УДК 517.544

О РЕШЕНИИ В КЛАССЕ ГИПЕРФУНКЦИЙ ЗАДАЧИ О СКАЧКЕ

Т.М. УРБАНОВИЧ
(Полоцкий государственный университет)

Рассматривается решение в классе гиперфункций краевой задачи о скачке в случае, когда правая часть представляет собой произведение степенных и логарифмических функций.

Рассмотрим краевую задачу о скачке [1]:

$$\Phi^+(x)-\Phi^-(x)=\varphi(x), \qquad -\infty<x<+\infty$$

в классе гиперфункций для специальных правых частей. Приведём необходимые определения, следуя [2, с. 11].

Определение 1. Пусть D – область, содержащая интервал (A, B) оси x. D^+ и D^- – части области D выше и ниже оси x соответственно. Пусть $F^+(z)$ и $F^-(z)$ – аналитические функции, регулярные в D^+ и D^- соответственно. Тогда пара аналитических функций $F(z)=\{F^+(z),F^-(z)\}$ называется определяющей гиперфункцию на интервале (A, B). При этом используются обозначения

$$f(x)=H.F.F(z)=H.F.\{F^+(z),F^-(z)\},$$

$$F(z)=G.F.f(x).$$

$F(z)$ называется производящей функцией $f(x)$; $F^+(z)$ и $F^-(z)$ называются соответственно верхней и нижней компонентами производящей функции. Функция $f(x)$ называется при этом гиперфункцией, порождённой $F(z)$.

Гиперфункции рассматриваются как на конечных, так и на бесконечных промежутках (т.е. возможно $A=-\infty$ и/или $B=+\infty$).

Определение 2. Если в некоторой точке $x=a$ существует предел

$$f(a)\overset{def}{=}\lim_{\varepsilon\to+0}\{F^+(a+i\varepsilon)-F^-(a-i\varepsilon)\},$$

то значение гиперфункции в этой точке совпадает со значением этого предела.

В остальных точках значение гиперфункции считается неопределённым.

Определение 3. Обыкновенная функция, соответствующая гиперфункции $f(x)=H.F.F(z)$, определяется следующим образом:

$$O.F.f(x)\overset{def}{=}\lim_{\varepsilon\to+0}\{F^+(x+i\varepsilon)-F^-(x-i\varepsilon)\},$$

т.е. обыкновенная функция, соответствующая данной гиперфункции, определена для тех $x\in(A;B)$, для которых последний предел существует.

На множестве гиперфункций естественным образом определены сложение и умножение на константы [2, с. 13].

Однако множество гиперфункций, вообще говоря, не является алгеброй. Умножение одной гиперфункции на другую требует дополнительных построений и определено неоднозначно [2, с. 225].

Один из подходов к определению произведения – это так называемое формальное произведение, т.е. покомпонентное перемножение гиперфункций:

$$f(x)\cdot g(x)=H.F.\{F^+(z),F^-(z)\}\cdot H.F.\{G^+(z),G^-(z)\}\equiv H.F.\{F^+(z)\cdot G^+(z),F^-(z)\cdot G^-(z)\}. \qquad (1)$$

Рассмотрим задачу отыскания функции, предельные значения которой удовлетворяют следующему краевому условию [1]:

$$\Phi^{+}(x)=\Phi^{-}(x)+\frac{\prod\limits_{j=1}^{m}\left(x-a_{j}\right)^{\alpha_{j}}}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(x-b_{k}\right)^{\beta_{k}}}, \quad -\infty<x<+\infty, \tag{2}$$

где $a_1<a_2<\cdots<a_m$, $b_1<b_2<\cdots<b_n$, $a_j\neq b_k$, $\alpha_j,\beta_k\in R_{+}$.

Начнём рассматривать в классе гиперфункций решение неоднородной краевой задачи Римана (2) с частного случая, когда свободный член содержит один множитель в числителе и один множитель в знаменателе ($m=1$, $n=1$), т.е. решим в классе гиперфункций задачу:

$$\Phi^{+}(x)=\Phi^{-}(x)+\frac{(x-a)^{\alpha}}{(x-b)^{\beta}}, \quad -\infty<x<+\infty, \tag{3}$$

где $a\neq b$, $\alpha,\beta\in R_{+}$.

