УДК 502.51:504.5:665.665.6/. 7

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ СЛОЯ НЕФТИ НА ПОВЕРХНОСТИ ВОДОТОКА С БОНОВЫМ ЗАГРАЖДЕНИЕМ

д-р техн. наук, проф. М.В. ЛУРЬЕ
(Российский государственный университет нефти и газа им. И.М. Губкина)
канд. техн. наук, доц. В.К. ЛИПСКИЙ, Д.П. КОМАРОВСКИЙ
(Полоцкий государственный университет)

На основе уравнения Навье - Стокса разработана аналитическая модель, позволяющая определить толщину слоя нефти вблизи бонового заграждения; объем нефти, удерживаемый боновым заграждением; минимально необходимую глубину погружения бонового заграждения и построить продольный профиль пятна. Получен критерий оценки нефтеудерживающей способности бонового заграждения.

Физическое описание задачи. Рассмотрим слой нефти плотностью $\rho_н$ и вязкостью $\mu_н$, находящийся на свободной поверхности потока воды и удерживаемый боновым заграждением (рис. 1). Боновое заграждение представляет собой плоскую вертикальную пластину, пересекающую свободную поверхность воды и обтекающую снизу потоком со скоростью υ.

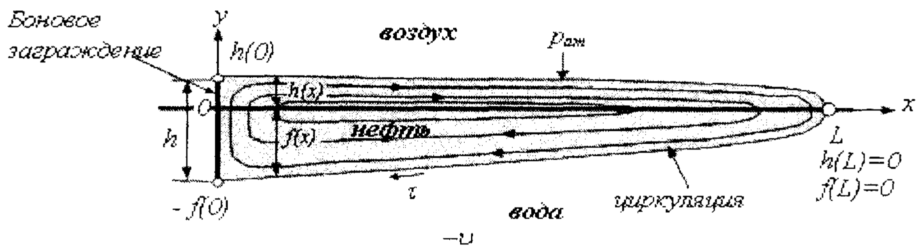

Рис. 1. Схема слоя нефти для разработки модели

Боновое заграждение оказывает препятствие свободному перемещению нефти под действием течения воды. В силу того, что нефть обладает вязкостью $\mu_н$, на границе раздела «нефть – вода» возникают касательные напряжения τ. Движущаяся снизу вода увлекает за собой частицы нефти, при этом перед боновым заграждением происходит увеличение толщины слоя нефти.

Примем следующие условия:

- движение нефти под боновое заграждение не происходит;
- давление по глубине слоя нефти подчиняется гидростатическому закону;
- объем нефти перед боном постоянный, т.е. отсутствуют новые поступления нефти.

Поскольку суммарный расход нефти через сечение пятна равен нулю, то количество нефти, поступающее к заграждению за счет ее подтягивания течением воды, равно количеству нефти, которое уходит в обратном направлении, т.е. в нефтяном слое происходит циркуляционное движение нефти.

Увеличение толщины слоя нефти у поверхности бона приводит к появлению возвратного градиента давления. Давление на свободной поверхности нефти равно атмосферному, а распределение давления по глубине слоя подчиняется гидростатическому закону. Отсюда приходим к заключению, что в точках, расположенных на одной горизонтали, давление будет увеличиваться (по мере приближения бону). Возникает градиент давления, направленный в сторону от бонового заграждения, под действием которого происходит движение нефти в верхней части нефтяного слоя.

Так как толщина слоя нефти достаточно мала, поэтому можно принять, что течение в основной части слоя имеет только горизонтальную составляющую скорости, зависящую от вертикальной координаты y.

Теоретическое решение. Запишем уравнение Навье – Стокса для движения слоя нефти в проекции на ось x [1]:

$$F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p_x}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 \upsilon_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \upsilon_x}{\partial y^2}\right) = \frac{d\upsilon_x}{dt},$$

где F_x – проекция массовой силы на ось x; $\dfrac{\partial p_x}{\partial x}$ – изменение давления вдоль оси x; $\dfrac{\partial^2 \upsilon_x}{\partial x^2}$ – величина, учитывающая линейную деформацию элементарного объема нефти; $\dfrac{\partial^2 \upsilon_x}{\partial y^2}$ – величина, учитывающая влияние касательных напряжений; $\dfrac{d\upsilon_x}{dt}$ – проекция ускорения на ось x.

