УДК 517:531.112

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РАСЧЕТА КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ИСПОЛНИТЕЛЬНЫХ МЕХАНИЗМОВ

д-р техн. наук, проф. А.В. ЛОКТИОНОВ, А.В. ГУСАКОВ
(Витебский государственный технологический университет)

Представлены теоретические основы расчета кинематических параметров пространственных исполнительных механизмов. Получены аналитические зависимости для расчёта скорости и ускорения центра схвата роботов-манипуляторов с тремя степенями подвижности координатным, векторным и матричными методами. Установлено, что матричный метод расчета применим к пространственным многозвенным исполнительным механизмам.

В процессе перемещения деталей машин и технологической оснастки используются промышленные роботы, которые должны выполнять свои функции абсолютно точно. При этом траектория движения схвата робота и его скорость определяются технологическим процессом. Роботы классифицируют по различным признакам: по системе основных координатных перемещений, числу степеней подвижности, конструктивному исполнению, типу силового привода, характеру выполняемых операций, степени специализации, области применения, грузоподъемности, мобильности и по схеме расположения приводов. Для расчета перемещений центра схвата робота используются плоская прямоугольная, пространственная прямоугольная, плоская полярная, цилиндрическая, сферическая, ангулярная цилиндрическая и ангулярная сферическая системы координат [1]. От выбора системы координат зависит методика расчета кинематических параметров роботов [2]. При этом траектория движения схвата и его скорость определяются технологическим процессом.

На рис. 1 представлены схемы роботов, работающих: в пространственной прямоугольной системе координат; цилиндрической системе координат; сферической системе координат; в ангулярной (угловой) системе координат.