Воспользуемся формулами

$$|x|^{\alpha}H(x)=H.F.\left\{\frac{i(-z)^{\alpha}}{2\sin\pi\alpha}\right\}, \qquad |x|^{\alpha}H(-x)=H.F.\left\{\frac{-iz^{\alpha}}{2\sin\pi\alpha}\right\}$$

(см. [2, с. 48]) для определения гиперфункции $\{\Phi_a^{+}(z),\,\Phi_a^{-}(z)\}$, порождённой функцией $f_a(x)=(x-a)^{\alpha}$.

Получим:

$$(x-a)^{\alpha}H(x-a)=\frac{i}{2\sin\pi\alpha}H.F.(a-z)^{\alpha},$$

$$(-1)^{\alpha}(a-x)^{\alpha}H(a-x)=(-1)^{\alpha}\frac{(-i)}{2\sin\pi\alpha}H.F.(z-a)^{\alpha}.$$

Здесь $(a-z)^{\alpha}$, $(z-a)^{\alpha}$ – фиксированные однозначные ветви многозначных функций в плоскости с разрезом по лучам $x>a$ и $x<a$ соответственно, положительные на верхних берегах этих разрезов; $H(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x<0\end{cases}$ – функция Хевисайда.

Так как $(x-a)^{\alpha}=(x-a)^{\alpha}H(x-a)+(-1)^{\alpha}(a-x)^{\alpha}H(a-x)$, то гиперфункция $\{\Phi_a^{+}(z),\,\Phi_a^{-}(z)\}$, порождённая функцией $f_a(x)=(x-a)^{\alpha}$, имеет вид

$$(x-a)^{\alpha}=H.F.\left\{\frac{i}{2\sin\pi\alpha}\left[(a-z)^{\alpha}-(-1)^{\alpha}(z-a)^{\alpha}\right]\right\}. \tag{4}$$

Аналогично определяется, что гиперфункция $\{\Phi_b^{+}(z),\Phi_b^{-}(z)\}$, порождённая функцией $f_b(x)=(x-b)^{-\beta}$, имеет вид:

$$(x-b)^{-\beta}=H.F.\left\{-\frac{i}{2\sin\pi\beta}\left[(b-z)^{-\beta}-(-1)^{-\beta}(z-b)^{-\beta}\right]\right\}. \tag{5}$$

Решение задачи (3) записывается в виде формального произведения гиперфункций (4) и (5), представляющих собой однозначные ветви многозначных функций.

Формальное произведение строится следующим образом (см. (1)):

$$f_a(x)\cdot f_b(x)=\left[\begin{pmatrix}F_{1,a}^{+}(x)\\F_{1,a}^{-}(x)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}F_{2,a}^{+}(x)\\F_{2,a}^{-}(x)\end{pmatrix}\right]\cdot\left[\begin{pmatrix}F_{1,b}^{+}(x)\\F_{1,b}^{-}(x)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}F_{2,b}^{+}(x)\\F_{2,b}^{-}(x)\end{pmatrix}\right]=$$

$$=\{F_{1,a}^{+}(x)\cdot F_{1,b}^{+}(x)+F_{1,a}^{+}(x)\cdot F_{2,b}^{+}(x)+F_{2,a}^{+}(x)\cdot F_{1,b}^{+}(x)+F_{2,a}^{+}(x)\cdot F_{2,b}^{+}(x),$$

$$F_{1,a}^{-}(x)\cdot F_{1,b}^{-}(x)+F_{1,a}^{-}(x)\cdot F_{2,b}^{-}(x)+F_{2,a}^{-}(x)\cdot F_{1,b}^{-}(x)+F_{2,a}^{-}(x)\cdot F_{2,b}^{-}(x)\},$$

