УДК 512.542

О НАСЛЕДСТВЕННО G-ПЕРЕСТАНОВОЧНЫХ ПОДГРУППАХ В ГРУППАХ ШЕВАЛЛЕ ЛИЕВСКОГО РАНГА 1

д-р физ.-мат. наук, проф. В.Н. ТЮТЯНОВ
(Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины);
В.А. ТЮТЯНОВА
(Международный институт трудовых и социальных отношений, Минск)

Продолжено дальнейшее изучение вопроса о существовании в простых неабелевых группах собственных G-перестановочных подгрупп. В работе рассмотрены конечные группы Шевалле $L_2(q)$, $^2B_2(q)$, $^2G_2(q)$, $U_3(q)$ *лиевского ранга* 1. *При этом установлено, что ни одна группа из приведенного списка не имеет собственной наследственно G-перестановочной подгруппы. Данный результат решает проблему 17.112 из Коуровской тетради в классе групп Шевалле лиевского ранга 1. Известно много примеров простых групп с собственной G-перестановочной подгруппой. Однако в настоящее время не известно ни одной конечной простой неабелевой группы с собственной наследственно G-перестановочной подгруппой. Этот результат подтверждает гипотезу о том, что не существует конечной простой неабелевой группы с собственной наследственно G-перестановочной подгруппой.*

1. Введение

Пусть A и B – подгруппы группы G. Часто встречается ситуация, когда $AB \neq BA$, однако для некоторого $g \in G$ $AB^g = B^g A$. Рассмотрение данной ситуации привело к естественным понятиям X-перестановочной и наследственно X-перестановочной подгрупп, введенных А.Н. Скибой в 2003 году [1]. В Коуровской тетради [2, проблема 17.112] А.Н. Скибой и В.Н. Тютяновым были поставлены следующие два вопроса: какие конечные простые неабелевы группы G обладают: (а) нетривиальной G-перестановочной подгруппой; (б) нетривиальной наследственно G-перестановочной подгруппой.

В работе В.Н. Тютянова и П.В. Бычкова [3] было установлено, что в спорадических группах нет собственной наследственно G-перестановочной подгруппы, а также показано, что группа Янко J_1 имеет G-перестановочную подгруппу порядка 2.

В настоящей работе рассматривается вопрос о существовании собственной наследственно G-перестановочной подгруппы в группах Шевалле лиевского ранга 1.

2. Обозначения и терминология

Для удобства читателя приведем основные обозначения и определения. Остальные обозначения можно найти, например, в [4, 5].

2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть G – конечная группа и $L \leq G$. Подгруппа L называется G-перестановочной, если для всякой подгруппы $H \leq G$ найдется элемент $g \in G$ такой, что $LH^g = H^g L$.

2.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть G – конечная группа и $L \leq G$. Подгруппа L называется наследственно G-перестановочной, если для всякой подгруппы $T \leq G$ такой, что $L \leq T$, подгруппа L является T-перестановочной.

- $|G|$ – порядок конечной группы G;
- $[A]B$ – полупрямое произведение групп A и B, где A – нормальная подгруппа в $[A]B$;
- $\pi(n)$ – множество всех простых делителей натурального числа n;
- $\pi(G) = \pi(|G|)$;
- $Syl_p(G)$ – множество всех силовских p-подгрупп группы G;
- (a, b) – наибольший общий делитель натуральных чисел a и b;
- S_n – симметрическая группа перестановок на n символах;
- A_n – знакопеременная группа перестановок на n символах.

Под группой Шевалле будем понимать простую неабелеву группу, являющуюся фактор-группой универсальной группы Шевалле по ее центру.

Если G – группа Шевалле, определенная над полем характеристики p, то $U \in Syl_p(G)$ является унипотентной подгруппой группы G, $N_G(U) = [U]H = B$ – борелевская подгруппа в G, где H – подгруппа Картана.

