УДК 514.74; 622.273

ПОСТРОЕНИЕ СЛОЖНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ С УЧЕТОМ ПОЛЯ Г РАДИЕНТОВ

д-р техн. наук, доц. С.Г. ЕХИЛЕВСКИЙ
(Полоцкий государственный университет),
канд. техн. наук, доц. В.И. ПИЛЮГИН
(Донецкий национальный технический университет)

Предложена процедура полиномиальной регрессии гладких поверхностей на основе модифицированного метода наименьших квадратов, учитывающая таблично заданное поле градиентов.

Одной из важнейших задач горного производства является геометризация пластовых залежей полезных ископаемых в виде сложных объемных поверхностей $z = f(x,y)$. Характерной особенностью этой задачи применительно к действующим подземным предприятиям является неоднородность исходной информации. Это выражается в том, что одна ее часть представлена в виде совокупности точек с известными координатами x, y, z, а другая – в виде поля градиентов, т.е. совокупности x, y, z'. При этом положение точек, в которых определено значение координаты z (глубины), не совпадает с положением точек, в которых известно значение градиента z, определяющее угол наклона пласта. Разработанные до настоящего времени методы, и в частности [1], отмеченную особенность не учитывают.

Рассмотрим плоский и объемный случаи решения данной задачи применительно к полиноминальной регрессии.

1. Плоский случай

Пусть $y(x)$ и ее производная заданы таблично:

$$y(x_i) = y_i,\ i = 1,2,\ \ldots,\ n \tag{1}$$

и

$$y'(x_k) = y'_k,\ k = 1,2,\ \ldots,\ m, \tag{2}$$

причем наборы точек x_i и x_k, вообще говоря, не совпадают. Единственное к ним требование – репрезентативность, что обеспечивается достаточным объемом (n, $m >> 1$) и случайным характером обеих выборок. Кроме того, погрешности табличных значений (1), (2) должны быть согласованы:

$$\Delta y_i \approx \left(x_{i+1} - x_i\right)\Delta y'_i\ . \tag{3}$$

В противном случае использовать (2) вместе с (1) нецелесообразно. В (3) символами Δy_i и $\Delta y'_i$ обозначены погрешности в измерении функции и ее производной соответственно.

Аппроксимируем $y(x)$ полиномом:

$$y(x) \cong P(x) = \sum_{r=0}^{\alpha} a_r x^r\ , \tag{4}$$

порядок и коэффициенты которого можно определить на основе таблицы (1) с помощью модифицированного метода наименьших квадратов [1].

Изложим кратко суть такой модификации. Обычно для аппроксимации функций, заданных таблично, используют процедуру регрессии или строят интерполяционные многочлены. Первое целесообразно, если известен вид функции и требуется определить лишь числовые значения ее параметров. За основу берут полученные с некоторой погрешностью экспериментальные точки и применяют к ним метод наименьших квадратов. В отличие от кривой регрессии, график интерполяционного многочлена проходит точно через опорные точки. Такой подход приемлем, если точки густо расположены и точность, с которой они найдены, высока. Например, функции, заданные плохо сходящимися рядами, табулируют с любой нужной точностью и во всех дальнейших вычислениях заменяют интерполяционными многочленами, что значительно повышает скорость счета [2].

В [1] реализован промежуточный (гибридный) вариант аппроксимации, который авторы вынуждены применять, когда вид зависимости принципиально неизвестен (например, случаен) и опорных точек в силу объективных причин не может быть много (например, сбор информации сопряжен со значительными материальными и технологическими трудностями). В этом случае авторы работы [1] предлагают поступать в соответствии со следующей методикой:

1) из общего массива исходных данных выбрасывается одна точка;

2) на основе оставшихся данных строится интерполяционный многочлен низкой степени;

3) находится разность между табличным значением функции в выброшенной точке и соответствующим значением, найденным с помощью интерполяционной процедуры;

4) в массив возвращается выброшенная точка и выбрасывается следующая, после чего повторяются операции, предусмотренные вторым и третьим пунктом;

5) четвертый пункт повторяется до тех пор, пока оговоренная в нем процедура не будет осуществлена с каждой точкой исходного массива данных;

6) суммируются абсолютные величины отклонений, упомянутых в третьем пункте;

7) операции, предусмотренные вторым - шестым пунктами повторяем, последовательно увеличивая степень интерполяционного многочлена;

8) оптимальная степень интерполяционного многочлена обеспечивает минимальность найденного в шестом пункте отклонения виртуальной зависимости от заданной таблично.

Определив порядок и коэффициенты интерполяционного полинома, дополним таблицу (2) новыми данными:

$$P'(x_i) = y'_i; \qquad i = 1,2, \ldots, n. \tag{5}$$

Затем, опираясь на расширенную таблицу (2), (5), вновь применим изложенную в [1] процедуру:

$$y'(x) \cong f(x) = \sum_{q=0}^{\beta} b_q x^q . \tag{6}$$

Тогда окончательная регрессия примет вид:

$$y(x) = F(x), \tag{7}$$

в котором $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$.

Возникшую в (7) произвольную постоянную определим на основе (1) методом наименьших квадратов.