где

$$F_{1,a}(z)=-\frac{i(-1)^{\alpha}}{2\sin\pi\alpha}H.F.(z-a)^{\alpha};\qquad F_{1,b}(z)=\frac{i(-1)^{-\beta}}{2\sin\pi\beta}H.F.(z-b)^{-\beta};$$

$$F_{2,a}(z)=\frac{i}{2\sin\pi\alpha}H.F.(a-z)^{\alpha};\qquad F_{2,b}(z)=-\frac{i}{2\sin\pi\beta}H.F.(b-z)^{-\beta}.$$

Найдём предельные значения этих функций:

$$F_{1,a}^{+}(x)=\begin{cases}-\dfrac{i(-1)^{\alpha}}{2\sin\pi\alpha}(a-x)^{\alpha}e^{i\pi\alpha}, & x<a;\\ -\dfrac{i(-1)^{\alpha}}{2\sin\pi\alpha}(x-a)^{\alpha}, & x>a;\end{cases}\qquad F_{1,b}^{+}(x)=\begin{cases}\dfrac{i(-1)^{-\beta}}{2\sin\pi\beta}(b-x)^{-\beta}e^{-i\pi\beta}, & x<b;\\ \dfrac{i(-1)^{-\beta}}{2\sin\pi\beta}(x-b)^{-\beta}, & x>b;\end{cases}$$

$$F_{1,a}^{-}(x)=\begin{cases}-\dfrac{i(-1)^{\alpha}}{2\sin\pi\alpha}(a-x)^{\alpha}e^{-i\pi\alpha}, & x<a;\\ -\dfrac{i(-1)^{\alpha}}{2\sin\pi\alpha}(x-a)^{\alpha}, & x>a;\end{cases}\qquad F_{1,b}^{-}(x)=\begin{cases}\dfrac{i(-1)^{-\beta}}{2\sin\pi\beta}(b-x)^{-\beta}e^{i\pi\beta}, & x<b;\\ \dfrac{i(-1)^{-\beta}}{2\sin\pi\beta}(x-b)^{-\beta}, & x>b;\end{cases}$$

$$F_{2,a}^{+}(x)=\begin{cases}\dfrac{i}{2\sin\pi\alpha}(a-x)^{\alpha}, & x<a;\\ \dfrac{i}{2\sin\pi\alpha}(x-a)^{\alpha}e^{-i\pi\alpha}, & x>a;\end{cases}\qquad F_{2,b}^{+}(x)=\begin{cases}-\dfrac{i}{2\sin\pi\beta}(b-x)^{-\beta}, & x<b;\\ -\dfrac{i}{2\sin\pi\beta}(x-b)^{-\beta}e^{i\pi\beta}, & x>b;\end{cases}$$

$$F_{2,a}^{-}(x)=\begin{cases}\dfrac{i}{2\sin\pi\alpha}(a-x)^{\alpha}, & x<a;\\ \dfrac{i}{2\sin\pi\alpha}(x-a)^{\alpha}e^{i\pi\alpha}, & x>a;\end{cases}\qquad F_{2,b}^{-}(x)=\begin{cases}-\dfrac{i}{2\sin\pi\beta}(b-x)^{-\beta}, & x<b;\\ -\dfrac{i}{2\sin\pi\beta}(x-b)^{-\beta}e^{-i\pi\beta}, & x>b.\end{cases}$$

Построенное формальное произведение гиперфункций решает задачу (3). Для того чтобы убедиться в этом, найдём разность предельных значений:

$$\left(F_{1,a}^{+}(x)F_{1,b}^{+}(x)+F_{1,a}^{+}(x)F_{2,b}^{+}(x)+F_{2,a}^{+}(x)F_{1,b}^{+}(x)+F_{2,a}^{+}(x)F_{2,b}^{+}(x)\right)-$$

$$-\left(F_{1,a}^{-}(x)F_{1,b}^{-}(x)+F_{1,a}^{-}(x)F_{2,b}^{-}(x)+F_{2,a}^{-}(x)F_{1,b}^{-}(x)+F_{2,a}^{-}(x)F_{2,b}^{-}(x)\right)$$

в тех точках, в которых таковая существует (см. определение 2). Таким образом, установлено следующее