3. Используемые результаты

3.1. ЛЕММА [6]. Пусть в группе $PSL_2(p^n)$ N – нормализатор силовской p-подгруппы, D – диэдральная группа порядка $2(2^n + 1)$ при $p = 2$ и $p^n + 1$ при $p > 2$, Z – циклическая подгруппа индекса 2 в D,

S_4 и S_4^* – несопряженные в $PSL_2(p^n)$ симметрические группы степени 4, A_4 и A_4^* (A_5 и A_5^*) – несопряженные в $PSL_2(p^n)$ знакопеременные группы степени 4 (соответственно 5). Группа $PSL_2(p^n)$ допускает только следующие факторизации, с точностью до сопряженных подгрупп:

А. $PSL_2(2^n) = ND = NZ$, $n \geq 2$.

Б. Пусть $p > 2$. $PSL_2(p^n) = ND$ тогда и только тогда, когда $\frac{1}{2}(p^n - 1)$ нечетное число.

В. При $p^n \geq 61$ и $p > 2$ группа $PSL_2(p^n)$ не имеет никаких факторизаций, кроме указанной в Б.

Г. Пусть $p > 2$ и $p^n \leq 59$. Тогда

1) $PSL_2(7) = ND = NS_4 = NS_4^* = G_7S_4 = G_7S_4^*$;

2) $PSL_2(9) = NA_5 = NA_5^* = S_4A_5 = S_4^*A_5^* = A_5A_5^* = A_4A_5^* = A_4^*A_5$;

3) $PSL_2(11) = ND = NA_4 = NA_5 = NA_5^* = G_{11}A_5 = G_{11}A_5^*$;

4) $PSL_2(19) = ND = NA_5 = NA_5^*$;

5) $PSL_2(29) = NA_5 = NA_5^* = KA_5 = KA_5^*$, где $K \subseteq N$ и $|K| = 7 \cdot 29$;

6) $PSL_2(59) = ND = NA_5 = NA_5^*$;

7) $PSL_2(p^n) = ND$, где $p^n = 23, 27, 31, 43, 47$.

3.2. ЛЕММА [7, теорема 9]. Группа Судзуки $^2B_2(q)$ содержит следующие подгруппы:

1) группу Фробениуса порядка $q^2(q - 1)$;

2) диэдральную группу порядка $2(q - 1)$;

3) циклические группы A_i ($i = 1, 2$) порядков $q \pm r + 1$, где $r^2 = 2q$;

4) нормализаторы $N_G(A_i)$ порядков $4(q \pm r + 1)$, $i = 1, 2$;

5) если q есть степень числа s, то $^2B_2(q)$ содержит подгруппу, изоморфную $^2B_2(s)$.

3.3. ЛЕММА [8, теорема C]. Группа Pu $^2G_2(q)$, где $q = 3^{2n+1} > 3$ содержит следующие подгруппы:

1) параболическая подгруппа $[q^3]Z_{q-1}$;

2) централизатор инволюции $Z_2 \times PSL_2(q)$;

3) нормализатор четверной подгруппы $2^2 \times D_{\frac{1}{2}(q+1)} : 3$;

4) нормализатор силовской 2-подгруппы $2^3 : 7 : 3$;

5) подгруппу $Z_{q+\sqrt{3q}+1} : Z_6$;

6) подгруппу $Z_{q-\sqrt{3q}+1} : Z_6$;

7) подгруппу $^2G_2(q_0)$, где $q = q_0^\alpha$, где α – простое число.

4. Основной результат

4.1. ТЕОРЕМА. Пусть G – группа Шевалле лиевского ранга 1, тогда группа G не содержит собственной наследственно G-перестановочной подгруппы.

Доказательство

Всюду L – собственная наследственно G-перестановочная подгруппа в группе G. Часто используется тот факт, что в группе G всякая наследственно G-перестановочная подгруппа является G-перестановочной подгруппой, а поэтому, если в группе G нет собственной G-перестановочной подгруппы, то в G нет собственной наследственно G-перестановочной подгруппы.

Последовательно рассмотрим все возможные случаи.