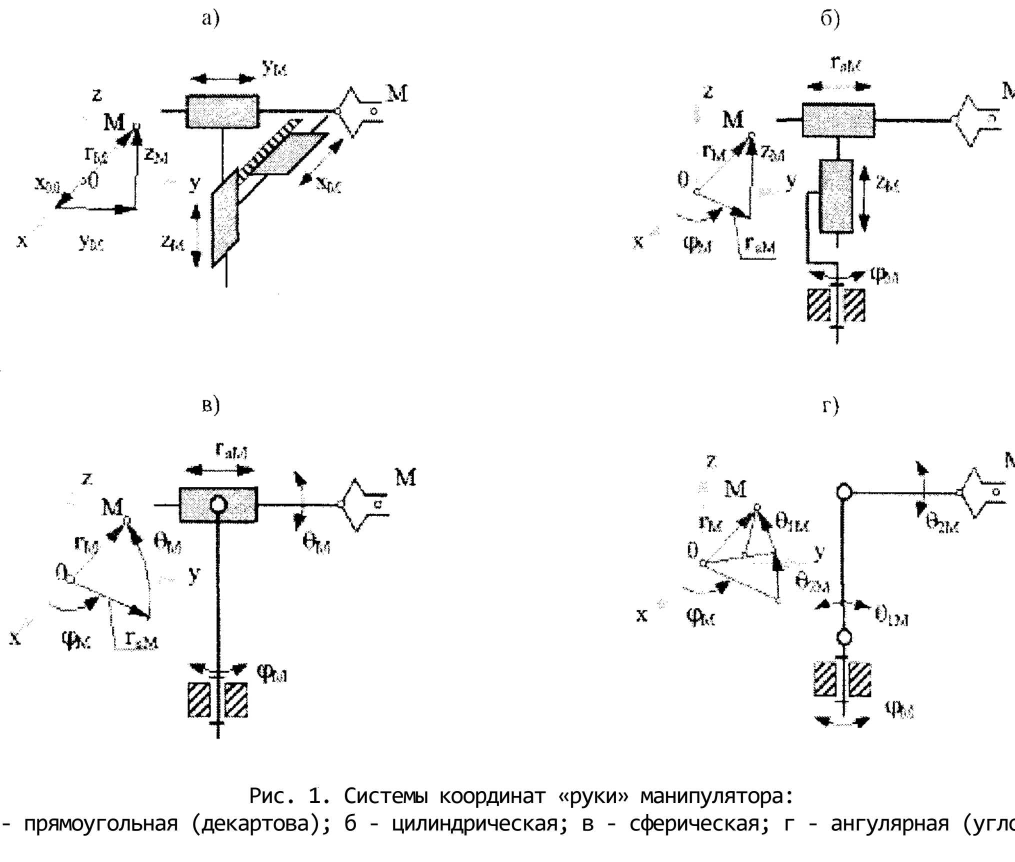

Рис. 1. Системы координат «руки» манипулятора:
а - прямоугольная (декартова); б - цилиндрическая; в - сферическая; г - ангулярная (угловая)

Проецируя векторные уравнения на оси координат, получим систему шести алгебраических уравнений, откуда определим шесть неизвестных

$$F_{x(n,n-1)}, F_{y(n,n-1)}, F_{z(n,n-1)}, M_{x(n,n-1)}, M_{y(n,n-1)}, M_{z(n,n-1)} = M_{o(n,n-1)}.$$

Исполнительный механизм роботов-манипуляторов рассматривают как систему материальных тел (звеньев), предполагая, что эти тела абсолютно твердые. Каждое такое тело может состоять из совокупности многих деталей, признаком принадлежности которых к одному звену является их относительная неподвижность в процессе движения. Звенья манипулятора образуют кинематические пары, т.е. такие соединения двух соприкасающих звеньев, которые допускают их относительные перемещения [3].

Существуют различные методы расчетов геометрических, кинематических и силовых параметров исполнительных механизмов роботов-манипуляторов. Анализом установлено, что наиболее простые методы расчета следует использовать для роботов, работающих в плоских системах координат. Векторный метод расчета следует применять для роботов-манипуляторов, звенья которых расположены в одной плоскости [3, 4]. В работах [5, 6] скорость $\vec{v}$ и ускорение $\vec{a}$ в сферической системе координат определяются как частный случай их расчёта в ортогональных криволинейных координатах. Для расчёта скорости определяются частные производные от декартовых координат x, y, z точки по соответствующим криволинейным скоростям q_1, q_2, q_3 и находятся коэффициенты Ляме H_1, H_2, H_3. Модуль скорости v точки определяется из выражения $v^2 = \dot{q}_1^2 H_1^2 + \dot{q}_2 H_2^2 + \dot{q}_3 H_3^2$. Для расчёта ускорения также используются коэффициенты Ляме, определяются соответственно частные производные от квадрата скорости по обобщённым криволинейным скоростям $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3$ и координатам q_1, q_2, q_3 и полные производные по времени от полученных соответствующих разностей частных производных по $\dot{q}$ и q. Такая методика расчёта кинематических параметров достаточно трудоёмка. Искомые $\vec{v}$ и $\vec{a}$ определяются только в проекциях на подвижные сферические оси координат R, φ, Θ, связанные с движущейся точкой M. В работах [7, 8] скорость $\vec{v}$ и ускорение $\vec{a}$ получены с использованием векторного анализа. Матричное исчисление использовано в работе [7] для преобразования от прямоугольной и цилиндрической к сферической системе координат.

Рассмотрим матричный метод расчета. При атом движение твердого тела рассматривается как движение подвижного трехмерного пространства в неподвижном. Геометрические и кинематические параметры робота можно представить в виде параллельного переноса и поворота. Матрица поворота в случае, например, сферического движения твердого тела равна произведению трех матриц поворота на углы Эйлера [8]. В случае поступательного движения абсолютно твердого тела матрица поворота является единичной. Скорость точек находится в результате дифференцирования текущих координат центра схвата. При этом векторы угловой скорости и мгновенной угловой скорости вводятся как действие кососимметричной матрицы. Преимущества предлагаемого способа заключаются в следующем: все виды движений изучаются с единой точки зрения; вектор угловой скорости вводится не формальным способом, а как соответствие пространства кососимметричных матриц подвижному пространству; легко выполняется переход от движения твердого тела к движению системы с конечным числом степеней свободы.