Из всех массовых сил на частицу нефти действует сила тяжести, проекция которой на ось x равна нулю. Движение частицы нефти в нефтяном слое происходит с постоянной горизонтальной скоростью, следовательно, ускорение равно нулю, тогда $\dfrac{\partial^2 \upsilon_x}{\partial x^2} = 0$.

Так как распределение давления по глубине слоя нефти подчиняется гидростатическому закону, то избыточное давление в точке нефтяного слоя определяется как $p_{изб} = \rho_н \cdot g \cdot h'$, где h' – расстояние от свободной поверхности нефти до рассматриваемой точки и определяется как сумма $h + f$.

Учитывая вышесказанное, уравнение движения нефти в слое переменной толщины $-f(x) \le y \le h$ примет вид:

$$\frac{d^2\upsilon_x}{dy^2} = \frac{\rho_н \cdot g}{\mu_н} \cdot \frac{\partial (h+f)}{\partial x}, \qquad (1)$$

где υ_x – проекция скорости движения частицы нефти на ось x, м/с; $h(x)+f(x)$ – толщина нефтяного слоя на поверхности воды; $\rho_н$, $\mu_н$ – плотность и динамическая вязкость нефти; g – ускорение свободного падения; L – длина нефтяного пятна.

Интегрируя уравнение (1) по y, получаем

$$\frac{d\upsilon}{dy} = \frac{\rho_н g}{\mu_н} \frac{\partial (f+h)}{\partial x} \cdot (y-h) + c(x_1). \qquad (2)$$

Константа $c_1(x)$ зависит только от x, ее можно определить из граничного условия $\dfrac{du}{dy} = 0$ при $y = h$.

Тогда

$$c_1(x) = \frac{d\upsilon}{dy} - \frac{\rho_н g}{\mu_н} \frac{\partial (f+h)}{\partial x} \cdot (h-h) = 0 - 0 = 0, \text{ т.е. } c_1(x) = 0.$$

Проинтегрируем уравнение (2) по y:

$$\int_h^f \frac{d\upsilon}{dy} = \frac{\rho_н g}{\mu_н} \frac{\partial (f+h)}{\partial x} \cdot \int_h^f (y-h) \cdot dy = \frac{\rho_н g}{\mu_н} \frac{\partial (f+h)}{\partial x} \cdot \left(\int_h^f y dy - \int_h^f h dy \right).$$

Так как касательные напряжения на границе «нефть – воздух» равны нулю, то $\dfrac{d\upsilon}{dy} = 0$ при $y = h$, получаем

$$\upsilon(y) = \frac{\rho_н g}{\mu_н} \frac{\partial (f+h)}{\partial x} \cdot \left(\frac{y^2}{2} - hy \right) + c_2(x), \qquad (3)$$

где $c_2(x)$ – функция, зависящая только от x.

Используем граничное условие $\upsilon(-f) = -\upsilon$ на границе «нефть – вода»:

$$-\upsilon = \frac{g}{\nu_н} \frac{\partial (h+f)}{\partial x} \cdot \left(\frac{f^2}{2} + hf \right) + c_2(x),$$

где $\nu_н$ – кинематическая вязкость нефти.

С помощью этого условия можно исключить $c(x)$ из уравнения (3):

$$c_2(x) = -\upsilon - \frac{g}{\nu_н} \frac{\partial (h+f)}{\partial x} \cdot \left(\frac{f^2}{2} + hf \right),$$

тогда уравнение (3) можно записать

$$\upsilon(y)=\frac{g}{\nu_н}\frac{\partial(f+h)}{\partial x}\cdot\left(\frac{y^2}{2}-hy\right)-\upsilon-\frac{g}{\nu_н}\frac{\partial(h+f)}{\partial x}\cdot\left(\frac{f^2}{2}+hf\right)=\frac{g}{\nu_н}\frac{\partial(f+h)}{\partial x}\cdot\left(\frac{y^2}{2}-\frac{f^2}{2}-h(y+f)\right)-\upsilon. \quad (4)$$

Запишем уравнение неразрывности для слоя нефти. Расход Q нефти в слое должен равняться нулю, поэтому

$$Q=\int_{-f}^{h}\upsilon(y)dy=0\,.$$

Проинтегрируем записанное уравнение, где значение $\upsilon(y)$ примем из выражения (4).