Утверждение 1. Решение задачи (3) в классе гиперфункций имеет вид:

$$H.F.\left\{\Phi_a^{+}(z)\Phi_b^{+}(z),\Phi_a^{-}(z)\Phi_b^{-}(z)\right\}=$$

$$=\frac{1}{4\sin\pi\alpha\sin\pi\beta}\left\{\left[(a-z)^{\alpha}-(-1)^{\alpha}(z-a)^{\alpha}\right]_{+}\cdot\left[(b-z)^{-\beta}-(-1)^{-\beta}(z-b)^{-\beta}\right]_{+},\right.$$

$$\left.\left[(a-z)^{\alpha}-(-1)^{\alpha}(z-a)^{\alpha}\right]_{-}\cdot\left[(b-z)^{-\beta}-(-1)^{-\beta}(z-b)^{-\beta}\right]_{-}\right\},$$

где «+» и «–» означают соответствующие предельные значения однозначных ветвей многозначных аналитических функций для всех $z=x\neq a,b$.

Рассмотрим решение задачи (2) в случае, когда свободный член содержит m степенных множителей в числителе и n степенных множителей в знаменателе.

Гиперфункции $\left\{\Phi^+_{a_j}(z), \Phi^-_{a_j}(z)\right\}$, порождённые функциями $f_{a_j}(x) = (x - a_j)^{\alpha_j}$, $j = \overline{1, m}$, имеют вид:

$$(x-a_j)^{\alpha_j} = H.F.\left\{\frac{i}{2\sin\pi\alpha_j}\left[(a_j - z)^{\alpha_j} - (-1)^{\alpha_j}(z-a_j)^{\alpha_j}\right]\right\}, \tag{6}$$

а гиперфункции $\left\{\Phi^+_{b_k}(z), \Phi^-_{b_k}(z)\right\}$, порождённые функциями $f_{b_k}(x) = (x-b_k)^{-\beta_k}$, $k = \overline{1, n}$, имеют вид:

$$(x-b_k)^{-\beta_k} = H.F.\left\{-\frac{i}{2\sin\pi\beta_k}\left[(b_k - z)^{-\beta_k} - (-1)^{-\beta_k}(z-b_k)^{-\beta_k}\right]\right\}. \tag{7}$$

Решение задачи (2) представляет собой формальное произведение гиперфункций (6) и (7), которые представляют собой однозначные ветви многозначных функций.

Формальное произведение строится следующим образом (см. (1)):

$$\prod_{j=1}^{m} f_{a_j}(x)\cdot\prod_{k=1}^{n} f_{b_k}(x) = \prod_{j=1}^{m}\left[\begin{pmatrix} F^+_{1,a_j}(x) \\ F^-_{1,a_j}(x)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F^+_{2,a_j}(x) \\ F^-_{2,a_j}(x)\end{pmatrix}\right]\cdot\prod_{k=1}^{n}\left[\begin{pmatrix} F^+_{1,b_k}(x) \\ F^-_{1,b_k}(x)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F^+_{2,b_k}(x) \\ F^-_{2,b_k}(x)\end{pmatrix}\right].$$

Утверждение 2. Решение задачи (2) в классе гиперфункций имеет вид:

$$H.F.\left\{\prod_{j=1}^{m}\Phi^+_{a_j}(z)\cdot\prod_{k=1}^{n}\Phi^+_{b_k}(z), \prod_{j=1}^{m}\Phi^-_{a_j}(z)\cdot\prod_{k=1}^{n}\Phi^-_{b_k}(z)\right\} = \frac{i^m(-i)^n}{2^{m+n}\prod\limits_{j=1}^{m}\sin\pi\alpha_j\prod\limits_{k=1}^{n}\sin\pi\beta_k}\times$$

$$\times\left\{\left[\prod_{j=1}^{m}\left[(a_j - z)^{\alpha_j} - (-1)^{\alpha_j}(z-a_j)^{\alpha_j}\right]\right]_+\cdot\left[\prod_{k=1}^{n}\left[(b_k - z)^{-\beta_k} - (-1)^{-\beta_k}(z-b_k)^{-\beta_k}\right]\right]_+,\right.$$

$$\left.\left[\prod_{j=1}^{m}\left[(a_j - z)^{\alpha_j} - (-1)^{\alpha_j}(z-a_j)^{\alpha_j}\right]\right]_-\cdot\left[\prod_{k=1}^{n}\left[(b_k - z)^{-\beta_k} - (-1)^{-\beta_k}(z-b_k)^{-\beta_k}\right]\right]_-\right\},$$

где «+» и «–» означают соответствующие предельные значения однозначных ветвей многозначных аналитических функций для всех $z = x \neq a_j, b_k$, $j = \overline{1, m}$, $k = \overline{1, n}$.