Чтобы установить необходимые кинематические соотношения исполнительных систем пространственного робота-манипулятора, необходимо описать положение каждого звена манипулятора как в абсолютной системе координат, так и в системе координат, неизменно связанной с этим звеном. Поэтому необходимо ввести систему координат, связанную со стойкой манипулятора, применяемую в качестве абсолютной ($O_0x_0y_0z_0$) и систему координат, неизменно связанную с i-тым подвижным звеном ($O_ix_iy_iz_i$). При этом ось z_i ($i = 1, 2, \ldots, n + 1$) совпадает с осью кинематической пары с тем же номером (n – число звеньев манипулятора), ось x_i определяется как общий перпендикуляр к осям z_{i-1} и z_i, а её направление выбирается так, чтобы система $O_ix_iy_iz_i$ была правой. Начало O_i полученной ортогональной системы координат называется центром i-той кинематической пары. Система координат $O_nx_ny_nz_n$ связывается со схватом манипулятора так, что ось z_n определяет ориентацию схвата [7, 8].

В качестве обобщенных координат, однозначно определяющих положение пространственного исполнительного механизма робота-манипулятора в произвольный момент времени, необходимы координаты: θ_i – углы поворотов i-того звена относительно ($i - 1$). Причем индекс у координаты θ_i соответствует ($i - 1$) кинематической паре, так как соответствующая угловая скорость $\dot{\theta}_i$ имеет направление оси z_{i-1}. По известному начальному положению механизма и значению обобщенных координат θ_i определится положение механизма. Последовательно, начиная с n-ного звена, выполняется поворот относительно осей $\theta_i z_i$ и аналитически устанавливается связь между введенными ранее системами координат. Для этого вводятся матрицы поворота систем координат. Такой метод расчета является наиболее универсальным для большинства исполнительных механизмов роботов-манипуляторов. Установлено, что аналитические зависимости для расчета кинематических параметров роботов в абсолютной, неподвижной системе координат громоздки и сложны для ручного счета [4, 5, 6].

Аналитические исследования по расчету кинематических параметров точки M (центра схвата) применительно к роботу-манипулятору с тремя степенями подвижности матричным методом выполнены для случая, когда она совпадает с началом координат $X_5\ Y_5\ Z_5$ [7]. В общем случае координаты X_5, Y_5, $Z_5 \neq 0$. Матричный метод изложен также в работе [8] при расчёте кинематических параметров механизма в цилиндрических координатах.

Установлено, что матричным методом расчета можно получить формулы для скорости и ускорения центра схвата не только в неподвижной системе координат, но и в подвижной системе, связанной с центром схвата, которые значительно проще, чем зависимости в неподвижной системе координат.

Рассмотрим расчёт кинематических параметров трехзвенного робота-манипулятора с тремя степенями подвижности при координатном способе задания движения (рис. 2).

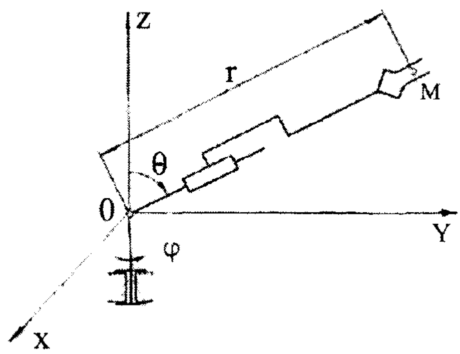

Рис. 2. Кинематическая схема робота-манипулятора с тремя степенями подвижности

Вертикальная колонна (см. рис. 2), несущая руку робота-манипулятора, может поворачиваться на угол φ. Рука со схватом поворачивается на угол θ и выдвигается на расстояние r. Найти скорость и ускорение центра схвата (точки M) [8, 9].

Выразим декартовы координаты центра схвата через его сферические координаты как функции времени t: $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$.

