_A обозначает индикатор множества A) показывает, что множество B имеет положительную меру Лебега, а потому $f(z) = 0$, по теореме Лузина – Привалова. Таким образом, $F(\rho_0^z\chi_0) = 0$ при всех $z = x + iy$, $x \geq 0$, $y \in R$. Поскольку множество $\{\rho_0^{x+iy} \mid y \in R\}$ плотно в $\rho_0^x X^{\rho_0}$ [1, теорема 7.2], получаем по непрерывности, что $F \mid \rho_0^x X^{\rho_0}\chi_0 = 0$, откуда, устремляя x к 0, выводим, что $F \mid X^{\rho_0}\chi_0 = 0$. А так как ρ_0 разделяет точки S, то $X^{\rho_0} = X$, т.е. $F \mid X = 0$.

Для произвольных $\chi \in X$, $\rho \in \hat{S}_+$, $\rho \neq \omega$ положим теперь $g(z) := F(\rho^z\chi)$, $z = x + iy$, $x \geq 0$, $y \in R$. Тогда g аналитична в полуплоскости Π и равна нулю на ее границе, а потому есть тождественный нуль. При $z = 1$ получаем отсюда, что $F(\varsigma) = 0$ при всех $\varsigma \neq \omega$. Для завершения доказательства заметим, что в силу теоремы Э. Глисона [11] на S существует положительный полухарактер $\rho_1 \neq 1, \omega$. Поскольку множество $\{s \in S \mid \rho_1(s) < 1\}$ есть простой идеал в S, а он тривиален, то $\rho_1^n \to \omega$ ($n \to \infty$), и по непрерывности $F(\omega) = 0$. □

Справедлив также такой вариант предыдущей теоремы.

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что полугруппа S не содержит нетривиальных простых идеалов, $F \in A(\hat{S})$. Если для каждого полухарактера $\varsigma = \rho\chi_0$, где $\rho \neq 1, \omega$, а характер χ_0 фиксирован, сужение $F \mid X$ обращается в нуль на множестве положительной μ_ς-меры, то $F = 0$.*

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 1 (с заменой ρ_0 на ρ), получаем, что $F \mid X^\rho\chi_0 = 0$ при $\rho \neq 1, \omega$. Там же было показано, что полухарактеры полугруппы S, отличные от ω, не принимают нулевых значений и что на S существует положительный полухарактер $\rho_1 \neq 1, \omega$ такой, что $\rho_1(s) < 1$ при $s \neq e$. Функция $h = -\log\tilde{\rho}_1$ удовлетворяет всем условиям теоремы 8.4 из [1], а значит $X_0 = X$. Поэтому $X \subset \overline{(\cup_{\rho\neq 1,\omega} X^\rho \cup \{\omega\})}$. Отсюда следует, что замыкание множества $\cup\{X^\rho \mid \rho \neq 1, \omega\}$ равно X. Таким образом, $F \mid X = 0$ и $F = 0$, как в теореме 1. □

3. Внутренние теоремы единственности

Под внутренними теоремами единственности мы будем понимать утверждения вида $F \mid U = 0 \Rightarrow F = 0$, где U – непустое открытое подмножество $\hat{S}$. Следующий пример показывает, что для алгебры $A_0(\hat{S})$, а тем более для $A(\hat{S})$, внутренняя теорема единственности, вообще говоря, неверна.

ПРИМЕР 2. Пусть $S = Z_+ \times Z$. Так как любой неотрицательный ограниченный полухарактер ρ_1 (аддитивной) полугруппы Z_+ имеет вид $\rho_1(m) = r^m$, где $r = \rho_1(1) \in [0;1]$ (мы считаем $0^0 := 1$), то любой неотрицательный ограниченный полухарактер ρ полугруппы S есть $\rho(m,n) = r^m$, где $r \in [0;1]$. Поскольку любой характер группы Z^2 имеет вид $\chi(m,n)=t_1^m t_2^n$, где t_i принадлежат одномерному тору T, то общий вид полухарактера $\psi\in\hat{S}$ есть $\psi(m,n)=\rho(m,n)\chi(m,n)=(rt_1)^m t_2^n$. Таким образом, $\hat{S}$ можно отождествить с заполненным тором $\bar{D}\times T$, где $\bar{D}$ – замыкание открытого единичного круга D, $X=T^2$. При этом $F\in A(\hat{S})$ тогда и только тогда, когда $F(z,t)$ непрерывна на $\bar{D}\times T$ и аналитична по $z\in D$. Пусть $\varphi\neq 0$ – непрерывная функция на T – обращающаяся в нуль на непустом открытом множестве $V\subset T$. Тогда ненулевая функция $F(z,t)=z\varphi(t)$ принадлежит $A_0(\hat{S})$ (преобразование Фурье сужения $F\mid X$ сосредоточено на S) и равна нулю на $D\times V$. □