1. $G \cong PSL_2(q)$

Обозначения леммы 3.1 будем использовать без дополнительных оговорок.

(a) $q = 2^n$, $n \geq 2$. По лемме 3.1 в этом случае группа G допускает следующую максимальную факторизацию: $G = ND$, где N – группа Фробениуса порядка $q(q - 1)$ и D – диэдральная группа порядка $2(q + 1)$. Группа G содержит максимальную диэдральную подгруппу M порядка $2(q - 1)$. Если $L \not\subset M$, то для некоторого элемента $g \in G$ имеет место равенство $LM^g = M^gL = G$. Однако группа G такой факторизации не допускает, поэтому $L \subseteq M$. Найдется элемент $g \in G$ такой, что $LD^g = D^gL = K$. Очевидно, что $K \neq G$. Это возможно только в том случае, когда $|L| = 2$. В группе G все инволюции сопряжены, поэтому можно считать, что $L \subset U$, где U – унипотентная подгруппа группы G. Имеют место следующие включения: $L \subset U \subset [U]H = B$ – борелевская подгруппа группы *G*, являющаяся группой Фробениуса. Поскольку $LH^b = H^b L$ для некоторого элемента $b \in B$, то $LH^b = L \times H^b$. Противоречие с тем, что *B* – группа Фробениуса.

(*в*) $q = p^n > 3$, $p > 2$. Если $q \geq 61$, то по лемме 3.1 группа *G* допускает единственную максимальную факторизацию: $G = ND$, где *N* – группа Фробениуса порядка $\frac{1}{2}q(q-1)$ и *D* – диэдральная подгруппа порядка $q + 1$, причем $\frac{1}{2}(q-1)$ – нечетное число. Группа *G* содержит максимальную диэдральную подгруппу порядка $q - 1$. Как и в пункте (*а*), показывается, что $|L| = 2$. В группе *G* все инволюции сопряжены и *G* содержит подгруппу $H \cong A_4$, поэтому $L \subset H$. Поскольку *L* – наследственно *G*-перестановочная подгруппа, то в *H* имеется подгруппа порядка 6, что невозможно.

(1) $G \cong PSL_2(7)$.

Группа *G* допускает следующие максимальные факторизации: $G = NS_4 = NS_4^*$, где $N \cong [Z_7]Z_3$; S_4 и S_4^* – симметрические группы из двух различных классов сопряженности. Пусть $L \not\subset S_4$, тогда для некоторого элемента $g \in G$ выполняются равенства $LS_4^g = S_4^g L = G$. Отсюда следует, что $|L|$ делит 21. Если $|L| = 21$, то в группе *G* имеется подгруппа порядка 42, что невозможно. Если $|L| = 7$, то в группе *G* имеется подгруппа порядка 14, что также невозможно. Случай $|L| = 3$ невозможен, так как тогда $LS_4^g \neq G$. Таким образом, $L \subseteq S_4$. Если $L = S_4$, то для некоторого $g \in G$ $S_4 S_4^{*g} = S_4^{*g} S_4 = G$, что невозможно. Следовательно, $L \subset S_4$. В этом случае существует собственная подгруппа группы *G* $LF^g = F^g L$ для некоторого $g \in G$, где $F^g \cong Z_7$. Это возможно, когда $|L| = 3$. Данный случай рассматривался выше.

(2) $G \cong PSL_2(9)$.

Группа *G* допускает следующие максимальные факторизации: $G = NA_5 = NA_5^* = S_4 A_5 = S_4^* A_5^* = A_5 A_5^*$. Пусть $L \not\subset S_4$, тогда для некоторого элемента $g \in G$ имеют место равенства: $LS_4^g = S_4^g L = G$. Поэтому $|L|$ делится на 3 и 5. Следовательно, $L = A_5$. В этом случае для $R \in Syl_3(G)$ найдется элемент $g \in G$ такой, что $LR^g = R^g L = K$ и $[G : K] = 2$, что невозможно. Таким образом, $L \subseteq S_4$. Если $L \cong Z_2$, то достаточно рассмотреть подгруппу A_4, содержащую *L*. Если $L \cong A_4$, то достаточно рассмотреть подгруппу *LR* для $R \in Syl_5(G)$. Такой подгруппы в группе *G* нет.