Тогда проекции скорости центра схвата на оси X, Y, Z определятся из выражений:

$$V_x = \dot{x} = \dot{r}\cdot\sin\theta\cdot\cos\varphi + r\cdot\dot{\theta}\cdot\cos\theta\cdot\cos\varphi - r\cdot\dot{\varphi}\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi,$$

$$V_y = \dot{y} = \dot{r}\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi + r\cdot\dot{\theta}\cdot\cos\theta\sin\varphi + r\cdot\dot{\varphi}\cdot\sin\theta\cdot\cos\varphi,$$

$$V_z = \dot{z} = \dot{r}\cdot\cos\theta - r\cdot\dot{\theta}\cdot\sin\theta.$$

Формула для расчета скорости центра схвата будет иметь вид:

$$V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\cdot\dot{\varphi}^2}.$$

Проекции ускорения центра схвата, точки M на декартовы оси координат определяются как производные по времени от проекций скорости:

$$a_x = \ddot{x} = \ddot{r}\cdot\sin\theta\cdot\cos\varphi + 2\dot{r}\cdot\dot{\theta}\cdot\cos\theta\cdot\cos\varphi - 2\dot{r}\cdot\dot{\varphi}\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi - r\cdot\dot{\theta}^2\cdot\sin\theta\cos\varphi + r\cdot\ddot{\theta}\cdot\cos\theta\cdot\cos\varphi -$$
$$-2r\cdot\dot{\theta}\cdot\dot{\varphi}\cdot\cos\theta\cdot\sin\varphi - r\cdot\dot{\varphi}^2\cdot\sin\theta\cdot\cos\varphi - r\cdot\ddot{\varphi}\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi;$$

$$a_y = \ddot{y} = \ddot{r}\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi + 2\dot{r}\cdot\dot{\theta}\cdot\cos\theta\cdot\sin\varphi + 2\dot{r}\cdot\dot{\varphi}\cdot\sin\theta\cdot\cos\varphi - r\cdot\dot{\theta}^2\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi + r\cdot\ddot{\theta}\cdot\cos\theta\cdot\sin\varphi +$$
$$+2r\cdot\dot{\theta}\cdot\dot{\varphi}\cdot\cos\theta\cdot\cos\varphi - r\cdot\dot{\varphi}^2\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi - r\cdot\ddot{\varphi}\cdot\sin\theta\cdot\cos\varphi;$$

$$a_z = \ddot{z} = \ddot{r}\cdot\cos\theta - 2\dot{r}\cdot\dot{\theta}\cdot\sin\theta - r\cdot\dot{\theta}^2\cdot\sin\theta - r\cdot\ddot{\theta}\cdot\sin\theta.$$

Модуль ускорения центра схвата в рассматриваемом случае оределяется из выражения:

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} = [\left(\ddot{r} - r\cdot\dot{\theta}^2 - r^2\cdot\dot{\varphi}^2\cdot\sin^2\theta\right)^2 + \left(r\cdot\ddot{\theta} + 2\dot{r}\cdot\dot{\theta} - r\cdot\dot{\varphi}^2\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta\right)^2 +$$
$$+\left(r\cdot\ddot{\varphi}\cdot\sin\theta + 2\dot{r}\cdot\dot{\varphi}\cdot\sin\theta + 2r\cdot\dot{\varphi}\cdot\dot{\theta}\cdot\cos\theta\right)^2]^{1/2}.$$

Для сравнения рассмотрим схему робота-манипулятора в виде вертикальной колонны и руки робота-манипулятора, которая поворачивается на угол φ. Расчётная (кинематическая) схема такого робота-манипулятора с тремя степенями подвижности показана на рис. 3.

Рука со схватом состоит из двух звеньев, каждый из которых может поворачиваться на свой угол: первое звено – на угол θ_1; второе – на угол θ_2. Необходимо найти скорость и ускорение центра схвата при заданном законе движения φ(t), $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$ [9, 10].