Пусть постоянный множитель $\frac{g}{\nu_н}\frac{\partial(f+h)}{\partial(x)}=A$:

$$\int\upsilon(y)d(y)=A\int\left(\frac{y^2-f^2}{2}-hy-hf\right)dy-\int\upsilon dy=A\left(\frac{1}{2}\frac{y^3}{3}-\frac{f^2}{2}\cdot3y-h\cdot\frac{y^2 3}{2}-hfy\right)-\upsilon y=$$

$$=A\left[\frac{1}{6}y^3-\frac{f^2}{2}y-\frac{h}{2}y^2-hfy\right]-\upsilon y\;=A\left(\frac{1}{6}(h^3+f^3)-\frac{f^2}{2}(h+f)-\frac{h}{2}(h^2-f^2)-hf(h+f)\right)-$$

$$-\upsilon(h+f)=A\cdot\left[\frac{h^3}{6}+\frac{f^3}{6}-\frac{f^2h}{2}-\frac{f^3}{2}-\frac{h^3}{2}+\frac{f^2h}{2}-h^2f-hf^2\right]-\upsilon(h+f)=$$

$$=A\left[-\frac{2h^3}{6}-\frac{2f^3}{6}-h^2f-hf^2\right]-\upsilon(h+f)=A\left[-\frac{h^3}{3}-\frac{f^3}{3}-h^2f-hf^2\right]-$$

$$-\upsilon(h+f)=A\left[-\frac{1}{3}(h^3+f^3)-hf(h+f)\right]-\upsilon(h+f)=0.$$

Заменим $h(x)+f(x)$ через $H(x)$, получим

$$A\left(-\frac{1}{3}H(h^2-hf+f^2)-hfH\right)-\upsilon H=A\left(-\frac{Hh^2}{3}+\frac{Hhf}{3}-\frac{f^2H}{3}-hfH\right)-\upsilon H=$$

$$=A\left(-\frac{Hh^2}{3}-\frac{2hfH}{3}-\frac{f^2H}{3}\right)-\upsilon H=A\left(-\frac{H}{3}(h^2+2hf+f^2)\right)-\upsilon H=$$

$$=A\left(-\frac{H}{3}(h+f)^2\right)-\upsilon H=-A\frac{H}{3}(h+f)^2-\upsilon H=-A\frac{H^3}{3}-\upsilon H=0.$$

Раскроем A:

$$Q=-\frac{g}{\nu_н}\cdot\frac{dH}{dx}\cdot\frac{H^3}{3}-\upsilon H=0\,,$$

откуда находим

$$\frac{dH}{dx}=-\frac{3\upsilon\nu_н}{gH^2}\,.$$

Проинтегрировав полученное уравнение по dx, получим

$$\int-\frac{3\upsilon\nu_н}{g}dx=\int H^2dH,$$

$$-\frac{3\upsilon\nu_н}{g}x+c=\frac{H^3}{3},$$

$$-\frac{9\upsilon\nu_н}{g}\cdot x+c=H^3, \quad (5)$$

где c – постоянная интегрирования.

Из (5) находим H:

$$H = \sqrt[3]{-\frac{9\upsilon\nu_н}{g}x + c}\,. \tag{6}$$

Постоянную интегрирования c найдем из граничного условия $H(L) = 0$:

$$0 = \sqrt[3]{-\frac{9\upsilon\nu_н}{g}L + c}, \text{ откуда } c = \frac{9\upsilon\nu_н}{g}L\,.$$