(3) $G \cong PSL_2(11)$.

Группа *G* допускает следующие максимальные факторизации: $G = ND = NA_5 = NA_5^*$. Пусть $L \not\subset D \cong D_{12}$. Тогда $|L|$ делится на 55, поскольку для некоторого элемента $g \in G$ выполняется $LD^g = D^g L = G$. Следовательно, $L \subseteq H \cong [Z_{11}]Z_5$. Если $L = H$, то в группе *G* существует подгруппа порядка 110, что невозможно. Если $L \cong Z_{11}$, то в группе *G* существует подгруппа порядка 22, что также невозможно. Если $L \cong Z_5$, то в группе *G* существует подгруппа порядка 15. Подгрупп такого порядка в группе *G* нет. Таким образом, $L \subseteq D$. $|L|$ делит 12 и в группе *G* существует подгруппа *LR* , где $R \in Syl_{11}(G)$, что невозможно.

(4) $G \cong PSL_2(19)$.

Группа *G* допускает следующие максимальные факторизации: $G = ND = NA_5 = NA_5^*$. Пусть $L \not\subset D$. Тогда для некоторого элемента $g \in G$ имеют место равенства: $LD^g = D^g L = G$ и $|L|$ делится на $3^2 \cdot 19$. В этом случае существует подгруппа *LR*, где $R \in Syl_5(G)$. Таких подгрупп в группе *G* нет. Поэтому $L \subseteq D$. Тогда существует подгруппа *LR*, где $R \in Syl_{19}(G)$, что невозможно.

(5) $G \cong PSL_2(29)$.

Группа *G* допускает следующие максимальные факторизации: $G = NA_5 = NA_5^*$. Пусть $L \not\subset A_5$. Тогда для некоторого элемента $g \in G$ имеем $LA_5^g = A_5^g L = G$ и, следовательно, $|L|$ делится на $7 \cdot 29$. Для противоречия достаточно рассмотреть подгруппу *LR*, где $R \in Syl_5(G)$. Поэтому $L \subseteq A_5$. Если $|L| \neq 2$, то достаточно рассмотреть подгруппу *LR*, где $R \in Syl_{29}(G)$. Если $|L| = 2$, то $L \subseteq H \cong A_4$, что невозможно.

(6) $G \cong PSL_2(59)$.

Группа *G* допускает следующие максимальные факторизации: $G = ND = NA_5 = NA_5^*$. Доказательство точно такое, как в пункте (4).

(7) $G \cong PSL_2(p^n)$, где p^n = 23, 27, 31, 43, 47. Группа G допускает следующие максимальные факторизации: $G = ND$. Данный случай рассматривается как при $q \geq 61$.

В остальных случаях группа G не имеет факторизаций. Легко заметить, что $|L|$ = 2. Это невозможно, поскольку G содержит подгруппу A_4.

2. $G \cong {}^2B_2(q)$, $q = 2^{2n+1} > 2$

Группы Судзуки не обладают факторизациями [9]. Следовательно, подгруппа L содержится во всякой максимальной подгруппе группы G. Список максимальных подгрупп группы ${}^2B_2(q)$ приведен в лемме 3.2. В частности, имеются максимальные подгруппы порядков $2(q-1)$ и $4(q \pm \sqrt{2q}+1)$. Поскольку $\left(q-1, q \pm \sqrt{2q}+1\right) = 1$, то отсюда следует, что $|L|$ = 2. Поскольку L содержится в подгруппе Фробениуса порядка $q^2(q-1)$, то отсюда легко заключить, что существует подгруппа $H \cong Z_2 \times Z_{q-1}$. Последнее невозможно.