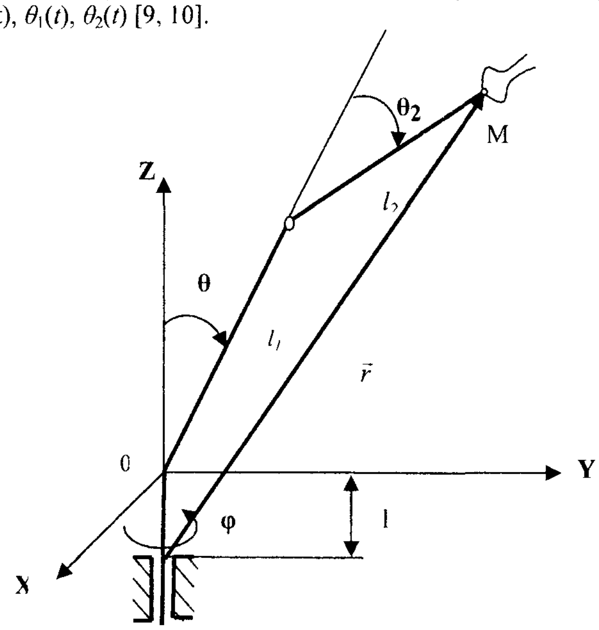

Рис. 3. Кинематическая схема робота-манипулятора с тремя степенями подвижности

При расчете кинематических параметров механизма по рис. 3 векторным методом проекции вектора $\vec{r}$ механизма на координатные оси определяются из выражений:

$$x = \left[l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin(\theta_1+\theta_2)\right]\cos\varphi,\ y = \left[l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin(\theta_1+\theta_2)\right]\sin\varphi,\ z = l + l_1\cos\theta_1 + l_2\cos(\theta_1+\theta_2).$$

Тогда проекции вектора скорости на оси имеют вид:

$$\dot{x} = -\left[l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin(\theta_1+\theta_2)\right]\dot{\varphi}\cdot\sin\varphi + \left[l_1\cdot\dot{\theta}_1\cdot\cos\theta_1 + l_2\cdot\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)\cdot\cos(\theta_1+\theta_2)\right]\cos\varphi,$$

$$\dot{y} = \left[l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin(\theta_1+\theta_2)\right]\dot{\varphi}\cdot\cos\varphi + \left[l_1\cdot\dot{\theta}_1\cdot\cos\theta_1 + l_2\cdot\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)\cdot\cos(\theta_1+\theta_2)\right]\sin\varphi,$$

$$\dot{z} = -l_1\cdot\dot{\theta}_1\cdot\sin\theta_1 - l_2\cdot\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)\cdot\sin(\theta_1+\theta_2).$$

Величина абсолютной скорости определится по формуле $v=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}$. С учетом приведенных выше выражений получим

$$v = \left[l_1^2\theta_1^2 + l_2^2\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)^2 + 2l_1l_2\theta_1\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)\cos\theta_2 + \left(l_1\sin\theta_1 + l_2\sin(\theta_1+\theta_2)\right)^2\dot{\varphi}^2\right]^{1/2}.$$

Дифференцируя предыдущие выражения, определим проекции ускорения схвата на неподвижные оси XYZ, которые имеют вид:

$$\ddot{x} = -\left[l_1\sin\theta_1 + l_2\sin(\theta_1+\theta_2)\right]\left(\ddot{\varphi}\cdot\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cdot\cos\varphi\right) - 2\left[l_1\cdot\dot{\theta}_1\cdot\cos\theta_1 + l_2\cdot\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)\cdot\cos(\theta_1+\theta_2)\right]\dot{\varphi}\cdot\sin\varphi$$
$$+\left[l_1\cdot\ddot{\theta}_1\cdot\cos\theta_1 - l_1\cdot\dot{\theta}_1^2\cdot\sin\theta_1 + l_2\cdot\left(\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2\right)\cdot\cos(\theta_1+\theta_2) - l_2\cdot\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)^2\cdot\sin(\theta_1+\theta_2)\right]\cos\varphi,$$

