УДК 528. 063

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ПРИМЕНЕНИЯ ЧИСЕЛ ОБУСЛОВЛЕННОСТИ В ГЕОДЕЗИИ

д-р техн. наук, доц. В.И. МИЦКЕВИЧ, П.Ф. ПАРАДНЯ,
А.А. ТКАЧЕВ, канд. техн. наук Л.А. ЧЕРКАС
(Полоцкий государственный университет)

Рассматриваются вопросы использования чисел обусловленности для оценки качества геодезических построений. Приводятся результаты сравнительного анализа величин чисел обусловленности и коэффициентов, характеризующих качество построения, для нескольких видов смоделированных геодезических сетей.

Как отмечалось в работах [1,2, 3], числа обусловленности характеризуют устойчивость решения систем нормальных уравнений, возникающих при уравнивании геодезических сетей.

В работах [4, 5] предложено применять числа обусловленности для оценки качества построения геодезических сетей. Для этих целей используют формулу

$$\psi_1 = \frac{C_P}{0{,}6K^{2.5}}, \tag{1}$$

где $C_P = \|R\|_E \cdot \|Q\|_E$; $R = A^T PA$; $Q = R^{-1}$; применяют евклидову норму от матриц R и Q (для системы нормальных уравнений, возникающей при уравнивании геодезических сетей параметрическим способом). В знаменателе формулы (1) применяются эмпирические коэффициенты $\alpha = 0{,}6$ и $\beta = 2{,}5$; K – количество определяемых пунктов в исследуемой геодезической сети.

Вместо формулы (1) в [6] предложено применять формулу, отличную от (1):

$$\psi_2 = \frac{C_P}{C_{P_{л\,у57}}}, \tag{2}$$

в знаменателе которой применяют число обусловленности C_P для линейно-угловой сети со связующими углами 57°, которое выбирают из таблицы, составленной для каждого из K пунктов. Эти константы хранятся в памяти ЭВМ и называются точечными. Исследования показали, что ψ_1 и ψ_2 близки между собой и $\psi_1 < \psi_2$.

Если формула (1) применяется при любых $K > 5$, из-за неточности коэффициентов α и β, когда $K < 5$, то равенство (2) используют при $1 \le K < K_{пред}$, где $K_{пред}$ – ограничена числом элементов таблицы, включающей в себя значения $C_{P_{л\,у57}}$. Например, для программы GENA 2 $K_{пред} = 150$.

В работе [7] предложена следующая формула:

$$\psi_3 = \frac{C_{P_{п\,с}}}{C_{P_{п\,сл\,у57}}}, \tag{3}$$

в числителе которой

$$C_{P_{п\,с}} = \|R\|_E \|R^+\|_E \tag{4}$$

применяют псевдообратную матрицу

$$R^+ = (R + N^T N)^{-1} - N^T (NN^T NN^T)^{-1} N, \tag{5}$$

где

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ Y_1 & -X_1 & Y_2 & -X_2 & \dots & Y_K & -X_K \\ X_1 & Y_1 & X_2 & Y_2 & \dots & X_K & Y_K \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где $X_i = x_i - x_{ср}$; $Y_i = y_i - y_{ср}$ – отклонение от среднего арифметического, полученного по координатам всех пунктов геодезической сети.

Знак *н/с* в формуле (3) означает нуль-свободная сеть, т.е. сеть, не содержащая исходные пункты, или геодезическая сеть в нефиксированной системе координат. Числа $C_{P_{н/с}}$, аналогичные числам, используемым в формуле (2), также называют точечными константами для нуль-свободных построений.

Для вычисления чисел обусловленности в коррелатном способе уравнивания можно использовать следующие равенства:

$$C_K = \|R\|_E \|Q\|_E ; \tag{7}$$

$$\underset{r\times r}{R} = \underset{r\times N}{B}\, \underset{N\times N}{P^{-1}}\, \underset{N\times r}{B^T} ; \quad \underset{r\times N}{B} = \left(\underset{N\times N}{E} - \underset{N\times t}{A}\, \underset{t\times N}{F} \right)_{\text{выделенное}} \tag{8}$$

$$\underset{t\times N}{F} = \left(\underset{t\times N}{A^T}\, \underset{N\times N}{P}\, \underset{N\times t}{A} \right)^{-1} \underset{t\times N}{A^T}\, \underset{N\times N}{P} , \tag{9}$$

в которых

$$\|R\|_E = \sqrt{\sum_{i=1}^{r^2} R_i^2} \quad \text{– евклидова норма матрицы } R , \tag{10}$$

где P – диагональная матрица весов результатов измерений; E – единичная матрица; r – количество избыточных измерений или число условных уравнений; A – матрица коэффициентов параметрических уравнений поправок; t – число параметров; B – матрица коэффициентов условных уравнений, получаемая методом выделения строк из матрицы $(E - AF)_{N\times N}$.

Для сравнения ψ_{1-3} и C_P, $C_{P_{н/с}}$, C_K приведем числовые примеры. На рис. 1 показано построение для сетей триангуляции, трилатерации и линейно-угловой сети (сеть A). Аналогично будет сеть B, но она состоит из двух сдвоенных цепочек (рис. 2). На рис. 3 приведена сеть полигонометрии (сеть C).