Подставив значение c в формулу (6) и вынеся общий множитель за скобки, получим выражение для толщины слоя нефти в сечении, отстоящем от поверхности пластины на расстоянии x:

$$H(x) = \sqrt[3]{\frac{9\nu_н \cdot \upsilon}{g} \cdot (L - x)}\,, \tag{7}$$

вблизи пластины, при $x = 0$ и $H(0) = H_0$, толщина слоя нефти определится по формуле:

$$H_0 = \sqrt[3]{\frac{9\nu_н \cdot \upsilon L}{g}}\,.$$

В рассматриваемом случае толщина слоя нефти H_0 равна глубине погружения бонового заграждения (см. рис. 1), тогда H_0 можно рассматривать как глубину погружения бонового заграждения h:

$$h = \sqrt[3]{\frac{9 \cdot \nu_н \cdot \upsilon \cdot L}{g}}\,. \tag{8}$$

Проинтегрировав выражение (7) по длине нефтяного пятна в пределах $0 \le x \le L$, получим формулу для определения объема нефти перед боновым заграждением:

$$V_н = B_п \int_0^L \sqrt[3]{\frac{9 \cdot \nu_н \cdot \upsilon}{g} \cdot (L - x)}dx = \frac{3 \cdot B_п}{4} L \cdot \sqrt[3]{\frac{9\nu_н \cdot \upsilon \cdot L}{g}}\,, \tag{9}$$

где $B_п$ – ширина нефтяного пятна.

Из выражения (8) выразим длину нефтяного пятна:

$$L = \frac{h^3 \cdot g}{9 \cdot \nu_н \cdot \upsilon}\,. \tag{10}$$

Перепишем (9) в следующем виде, заменив выражение, стоящее под знаком радикала по формуле (8), а длину L выразив по (10):

$$V_н = \frac{3 \cdot B_п}{4} \cdot \frac{h^3 \cdot g}{9 \cdot \nu_н \cdot \upsilon} \cdot h\,.$$

Выразим из полученного выражения h:

$$h = \sqrt[4]{\frac{12 \cdot V_н \cdot \nu_н \cdot \upsilon}{B_н \cdot g}}\,. \tag{11}$$

Формула (11) позволяет определить осадку бонового заграждения, если известна скорость потока υ, объем $V_н$ нефти, ее вязкость $\nu_н$ и ширина нефтяного пятна $B_п$.

Можно рассчитать глубину $f_0 = f(0)$ подводной части бонового заграждения. Для этого запишем равенство давлений в нижней точке заграждения со стороны нефти и воды (см. рис. 1):

$$\rho_н \cdot (h_0 + f_0) = \rho_в \cdot f_0\,,$$

откуда

$$h_0 = f_0 \cdot (\rho_в - \rho_н) / \rho_н\,.$$

Так как

$$h_0 + f_0 = \sqrt[3]{\frac{9 \cdot \nu \cdot \upsilon \cdot L}{g}},$$

то

$$f_0 = \frac{\rho_н}{\rho_в} \sqrt[3]{\frac{9 \cdot \nu \cdot \upsilon \cdot L}{g}}.$$

Применяя полученные выражения, можно построить продольный профиль слоя нефти. Толщина слоя нефти в каждом сечении слагается из толщины над свободной поверхностью воды *h(x)* и толщины под свободной поверхностью воды *f(x)* (см. рис. 1):

$$f(x) = \frac{\rho_н}{\rho_в} \cdot \sqrt[3]{\frac{9 \cdot \nu \cdot \upsilon}{g} \cdot (L - x)}; \quad h(x) = f(x) \cdot \frac{(\rho_в - \rho_н)}{\rho_н}.$$

Рассмотрим пример. Длина нефтяного пятна L = 10 м, вязкость нефти $\nu_н = 25 \cdot 10^{-6}\, м^2/с$, скорость течения υ = 1 м/с, плотность нефти $\rho_н$= 900 кг/м^3, плотность воды $\rho_в$ = 1000 кг/м^3, тогда поперечный профиль пятна будет иметь вид (рис. 2).