$$\ddot{y} = \left[l_1\sin\theta_1 + l_2\sin(\theta_1+\theta_2)\right]\left(\ddot{\varphi}\cdot\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\cdot\sin\varphi\right) + 2\left[l_1\cdot\dot{\theta}_1\cdot\cos\theta_1 + l_2\cdot\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)\cdot\cos(\theta_1+\theta_2)\right]\dot{\varphi}\cdot\cos\varphi$$
$$+\left[l_1\cdot\ddot{\theta}_1\cdot\cos\theta_1 - l_1\cdot\dot{\theta}_1^2\cdot\sin\theta_1 + l_2\cdot\left(\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2\right)\cdot\cos(\theta_1+\theta_2) - l_2\cdot\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)^2\cdot\sin(\theta_1+\theta_2)\right]\sin\varphi,$$

$$\ddot{z} = -l_1\cdot\ddot{\theta}_1\cdot\sin\theta_1 - l_1\cdot\dot{\theta}_1^2\cdot\cos\theta_1 - l_2\cdot\left(\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2\right)\cdot\sin(\theta_1+\theta_2) - l_2\cdot\left(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\right)^2\cdot\cos(\theta_1+\theta_2).$$

Абсолютное ускорение определится по формуле $a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$ (в данной статье не приводится).

Расчет кинематических параметров механизма (см. рис. 3) матричным методом рассмотрен в работе [10]. Установлено что, векторный метод расчета кинематических параметров исполнительных механизмов следует использовать для роботов, звенья которых расположены в одной плоскости. Такой метод расчета достаточно сложен и неприменим для многозвенных пространственных схем размещения звеньев роботов-манипуляторов. К последним применим матричный метод расчета кинематических параметров.

При силовом расчете манипуляторов рассматриваются задачи по расчету внешних силовых управляющих воздействий, обеспечивающих требуемый закон движения механизма, и расчету реакций в кинематических парах [11]. Первую часть расчета часто называют задачей синтеза управления. При этом обычно применяется основанный на принципе Даламбера метод кинетостатики. По этому методу к внешним силам и моментам, приложенным к звеньям механизма, добавляются расчетные силы инерции, которые обеспечивают силовую уравновешенность системы и позволяют рассматривать подвижную систему в квазистатическом равновесии, т.е. как условно неподвижную [11, 12, 13].

Силовой расчет выполняется с учетом кинематического расчета и известных инерционных характеристиках звеньев: масс звеньев m_i и их моментов инерции I_{si} при заданной полезной нагрузке $\vec{F}_n$; известных законов движения звеньев $\vec{a}_{si}$ (ускорение центра масс i-того звена) и $\vec{\varepsilon}_i$ (угловое ускорение i-того звена). Для каждого из звеньев механизма определяются главные векторы $\vec{F}_{ui} = -m \cdot \vec{a}_{si}$ и главные моменты $\vec{M}_{ui} = -I_{si} \cdot \vec{\varepsilon}_i$ сил инерции. Для кинематической цепи решение начинается с выходного звена – схвата. Связь звена n со звеном $n-1$ заменяются реакциями $\vec{M}_{n,n-1}$ и $\vec{F}_{n,n-1}$, составляются кинетостатические векторные уравнения равновесия сил и моментов для звена n (схвата робота) [14, 15].

На рис. 4 представлена расчетная схема для силового анализа звена n (схвата робота), где $\vec{G}_O$ – вес груза; $\vec{F}_{uo}$ – сила инерции груза; S_n – центр масс n-ного звена.

Проецируя векторные уравнения на оси координат, получим систему шести алгебраических уравнений, откуда определим шесть неизвестных:

$$F_{x(n,n-1)}, F_{y(n,n-1)}, F_{z(n,n-1)}, M_{x(n,n-1)}, M_{y(n,n-1)}, M_{z(n,n-1)} = M_{o(n,n-1)}.$$