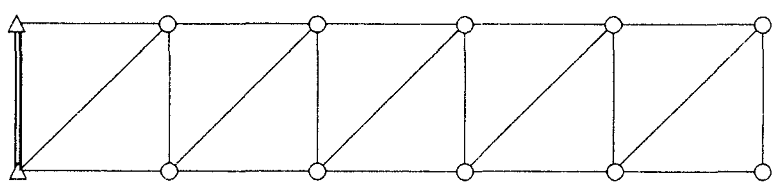

Рис. 1. Сеть A

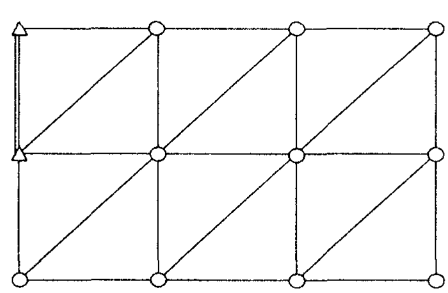

Рис. 2. Сеть B

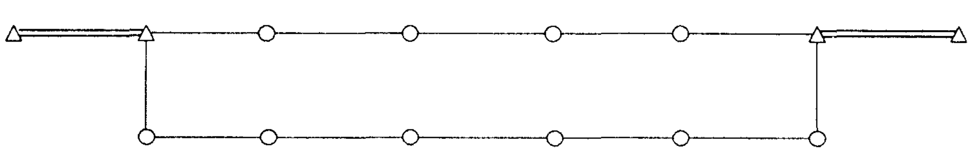

Рис. 3. Сеть C

В табл. 1 и 2 приведены результаты вычислений при длинах сторон S = 1000 – 1414 м для $\sigma_\beta = 2{,}0''$ и $\sigma_S = 10$ мм.

Таблица 1

Сравнение величин ψ

Сеть	Триангуляция			Трилатерация			Линейно-угловая		
	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_1	ψ_2	ψ_3
A	36,8	36,1	6,24	21,0	20,7	77,7	14,5	14,3	1,91
B	10,4	10,2	2,21	8,08	7,95	5,79	4,15	4,08	1,09
C	–	–	–	–	–	–	1,08	1,07	3,52

Таблица 2

Сравнение величин C

Сеть	Триангуляция			Трилатерация			Линейно-угловая		
	C_P	$C_{P_{н.с.}}$	C_K	C_P	$C_{P_{н.с.}}$	C_K	C_P	$C_{P_{н.с.}}$	C_K
A	6973	356	67,8	3992	4439	0	2760	109	268
B	1980	126	1248	1534	330	2,99	788	62,3	$3{,}9 \cdot 10^6$
C	–	–	–	–	–	–	206	256	$3{,}4 \cdot 10^5$

По данным табл. 1, 2 можно сделать следующие выводы:

- для свободных геодезических сетей (т.е. для построений с необходимым количеством исходных пунктов) $\psi_1 \approx \psi_2$;

- для линейно-угловых построений получают наименьшее значение ψ_1 и ψ_2;

- для нуль-свободных геодезических сетей получено, что $\psi_3 < \psi_1(\psi 2)$ и $C_{P_{н.с.}} < C_P$ за исключением ряда трилатерации;

- поскольку $C_K < C_P, C_{P_{н.с.}}$, то ее рекомендуется уравнивать коррелатным способом;

- линейно-угловые построения, включая сети полигонометрии, характеризуются большим значением C_K, следовательно, такие сети рекомендуется уравнивать параметрическим способом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мазмишвили А.И. Способ наименьших квадратов. - М.: Недра, 1968. -440 с.
2. Машимов М.М. Уравнивание геодезических сетей. - М.: Недра, 1979. - 367 с.
3. Герасименко М.Д. Проектирование и обработка измерений с применением собственных значений матриц. - Владивосток, 1983. - 224 с.
4. Мицкевич В.И., Маковский С.В. Оценка качества построения геодезических сетей с помощью относительной обусловленности // Геодезия и картография. - 1995. - № 11. - С. 16 - 17.
5. Мицкевич В.И., Левданский П.М. К вопросу оценки качества построения геодезических сетей на ЭВМ // Геодезия и картография. - 1996. - № 6. - С. 19 - 21.
6. Определение эталонных точечных констант для оценки качества построения плановых геодезических сетей с помощью чисел обусловленности / В.И. Мицкевич, П.В. Субботенко, А.А. Ткачев, Л.А. Черкас; Полоцкий гос. ун-т. - Новополоцк. - 2003. --12 с.- Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 10.12.03. - №817-ГДОЗ.
7. Оценка качества построения свободных и нуль-свободных рядов геодезических сетей с помощью эталонных точечных констант / В.И. Мицкевич, П.В. Субботенко, А.А. Ткачев, Л.А. Черкас; Полоцкий гос. ун-т. - Новополоцк. - 2003. - 8 с. - Деп. в ОНТИ ЦНИИГ АиК 10.12.03. - № 818-1 ДОЗ.