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции. При $m = n = 1$ утверждение совпадает с утверждением 1. Для $m = 2$, $n = 1$ или для $m = 1$, $n = 2$ или для $m = n = 2$ равенство (2) при всех $x \neq a_j, b_k$ проверяется непосредственно. Таким образом, по известному решению задачи (3) мы можем построить решение задачи (2) с правой частью, в которой добавлено по одному степенному множителю в числителе и/или в знаменателе. Этим же способом доказывается справедливость утверждения для $m = p+1$, $n = q+1$ в предположении справедливости утверждения для $m = p$, $n = q$ (p и q – любые натуральные числа).

Данный подход позволяет рассматривать краевую задачу о скачке с другими правыми частями. Рассмотрим задачу отыскания функции, предельные значения которой удовлетворяют следующему краевому условию (см. [1]):

$$\Phi^+(x) = \Phi^-(x) + \prod_{j=1}^{m}(x-a_j)^{\alpha_j}\cdot\prod_{k=1}^{n} ln|x - c_k|, \quad -\infty < x < +\infty, \tag{8}$$

где $a_1 < a_2 < \cdots < a_m$, $c_1 < c_2 < \cdots < c_n$, $\alpha_j \in R_+$.

Начнём рассматривать в классе гиперфункций решение неоднородной краевой задачи Римана (8) с частного случая ($m = 1$, $n = 1$), т.е. решим в классе гиперфункций задачу:

$$\Phi^+(x) = \Phi^-(x) + (x-a)^\alpha \ln|x-c|, \quad -\infty < x < +\infty, \tag{9}$$

где $\alpha \in R_+$.

Воспользуемся формулами

$$\ln|x| H(x) = H.F.\left\{-\pi i \{H(z)\}^2\right\}, \qquad \ln|x| H(-x) = H.F.\left\{\pi i \{H(-z)\}^2\right\}$$

(см. [2, с. 45]), а также формулой

$$H(z) = -\frac{1}{2\pi i}\ln(-z)$$

(см. [2, с. 41]) для определения гиперфункции $\{\Phi_c^+(z), \Phi_c^-(z)\}$, порождённой функцией $f_c(x) = \ln|x-c|$. Получим:

$$\ln|x-c| H(x-c) = -\pi i H.F.\left\{(H(z-c))^2\right\} = -\pi i H.F.\left\{\left(-\frac{1}{2\pi i}\ln(c-z)\right)^2\right\} = -\frac{1}{4\pi i} H.F.\left\{\ln^2(c-z)\right\},$$

$$\ln|x-c| H(c-x) = \pi i H.F.\left\{(H(c-z))^2\right\} = \pi i H.F.\left\{\left(-\frac{1}{2\pi i}\ln(z-c)\right)^2\right\} = \frac{1}{4\pi i} H.F.\left\{\ln^2(z-c)\right\}.$$

Здесь $\ln(c-z)$, $\ln(z-c)$ – фиксированные однозначные ветви многозначных функций в плоскости с разрезом по лучам $x > c$ и $x < c$, соответственно, положительные на верхних берегах этих разрезов.

Так как $\ln|x-c| = \ln|x-c| H(x-c) + \ln|x-c| H(c-x)$, то гиперфункция $\{\Phi_c^+(z), \Phi_c^-(z)\}$, порождённая функцией $f_c(x) = \ln|x-c|$ имеет вид:

$$\ln|x-c| = \frac{1}{4\pi i} H.F.\left\{\ln^2(z-c) - \ln^2(c-z)\right\}. \tag{10}$$

Решение задачи (9) записывается в виде формального произведения гиперфункций (4) и (10), представляющих собой однозначные ветви многозначных функций.