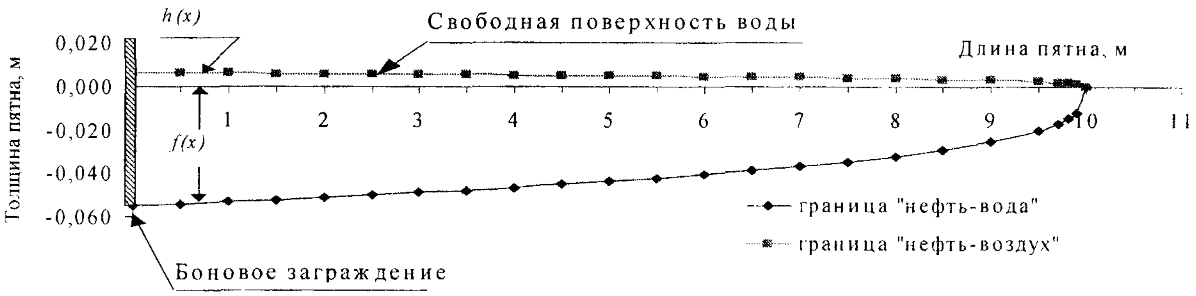

Рис. 2. Продольный профиль слоя нефти

Экспериментальная проверка. Для проверки полученного аналитического выражения (11) была проведена серия экспериментов. Экспериментальные исследования проводились на лабораторной установке, основной частью которой является гидродинамический лоток. В качестве бонового заграждения в экспериментах использовалась плоская вертикальная пластина, погруженная по всей ширине потока на определённую глубину перпендикулярно течению [2, 3].

Сравнение результатов экспериментов с результатами расчета по выражению (11) представлено графически на рис. 3. Средняя относительная погрешность составляет 2,27 %.

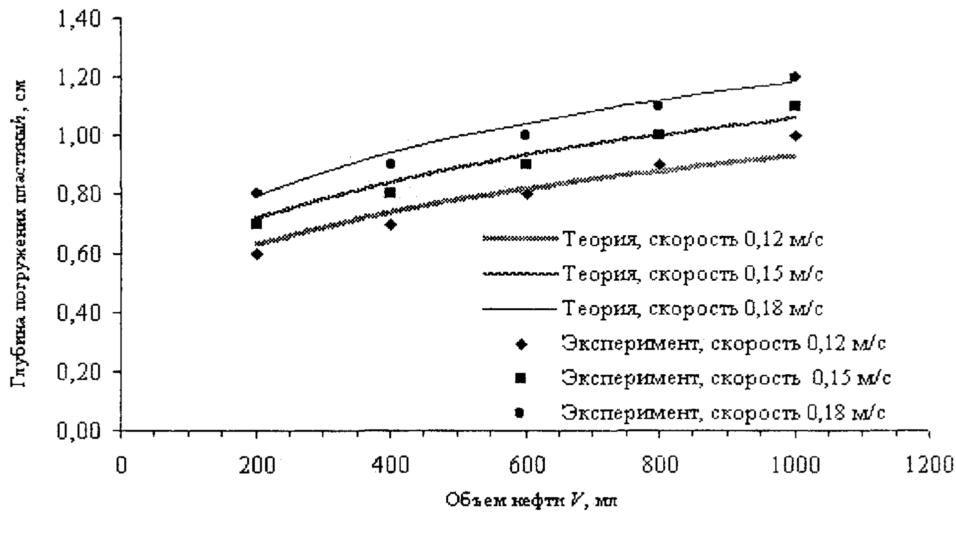

Рис. 3. Сравнение теоретических результатов с результатами экспериментов

Критерий нефтеудерживающей способности бонового заграждения. Представим полученное выражение (11) для глубины погружения бона h в безразмерном виде:

$$1 = \sqrt[4]{\frac{12 \cdot \nu_н \cdot \upsilon^2 \cdot V}{B_n \cdot h \cdot h \cdot h^2 \cdot \upsilon \cdot g}} = \sqrt[4]{\frac{12 \cdot Fr \cdot V}{\mathrm{Re} \cdot B_n \cdot h^2}} \Rightarrow 1 = \frac{12 \cdot Fr \cdot \bar{V}}{\mathrm{Re}}, \tag{12}$$

где $\bar{V} = \frac{V}{B_n \cdot h_{кр}^2}$ – представляет собой безразмерный объем; $Fr = \frac{\upsilon^2}{g \cdot h_{кр}}$ – число Фруда; $\mathrm{Re} = \frac{\upsilon \cdot h_{кр}}{\nu_н}$ – число Рейнольдса.