Недостаток предлагаемого подхода (1) – (7) состоит в разной точности таблиц (2) и (5), так как (5), кроме погрешности измерений (1), содержит еще и погрешность вычислений (4).

Если $n >> m$ этим обстоятельством можно пренебречь. В противном случае роль (2) можно усилить, дополнив вместо (5) таблицу (2) значениями:

$$F'(x_i) = f(x_i) = y'_i . \tag{8}$$

В результате получим итерационную процедуру, сходящуюся к (2). Поэтому правильнее всего дополнить (1) точками:

$$F(x_k) = y_k; \qquad k = 1,2, \ldots, m \tag{9}$$

и повторять (1)–(9) до тех пор, пока вид $F(x)$ не стабилизируется.

2. Объемный случай

Вместо (1), (2) будем опираться на таблицы:

$$z(x_i, y_i) = z_i, \qquad i = 1,2, \ldots, n; \tag{10}$$

$$z'_x(x_k, y_k) = z'_{xk}, \qquad k = 1,2, \ldots, m; \tag{11}$$

$$z'_y(x_k, y_k) = z'_{yk}, \qquad k = 1,2, \ldots, m. \tag{12}$$

Теперь условие (3) примет вид:

$$\Delta z_i \cong (x_{i+1} - x_i)\Delta z'_{xi} + (y_{i+1} - y_i)\Delta z'_{yi} . \tag{13}$$

Вместо (4) запишем:

$$z(x,y) \cong P(x,y) = \sum_{r,s}^{\alpha} a_{rs} x^r y^s . \tag{14}$$

После чего, определив α и a_{rs} (см. [1]), дополним таблицы (11), (12) значениями:

$$P'_x(x_i, y_i) = z'_{xi}, \qquad i = 1,2, \ldots, n; \tag{15}$$

$$P'_y(x_i, y_i) = z'_{yi}, \qquad i = 1,2, \ldots, n \tag{16}$$

и, опираясь на $n + m$ двухмерных точек, определим:

$$z'_x(x,y) \cong X(x,y) = \sum_{p,q=0}^{\beta} b_{pq} x^p y^q ; \tag{17}$$

$$z'_y(x,y) \cong Y(x,y) = \sum_{p,q=0}^{\gamma} c_{pq} x^p y^q . \tag{18}$$

В дополнение к описанной в [1] процедуре по определению $X(x,y)$, $Y(x,y)$, при использовании метода наименьших квадратов, нужно требовать выполнение условия:

$$X'_y(x,y) = Y'_x(x,y), \tag{19}$$

обеспечивающего гладкость поверхности $z(x,y)$.

Условие (19) связывает разложения (17), (18):

$$\sum_{p,q}^{\beta} b_{pq} x^p q y^{q-1} = \sum_{p,q}^{\gamma} c_{pq} p x^{p-1} y^q, \tag{20}$$

откуда следует равенство порядков, фигурирующих в (17), (18) многочленов

$$\beta = \gamma, \tag{21}$$

некоторые значения коэффициентов

$$b_{\beta q} = c_{p\beta} = 0 \tag{22}$$

и связь между ними:

$$b_{p,q+1}(q+1) = c_{p+1,q}(p+1). \tag{23}$$

Чтобы не пользоваться связями (21) – (23), можно с самого начала вместо (17), (18) ввести многочлен

$$F(x,y) = \sum_{p,q=0}^{\beta} d_{pq} x^p y^q \tag{24}$$

и работать с его коэффициентами:

$$z'_x(x,y) \cong X(x,y) = F'_x(x,y); \tag{25}$$

$$z'_y(x,y) \cong Y(x,y) = F'_y(x,y). \tag{26}$$

В результате получим окончательный вид полиномиальной регрессии поверхности с учетом имеющегося поля градиентов (11), (12):

$$\begin{aligned} z(x,y) \cong F(x,y) &= \int_{x_0}^{x} X(x,y_0)\,dx + \int_{y_0}^{y} Y(x,y)\,dy = \\ &= \sum_{p,q}^{\beta}\left[b_{pq}\frac{y_0^q}{p+1}\left(x^{p+1} - x_0^{p+1}\right) + c_{pq}\frac{x^p}{q+1}\left(y^{q+1} - y_0^{q+1}\right)\right], \end{aligned} \tag{27}$$

где числа x_0, y_0 определим на основе (10) методом наименьших квадратов.

При необходимости с помощью (10) – (27) можно развить описанную выше итерационную процедуру, дополнив (10) новыми точками:

$$F(x_k, y_k) = z_k. \tag{28}$$

В заключение заметим, что при определении коэффициентов регрессии поля градиентов, фигурирующих в (17), (18) или в (24), нужно, чтобы суммы квадратов отклонений, минимизируемые в методе наименьших квадратов, были для (17), (18) или (25), (26) одного порядка малости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Прогнозирование геомеханических условий разработки пологих угольных пластов / Под общ. ред. В.И. Пилюгина. - Донецк: ДонНТУ, 2004. - 145 с.
2. Ехилевский С.Г. Численный расчет концентрации CO_2 в регенеративном патроне шахтного респиратора. Ч. 2. Улучшение сходимости // Изв. Донецкого горного института. - 1997. - № 1. - С. 81 - 87.