Формальное произведение строится следующим образом (см. (1)):

$$f_a(x)\cdot f_c(x) = \{F_{1,a}^+(x)\cdot F_{1,c}^+(x) + F_{1,a}^+(x)\cdot F_{2,c}^+(x) + F_{2,a}^+(x)\cdot F_{1,c}^+(x) + F_{2,a}^+(x)\cdot F_{2,c}^+(x),$$

$$F_{1,a}^-(x)\cdot F_{1,c}^-(x) + F_{1,a}^-(x)\cdot F_{2,c}^-(x) + F_{2,a}^-(x)\cdot F_{1,c}^-(x) + F_{2,a}^-(x)\cdot F_{2,c}^-(x)\},$$

где

$$F_{1,c}(z) = \frac{1}{4\pi i} H.F.\left\{\ln^2(z-a)\right\}, \qquad F_{2,c}(z) = -\frac{1}{4\pi i} H.F.\left\{\ln^2(a-z)\right\}.$$

Найдём предельные значения этих функций:

$$F_{1,c}^+(x) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi i}\left(\ln|x-c| + \pi i H(c-x)\right)^2, & x < c, \\ \frac{1}{4\pi i}\left(\ln|x-c|\right)^2, & x > c, \end{cases} \qquad F_{2,c}^+(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4\pi i}\left(\ln|x-c|\right)^2, & x < c, \\ -\frac{1}{4\pi i}\left(\ln|x-c| - \pi i H(c-x)\right)^2, & x > c, \end{cases}$$

$$F_{1,c}^-(x) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi i}\left(\ln|x-c| - \pi i H(c-x)\right)^2, & x < c, \\ \frac{1}{4\pi i}\left(\ln|x-c|\right)^2, & x > c, \end{cases} \qquad F_{2,c}^-(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4\pi i}\left(\ln|x-c|\right)^2, & x < c, \\ -\frac{1}{4\pi i}\left(\ln|x-c| + \pi i H(c-x)\right)^2, & x > c. \end{cases}$$

Построенное формальное произведение гиперфункций решает задачу (9). Для того чтобы убедиться в этом, найдём разность предельных значений

$$\left(F^{+}_{1,a}(x)F^{+}_{1,c}(x)+F^{+}_{1,a}(x)F^{+}_{2,c}(x)+F^{+}_{2,a}(x)F^{+}_{1,c}(x)+F^{+}_{2,a}(x)F^{+}_{2,c}(x)\right)-$$

$$-\left(F^{-}_{1,a}(x)F^{-}_{1,c}(x)+F^{-}_{1,a}(x)F^{-}_{2,c}(x)+F^{-}_{2,a}(x)F^{-}_{1,c}(x)+F^{-}_{2,a}(x)F^{-}_{2,c}(x)\right)$$

в тех точках, в которых таковая существует (см. определение 2). Таким образом, установлено следующее:

Утверждение 3. Решение задачи (9) в классе гиперфункций имеет вид:

$$H.F.\left\{\Phi^{+}_{a}(z)\Phi^{+}_{c}(z),\Phi^{-}_{a}(z)\Phi^{-}_{c}(z)\right\}==\frac{1}{8\pi\, sin\,\pi\alpha}\left\{\left[(a-z)^{\alpha}-(-1)^{\alpha}(z-a)^{\alpha}\right]_{+}\cdot\left[ln^{2}(z-c)-ln^{2}(c-z)\right]_{+},\right.$$

$$\left.\left[(a-z)^{\alpha}-(-1)^{\alpha}(z-a)^{\alpha}\right]_{-}\cdot\left[ln^{2}(z-c)-ln^{2}(c-z)\right]_{-}\right\},$$

где «+» и «–» означают соответствующие предельные значения однозначных ветвей многозначных аналитических функций для всех $z=x\neq a,c$.