Выражение (12) можно записать как

$$K = \frac{Fr \cdot \bar{V}}{\mathrm{Re}} = \frac{1}{12} = 0,083. \tag{13}$$

Тогда равновесное состояние нефтяного пятна, удерживаемого боновым заграждением, описывается условием $K = 0{,}083$. Таким образом, безразмерный параметр (13) служит критерием, показывающим, удерживается ли нефтяное пятно боновым заграждением или нет.

Если $K \le 0{,}083$, боновое заграждение удерживает нефтяное пятно, если $K > 0{,}083$, то эффективность заграждения снижается и начинает наблюдаться унос нефти.

Полученный критерий (13) можно интерпретировать графически (рис. 4), в зависимости числа Fr от соотношения $\mathrm{Re}/\bar{V}$ [4].

В этом случае зависимость будет иметь линейный характер, а уравнение линии примет вид:

$$Fr = 0,083 \cdot \frac{\mathrm{Re}}{\bar{V}}. \tag{14}$$

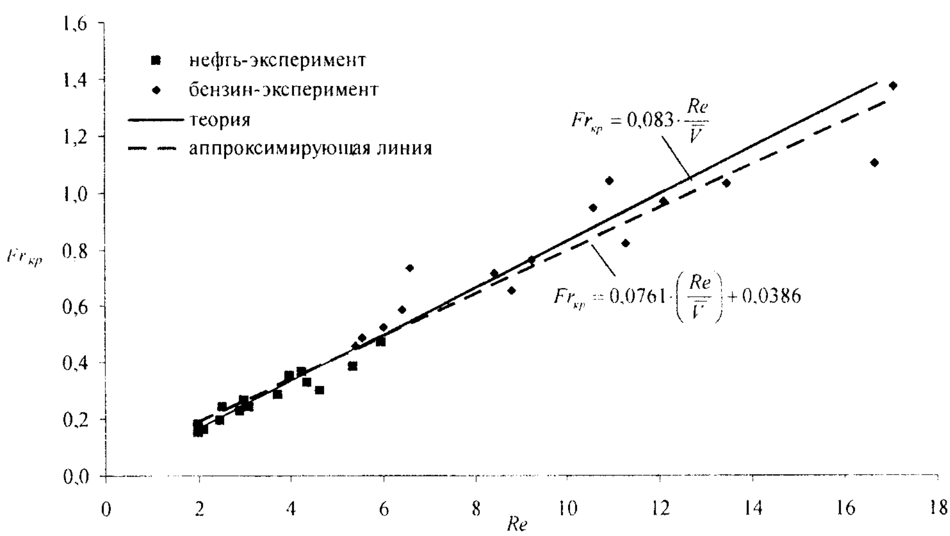

Рис. 4. График зависимости числа Fr от $\frac{\mathrm{Re}}{\bar{V}}$

На рис. 4 теоретическая линия - это критическая линия, область над линией - область уноса нефти, область под линией - область отсутствия уноса нефти.

Как видно из рис. 4, теоретическая прямая хорошо описывает экспериментальные точки, коэффициент корреляции равен 0,98.

Выводы

1. Получена аналитическая зависимость (7) позволяющая определить:
   - толщину слоя нефти вблизи бонового заграждения;
   - объем нефти, удерживаемый боновым заграждением;
   - минимально необходимую глубину погружения бонового заграждения;
   - позволяющая построить продольный профиль пятна.
2. Получен критерий оценки нефтеудерживающей способности бонового заграждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Штеренлихт Д.В. Гидравлика: Учебник для вузов. - М.: Энергоатомиздат, 1984. - 640 с.
2. Комаровский Д.П., Стеняева Ю.В. Экспериментальная установка для исследования моделей боновых заграждений // Безопасность и надежность трубопроводного транспорта. Сб. науч. тр. - Новополоцк: ПГУ, 2002. Вып. 2. - С. 159 - 172.
3. Комаровский Д.П., Липский В.К. Взаимодействие нефтяного пятна на поверхности водотока с боновым заграждением // Природные ресурсы. - 2002. -№ 4. - С. 113-116.
4. Комаровский Д.П., Липский В.К., Лурье М.В. Взаимодействие слоя нефти на поверхности потока с боновым заграждением // Вестник Полоцкого гос. ун-та. Сер. С. Фундаментальные науки. - 2002. - Т. 1, № 2. - С. 28 - 34.