Более того, в [5, с. 303], отмечено, что если в алгебре $A_0(\hat{S})$ внутренняя теорема единственности справедлива для любого непустого открытого $U\subset\hat{S}\setminus X$, то S не содержит нетривиальных подгрупп. Вместе с тем имеют место следующие результаты.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть* $X_0=X$, $F\in A_0(\hat{S})$. *Если открытое множество* $U\subset\hat{S}$ *удовлетворяет одному из следующих двух условий:*

1) U *содержит полухарактер, не принимающий нулевых значений;*

2) *если замыкание множества* U *содержит характер, то равенство* $F\mid U=0$ *влечет* $F=0$.

Доказательство. Пусть выполняется условие 1) и пусть полухарактер ψ_1 из U имеет полярное разложение $\psi_1=\rho_1\chi_1$, $\rho_1(s)\neq 0$ при всех $s\in S$. Положим

$$W=\{z\in\Pi\mid \rho_1^z\chi_1\in U\}.$$

Множество W не пусто и открыто в Π в силу непрерывности отображения $z\mapsto\rho_1^z\chi_1$, $z\in\Pi$. Так как $F(\rho_1^z\chi_1)=0$ при $z\in W$, то по теореме единственности это верно и при $z\in\Pi$. По непрерывности $F(\rho_1^{iy}\chi_1)=0$ при всех $y\in R$. Как уже отмечалось выше, множество $\{\rho_1^{x+iy}\mid y\in R\}$ плотно в $\rho_1^x X^{\rho_1}$ при всех $x\geq 0$. Следовательно, $\{\rho_1^{iy}\chi_1\mid y\in R\}$ плотно в $X^{\rho_1}\chi_1$. Теперь по непрерывности $F\mid X^{\rho_1}\chi_1=0$. Рассмотрим множество:

$$V=\{\chi\in X\mid \rho_1\chi\in U\}.$$

Оно не пусто и открыто, причем выше фактически показано, что $F\mid X^{\rho_1}\chi=0$ при всех $\chi\in V$, т.е. $F\mid X^{\rho_1}V=0$. Таким образом, F обращается в нуль на непустом открытом $X^{\rho_1}V\subset X$, а потому $F=0$ по теореме А.

Пусть U удовлетворяет условию 2). Для произвольного $\psi_1=\rho_1\chi_1\in U$ рассмотрим функцию:

$$F_1(\psi)=F(\psi\rho_1).$$

Тогда $F_1\in A_0(\hat{S})$. Действительно, из рассуждений, приведенных в [3, с. 217], следует, что алгебра $A_0(\hat{S})$ состоит из тех и только тех функций на $\hat{S}$, которые равномерно аппроксимируются на $\hat{S}$ аналитическими полиномами, т.е. функциями вида $p=\sum_{i=1}^n c_i\hat{a}_i$, $a_i\in S$, $c_i\in C$ (мы полагаем $\hat{a}(\psi):=\psi(a)$). Если $max\mid p-F\mid<\varepsilon$ и $p_1=\sum_{i=1}^n c_i\rho_1(a_i)\hat{a}_i$, то $max\mid p_1-F_1\mid<\varepsilon$, что и доказывает это включение.

Введем множество V по той же формуле, что и выше. Это непустое открытое подмножество X, причем $F_1\mid V=0$. В силу теоремы А тогда $F_1=0$, т.е. $F\mid\rho_1\hat{S}=F\mid\psi_1\hat{S}=0$ при всех $\psi_1\in U$. Другими словами, $F\mid U\hat{S}=0$. С другой стороны, по условию 2) теоремы найдется характер χ_0 и направленность $\psi_n\in U$ такие, что $\psi_n\to\chi_0$. Поскольку $\psi_n\chi_0^{-1}\psi\to\psi$ для любого $\psi\in\hat{S}$ и $\psi_n\chi_0^{-1}\psi\in U\hat{S}$, то по непрерывности $F(\psi)=0$. □

Наиболее завершенно выглядит внутренняя теорема единственности в случае, когда полугруппа S не содержит нетривиальных простых идеалов.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть* S *не содержит нетривиальных простых идеалов,* $F\in A_0(\hat{S})$. *Если* $F\mid U=0$ *для непустого открытого множества* $U\in\hat{S}$, *то* $F=0$.