Рассмотрим решение задачи (8) в случае, когда свободный член содержит m степенных множителей и n логарифмических множителей. Гиперфункции $\left\{\Phi^{+}_{c_k}(z),\Phi^{-}_{c_k}(z)\right\}$, порождённые функциями $ln|x-c_k|$, $k=\overline{1,n}$, имеют вид:

$$ln|x-c_k|=\frac{1}{4\pi i}H.F.\left\{ln^{2}(z-c_k)-ln^{2}(c_k-z)\right\}. \tag{11}$$

Решение задачи (8) представляет собой формальное произведение гиперфункций (6) и (11), которые представляют собой однозначные ветви многозначных функций.

Утверждение 4. Решение задачи (8) в классе гиперфункций имеет вид:

$$H.F.\left\{\prod_{j=1}^{m}\Phi^{+}_{a_j}(z)\cdot\prod_{k=1}^{n}\Phi^{+}_{c_k}(z),\prod_{j=1}^{m}\Phi^{-}_{a_j}(z)\cdot\prod_{k=1}^{n}\Phi^{-}_{c_k}(z)\right\}=\frac{i^{m-n}}{2^{m+2n}\pi^{2}\prod_{j=1}^{m}sin\,\pi\alpha_j}\times$$

$$\times\left\{\left[\prod_{j=1}^{m}\left[(a_j-z)^{\alpha_j}-(-1)^{\alpha_j}(z-a_j)^{\alpha_j}\right]\right]_{+}\cdot\left[\prod_{k=1}^{n}\left[ln^{2}(z-c_k)-ln^{2}(c_k-z)\right]\right]_{+},\right.$$

$$\left.\left[\prod_{j=1}^{m}\left[(a_j-z)^{\alpha_j}-(-1)^{\alpha_j}(z-a_j)^{\alpha_j}\right]\right]_{-}\cdot\left[\prod_{k=1}^{n}\left[ln^{2}(z-c_k)-ln^{2}(c_k-z)\right]\right]_{-}\right\},$$

где «+» и «–» означают соответствующие предельные значения однозначных ветвей многозначных аналитических функций для всех $z=x\neq a_j,c_k$, $j=\overline{1,m}$, $k=\overline{1,n}$.

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству утверждения 2.

Рассмотрим задачу отыскания функции, предельные значения которой удовлетворяют следующему краевому условию (см. [1]):

$$\Phi^{+}(x)=\Phi^{-}(x)+\frac{\prod_{j=1}^{m}ln|x-c_j|}{\prod_{k=1}^{n}(x-b_k)^{\beta_k}},\quad -\infty<x<+\infty, \tag{12}$$

где $b_1<b_2<\cdots<b_n$, $c_1<c_2<\cdots<c_m$, $\beta_k\in R_+$.

Решение задачи (12) представляет собой формальное произведение гиперфункций

$$ln\left|x-c_j\right|=\frac{1}{4\pi i}H.F.\left\{ln^2\left(z-c_j\right)-ln^2\left(c_j-z\right)\right\},\quad j=\overline{1,m}$$

и

$$\left(x-b_k\right)^{-\beta_k}=H.F.\left\{-\frac{i}{2\sin\pi\beta_k}\left[\left(b_k-z\right)^{-\beta_k}-\left(-1\right)^{-\beta_k}\left(z-b_k\right)^{-\beta_k}\right]\right\},\quad k=\overline{1,n},$$

которые представляют собой однозначные ветви многозначных функций (аналогично решению задачи (8)).

Заметим, что полученные выше решения представляются в явном виде через однозначные ветви элементарных многозначных функций. В работах [3, 4] получены решения задачи о скачке для других правых частей, но эти решения рассматриваются в классах обобщённых функций Шварца.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. - М., 1977.
2. Imai I. Applied hyperfunction theory. Dordrecht, 1981.
3. Карташова Л.В., Радченко Т.Н. К решению краевой задачи о скачке в пространстве обобщённых функций Φ_+' на полуоси // Краевые задачи, специальные функции и дробное исчисление. - Мн., 1996.-С. 112-116.
4. Рогожин В.С. К теории краевой задачи Римана в исключительном случае // Научные труды юбилейного семинара по краевым задачам. Мн., 1985. - С. 179- 181.