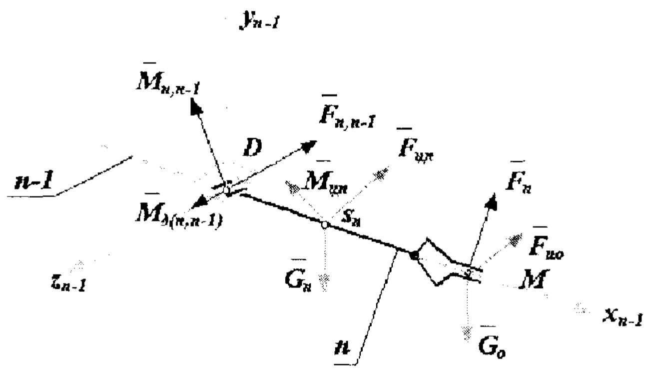

Рис. 4. Расчетная схема для силового анализа звена n (схвата робота)

Далее рассматривается равновесие звена n - 1. При этом в присоединения к звену n прикладываются реакции со стороны звена n, равные по величине и противоположные по направлению реакциям, определенным на предыдущем этапе расчета. Так последовательно составляются уравнения силового равновесия его для всех n звеньев механизма. Из решения полученной системы $6n$ уравнений определяются реакции и моменты в кинематических парах. При этом используются полученные при кинематическом анализе ускорения центра схвата и центра масс звена, для которого определяются силовые характеристики.

Целесообразно с использованием компьютерных технологий классифицировать кинематические схемы роботов [1], разработать теоретические основы расчета кинематических и динамических параметров различных по конструктивному исполнению пространственных исполнительных механизмов и методику расчета их кинематических параметров матричным методом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Козырев Ю.Г. Промышленные роботы: Справочник. - М.: Машиностроение, 1989. - 392 с.
2. Локтионов А.В., Гусаков А.В. Анализ методов расчета кинематических параметров пространственных исполнительных механизмов. Теоретическая и прикладная механика: Межведомств. сб. науч.-метод. ст. - Мн.: Технопринт, 2004. - № 18. - С. 75 - 78.
3. Фролов К.В., Воробьев Е.И. Механика промышленных роботов. Ч. 1. Кинематика и динамика. - М.: Высшая школа, 1988. - 304 с.
4. Локтионов А.В., Гусаков А.В. Оценка методов расчета кинематических параметров исполнительного механизма // Современные методы проектирования машин: Республ. межведомств. сб. науч. тр. Вып. 2: В 7 т. Т. 2. Качество изделий машиностроения. Проектирование материалов и конструкций / Под общ. ред. П.А. Витязя. - М.: Технопринт, 2004. - С. 132 - 136.
5. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. Т. I. - М.: Наука, 1970. - 240 с.
6. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. Ч. 1. - М.: Наука, 1972. - 468 с.
7. Локтионов А.В. Расчет кинематических параметров в сферических координатах матричным методом // Теоретическая и прикладная механика: Межведомств, сб. науч.-метод, ст. - Мн.: Технопринт, 2004. - С. 115-118.
8. Локтионов А.В. К вопросу расчета кинематических параметров в цилиндрических координатах // Теоретическая и прикладная механика: Сб. науч. тр. / Под ред. И.П. Филонова. - Мн.: Технопринт, 2002. - 252 с.
9. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. Т. 1. Статика и кинематика. - М.: Наука, 1990. - 672 с.
10. Локтионов А.В., Гусаков А.В. Расчет кинематических параметров двухзвенного механизма с тремя степенями подвижности // Вестник Полоцкого гос. ун-та. Сер. Фундаментальные науки. - 2004. - №4. - С. 99 - 102.
11. Халфман Р.Л. Динамика. - М.: Наука, 1972. - 568 с.
12. Федута А.А., Чигарев А.В., Чигарев Ю.В. Теоретическая механика и методы математики. - Мн.: Технопринт, 2000. - 504 с.
13. Попов Е.П., Верещагин А.Ф., Зенкевич С.Л. Манипуляционные роботы. Динамика и алгоритмы. - М.: Наука, 1978. - 400 с.
14. Пол Р. Моделирование, планирование траекторий и управление движением робота-манипулятора. - М.: Наука, 1976. - 104 с.
15. Воробьев Е.И., Егоров О.Д., Попов С.А. Механика промышленных роботов. Ч. 2. Расчет и проектирование механизмов. - М.: Высшая школа, 1988. - 304 с.