3. $G \cong {}^2G_2(q)$, $q = 3^{2n+1} > 3$

Группы Ри не имеют факторизаций [9], поэтому L содержится в любой максимальной подгруппе группы G. Из леммы 3.3 следует, что $L \subseteq T_1 \cong Z_{q+\sqrt{3q}+1} : Z_6$ и $L \subseteq T_2 \cong Z_{q-\sqrt{3q}+1} : Z_6$. Так как $(q+\sqrt{3q}+1, q-\sqrt{3q}+1) = 1$, то $L \subseteq M \cong Z_6$. Пусть сначала $L \cong Z_6$. Подгруппа $L \subset P$, P – параболическая подгруппа группы G порядка $q^3(q-1)$. Так как L является наследственно G-перестановочной подгруппой, то для некоторого элемента $f \in P$ $LH^f = H^fL$, где H – подгруппа Картана. Отсюда следует, что $LH^f = [U_1]H^f$, где $|U_1|$ = 3. Последнее невозможно. Пусть $L \cong Z_3$. Данный случай рассматривается как предыдущий. Следовательно, $|L|$ = 2. В группах Ри все инволюции сопряжены и $PSL_2(q) \cong R < G$. Поэтому для некоторого $g \in G$ $L^g < R$ и данный случай был рассмотрен в пункте 1.

4. $G \cong PSU_3(q)$

Из [9] следует, что только группы $PSU_3(3)$ и $PSU_3(5)$ допускают факторизации. Рассмотрим каждую из этих групп. Пусть $G \cong PSU_3(3)$, тогда G допускает максимальную факторизацию: $G = AB$, где $A \cong PSL_2(7)$, $B \cong 3_+^{1+2}:8$. Максимальная подгруппа $4^{\cdot} S_4$ не является сомножителем в максимальной факторизации, поэтому $\pi(L) \subseteq \{2,3\}$. Для некоторого $g \in G$ имеет место равенство $LR^g = R^gL$, где $R \in Syl_7(G)$. Отсюда легко заключить, что $L \in \{Z_3, S_4\}$. Пусть сначала $L \cong Z_3$. Если $L \not\subset A$, то в силу максимальности подгруппы A в группе G, $G = LA$, что невозможно. Следовательно, $L \subset A$. Так как L является наследственно G-перестановочной подгруппой, то L – наследственно A-перестановочная подгруппа, что невозможно в силу пункта 1. Таким образом, $L \cong S_4$. Тогда для некоторого $g \in G$ $LB^g = B^gL$, что невозможно.

Пусть $G \cong PSU_3(5)$. Тогда группа G допускает следующую максимальную факторизацию: $G = AB$, где $A \cong A_7$, $B \cong 5_+^{1+2}:8$. Группа G содержит максимальную подгруппу $2.S_5$, поэтому $\pi(L) \subseteq \{2,3,5\}$. Для некоторого элемента $g \in G$ $LR^g = R^gL$, где $R \in Syl_7(G)$. Отсюда следует, что $L \in \{Z_3, S_4, A_6\}$. Пусть $R \in Syl_5(G)$, тогда $LR^g = R^gL$ для некоторого $g \in G$. Однако, таких подгрупп в группе $PSU_3(5)$ не существует.

В оставшихся случаях подгруппа L содержится в любой максимальной подгруппе группы G. Пусть сначала q – четное число. Максимальные подгруппы группы G описаны Хартли [10]. В частности, G содержит подгруппу $\dfrac{q^2-q+1}{(3,q+1)}:3$. Отсюда следует, что $|L|$ – нечетное число. Также L содержится в максимальной подгруппе $q^{1+2}:\dfrac{q^2-1}{(3,q+1)}$, а следовательно в подгруппе Картана $\dfrac{q^2-1}{(3,q+1)}$. Фактор-группа унипотентной подгруппы по подгруппе Фраттини является элементарной абелевой группой порядка q^2 и $[U/\Phi(U)]\,L$ – группа Фробениуса. Это невозможно, поскольку существует подгруппа $<\bar{u}> \times L$, где $\bar{u}$ – инволюция из $U/\Phi(U)$.