Доказательство. Достаточно проверить выполнение условий теоремы 3. В доказательстве теоремы 1 уже было показано, что полухарактеры полугруппы S, отличные от ω, не принимают нулевых значений. Там же установлено, что на S существует положительный полухарактер $\rho_1 \neq 1, \omega$, такой, что $\rho_1(s) < 1$ при $s \neq e$. Тогда $\rho_1^n \to \omega$, но $\rho_1^n \in \hat{S} \setminus \{\omega\}$. Поэтому $U \neq \{\omega\}$. Наконец, в доказательстве теоремы 2 показано, что при наших условиях $X_0 = X$. □

Следующий простой результат в определенном смысле дополняет теорему 3.

ТЕОРЕМА 5. *Предположим, что* $S \cap S^{-1} = \{e\}$ *и что для любой точки* $s_0 \in S \setminus \{e\}$ *полухарактер* 1 *есть предельная точка множества*

$$P(s_0) = \{\rho \in \hat{S}_+ \mid \rho(s_0) < 1\}.$$

Если функция $F \in A(\hat{S})$ *обращается в нуль в некоторой окрестности полухарактера* ω, *то* $F = 0$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть каноническую окрестность точки ω в топологии поточечной сходимости ($\varepsilon > 0$, $s_1, \dots, s_n \in S \setminus \{e\}$)

$$U(s_1, \dots, s_n; \varepsilon) = \{\psi \in \hat{S} \mid |\psi(s_i)| < \varepsilon, i = 1, \dots, n\}.$$

Пусть $F \mid U(s_1, \dots, s_n; \varepsilon) = 0$. Для любого полухарактера $\psi \in \hat{S}$ возможны следующие случаи.

1) $|\psi(s_i)| < 1$ при всех $i = 1, \dots, n$. Рассмотрим полярное разложение $\psi = \rho\chi$. Так как $\rho(s_i) < 1$ при всех $i = 1, \dots, n$, то $\rho^z\chi \in U(s_1, \dots, s_n; \varepsilon)$ при достаточно больших $Re\, z$. Поэтому аналитическая в П функция $F(\rho^z\chi)$ тождественно равна нулю. В частности, $F(\psi) = 0$.

2) $|\psi(s_j)| = 1$ при некотором j. Для каждого $i = 1, \dots, n$ выберем направленность $\rho_{m_i} \in P(s_i)$, сходящуюся к 1, и положим $\rho_m = \prod_{i=1}^n \rho_{m_i} (m = (m_1, \dots, m_n))$. Тогда полухарактеры $\psi_m = \rho_m \psi$ удовлетворяют неравенствам $|\psi_m(s_i)| < 1$ при всех $i = 1, \dots, n$, причем $\psi_m \to \psi$. С учетом 1) получаем теперь

$$F(\psi) = \lim_m F(\psi_m) = 0. \ \square$$

СЛЕДСТВИЕ. *Предположим, что* $S \cap S^{-1} = \{e\}$ *и что для любой точки* $s_0 \in S \setminus \{e\}$ *найдется такой полухарактер* ρ, *что* $\rho(s) > 0$ *при всех* s *и* $\rho(s_0) < 1$. *Если функция* $F \in A(\hat{S})$ *обращается в нуль в некоторой окрестности полухарактера* ω, *то* $F = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Arens R., Singer I.M. Generalized analytic functions // Trans. Amer. Math. Soc. – 1956. – Vol. 81, № 2. – P. 379 – 393.
2. Гамелин Т. Равномерные алгебры. – М.: Мир, 1973. – 336 с.
3. Rudin W. Fourier analysis on groups. – N.Y.: Interscience Publishers, 1962. – 285 p.
4. Helson H. Analyticity on compact abelian groups // Algebras in analysis: proceedings of instructional conference and NATO Advanced Study Institute, Birmingem, 1973 / Kluwer; H. Helson, ed. – London, 1975. – P. 1 – 62.
5. Tonev T., Grigoryan S.A. Analytic functions on compact groups and their applications to almost periodic functions // Contemporary Math. – 2003. – Vol. 328, № 2. – P. 299 – 322.
6. Grigoryan S.A., Tonev T. Shift-invariant algebras on groups // Contemporary Math. - 2004. – Vol. 363, № 1. – P. 111 – 127.
7. Миротин А.Р. Теорема Пэли – Винера для конусов в локально компактных абелевых группах // Известия высших учебных заведений. Математика. – 1995. – № 3 . – С. 35 – 44.
8. Hoffman K. Boundary behavior of generalized analytic functions // Trans. Amer. Math. Soc. – 1958. – Vol. 87, № 3. – P. 447 – 466.
9. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп: В 2 т. – М.: Наука, 1972. – Т. 1 – 285 с.
10. Кусис П. Введение в теорию пространств H^p. – М.: Мир, 1984. – 364 с.
11. Rieffel M.A. A characterization of commutative group algebras and measure algebras // Trans. Amer. Math. Soc. – 1965. – Vol. 116, № 4. – P. 32 – 65.