Пусть q – нечетное число. Максимальные подгруппы в группе G описаны Митчеллом [11]. Рассмотрим следующие три возможных случая:

(1) q – степень числа 3. В группе G существуют максимальные подгруппы порядков $3(q^2-q+1)$ и $6(q+1)^2$. Поскольку $(q^2-q+1, q+1) = 1$, то $|L|$ = 3. Это противоречит существованию максимальной подгруппы порядка $q(q^2-1)(q+1)$, содержащей подгруппу $SL_2(q)$;

(2) 3 делит $q-1$. В этом случае снова $(q^2-q+1, q+1) = 1$ и получается противоречие, как в пункте (1);

(3) 3 делит $q + 1$. В этом случае $q^2 - q + 1 = 3r$, где $(3, r) = 1$. Следовательно, $(q + 1, (q^2 - q + 1)/3) = 1$ и противоречие получается, как в пункте (1).

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Скиба, А.Н. *H*-перестановочные подгруппы / А.Н. Скиба // Изв. Гомел. гос. ун-та. – 2003. – № 4(19). – С. 37 – 39.
2. Коуровская тетрадь (Нерешенные вопросы теории групп). – 17-е изд. – Новосибирск: Ин-т математики, 2010.
3. Бычков, П.В. О наследственно *G*-перестановочных подгруппах спорадических групп / П.В. Бычков, В.Н. Тютянов // Вестн. Полоц. гос. ун-та. – 2008. – № 3. – С. 23 – 29.
4. Gorenstein, D. Finite groups / D. Gorenstein. – New-York: Chelsea, 1980. – 527 p.
5. Atlas of finite groups / J.H. Conway [et al.]. – London: Clarendon Press, 1985. – 252 p.
6. Ito, N. On the factorizations of the linear fractional groups $LF(2, p^n)$ / N. Ito // Acta Scient. Math. – 1953. – V. 15. – P. 79 – 84.
7. Suzuki, M. On a class double transitive groups / M. Suzuki // Ann. Math. – 1962. – V. 75, № 1. – P. 105 – 145.
8. Kleidman, P. The maximal subgroups of the Chevalley groups $G_2(q)$ with q odd, the Ree groups ${}^2G_2(q)$ and their automorphism groups / P. Kleidman // J. Algebra. – 1988. – V. 117. – P. 30 – 71.
9. Liebeck, M.W. The maximal factorizations of the finite simple groups and their automorphism groups / M.W. Liebeck, C.E. Praeger, J. Saxe // Mem. Amer. Math. Soc. – 1990. – № 432. – P. 1 – 151.
10. Haltley, R. Determination of the ternary collineation groups whose coefficients lie in the $GF(2^n)$ / R. Haltley // Ann. Math. – 1925. – V. 27. – P. 140 – 158.
11. Mitchell, H.H. Determination of the ordinary and modular ternary linear groups / H.H. Mitchell // Trans. Amer. Math. Soc. – 1911. – V. 12. – P. 207 – 242.

HEREDITARILY *G*-PERMUTABLE SUBGROUPS OF CHEVALLEY GROUPS OF LIE RANK 1

V. TYUTYANOV, V. TYUTYANOVA

All groups considered in this paper are finite. Let A and B by subgroups of a group G. If AB = BA, then they say that A permutes with B or A is permutable with B. We often meet the situation when $AB \neq BA$*, nevertheless there exists an element* $x \in G$ *such that* $AB^x = B^xA$*. A subgroup A of G is called G-permutable, if for every subgroup B of G there exists an element* $g \in G$ *such that* $AB^g = B^gA$*. A subgroup A of G is called hereditarily G-permutable, if for every a subgroup T of G with* $A \leq T$ *subgroup A is T-permutable. It has been established that any group Chevalley* $L_2(q)$, ${}^2B_2(q)$, ${}^2G_2(q)$, $U_3(q)$ *does't have hereditarily G-permutable subgroup.*