УДК 537.8; 517.951

ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД ФУРЬЕ РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ

И.Е. АНДРУШКЕВИЧ
(Витебский государственный университет им. П.М. Машерова)

Определены общие закономерности, позволяющие при решении задач прикладной физики с использованием ОМФ- s ограничиться рассмотрением N -2s переопределенных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, эквивалентных исходному дифференциальному уравнению с частными производными, вместо используемых ранее для этих целей 2^N таких систем.

Метод разделения переменных впервые был предложен Ж. Д'Аламбером для решения волнового уравнения. В последующем определяющий вклад в его развитие и популяризацию внесли Ж. Фурье и М.В. Остроградский (см., например, [1]). В настоящее время метод известен как метод Фурье, или классический метод Фурье разделения переменных (КМФ), основные применения которого для решения задач математической физики исчерпываются [2 - 5].

Вместе с тем примечателен тот факт, что решение уравнений в частных производных (ЧП) методом разделения переменных приводит к решению систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), что делает возможным применение результатов и методов качественной теории ОДУ к уравнениям в ЧП. По этой причине особый интерес исследователей вызывает проблематика развития КМФ и его применения в решении прикладных задач [6]. В настоящей работе мы развиваем обобщенный метод Фурье (ОМФ), предложенный в [6 - 8]. В частности, нами значительно улучшена оценка числа систем ОДУ, используемых ранее [6] для решения задач прикладной физики.

1. Сущность обобщенного метода Фурье

Рассматриваются дифференциальные уравнения в частных производных вида

$$L\Psi(x,y)=U(x,y), \tag{1}$$

где $\Psi(x,y)$ – искомая функция; $U(x,y)$ – неоднородность; L – дифференциальный оператор.

Предполагается, что функция $U(x,y)$ и оператор являются разделяющимися, т.е. для $U(x,y)$ справедливо представление

$$U(x,y)=\sum_{k=1}^{l}\Phi_k(x)\,\mathrm{T}_k(y), \tag{2}$$

и существует совокупность операторов L_{ix}, L_{iy} ($i=\overline{1,l}$, l – некоторое натуральное число), таких, что операторы L_{ix} действуют по переменной x, L_{iy} – по переменной y, и для всех функций $\Psi(x,y)$, на которых определен оператор, выполняется равенство

$$L\Psi(x,y)=\sum_{i=1}^{l}L_{ix}\big(X_1(x),\,X_2(x),\,\dots,\,X_s(x)\big)L_{iy}\big(Y_1(y),\,Y_2(y),\,\dots,\,Y_s(y)\big). \tag{3}$$

Заметим, что оператор (3) в общем случае является нелинейным. Однако во многих случаях, важных с точки зрения решения прикладных задач, в операторах вида (3) нетрудно выделить линейную часть:

$$\begin{aligned}L\Psi(x,y)=&\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{s}\tilde{L}_{ix}\big(X_k(x)\big)\tilde{L}_{iy}\big(Y_k(y)\big)+\\&+\sum_{j=1}^{n}\tilde{\tilde{L}}_{jx}\big(X_1(x),\,X_2(x),\,\dots,\,X_s(x)\big)\tilde{\tilde{L}}_{jy}\big(Y_1(y),\,Y_2(y),\,\dots,\,Y_s(y)\big).\end{aligned} \tag{4}$$

Соотношение (4) означает, что из l пар операторов L_{ix}, L_{iy} точно m пар $\left(\tilde{L}_{ix}, \tilde{L}_{iy}\right)$ являются линейными, а остальные n пар $\left(\tilde{\tilde{L}}_{jx}, \tilde{\tilde{L}}_{jy},\ j=\overline{1,n},\ n+m=l\right)$, в общем случае, не линейны.

Решение уравнения (1) будем искать в виде

$$\Psi(x,y)=\sum_{k=1}^{s}X_k(x)\,Y_k(y), \tag{5}$$

где функции $\left(X_1(x),\ X_2(x),\ldots,\ X_s(x)\right)$, равно как и функции $\left(Y_1(y), Y_2(y),\ldots, Y_s(y)\right)$, являются линейно независимыми. При этом ***число s будет определять модификацию ОМФ (ОМФ-s)***, и при $s=1$ получаем, что ОМФ – классический метод Фурье.

Линейная зависимость любых двух функций $X_\alpha(x)$, $X_\beta(x)$ $\left(\alpha=\overline{1,s},\ \beta=\overline{1,s},\ \alpha\neq\beta\right)$ означает не что иное, как сохранение (5), однако с уменьшенным числом слагаемых в правой части, равным $s-1$. Действительно, пусть

$$X_\alpha(x)=\mathrm{a}\,X_\beta(x), \tag{6}$$

где $\alpha\langle\beta$, a – некоторая постоянная. Тогда (5) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}\Psi(x,y)&=X_1(x)\,Y_1(y)+\ldots+X_\alpha(x)\,Y_\alpha(y)+\ldots+X_\beta(x)\,Y_\beta(y)+\ldots+X_s(x)\,Y_s(y)=\\&=X_1(x)\,Y_1(y)+\ldots+X_\alpha(x)\left(Y_\alpha(y)+\frac{1}{\mathrm{a}}Y_\beta(y)\right)+\ldots+X_s(x)\,Y_s(y).\end{aligned} \tag{7}$$

Вводя новые функции

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{X}_i(x)=X_i(x),\ \tilde{Y}_i(y)=Y_i(y),\ (i\langle\alpha);\\&\tilde{X}_\alpha(x)=X_\alpha(x),\tilde{Y}_\alpha(y)=Y_\alpha(y)+\frac{1}{\mathrm{a}}Y_\beta(y);\\&\tilde{X}_i(x)=X_{i-1}(x),\ \tilde{Y}_i(y)=Y_{i-1}(y),\ (i\rangle\alpha,\ i-1\le s),\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

из (5) получаем

$$\Psi(x,y)=\sum_{k=1}^{s-1}\tilde{X}_k(x)\,\tilde{Y}_k(y). \tag{9}$$

В принятых допущениях (2) – (5) уравнение (1) имеет вид

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{s}\tilde{L}_{i,x}\left(X_k(x)\right)\tilde{L}_{i,y}\left(Y_k(y)\right)+\\&+\sum_{j=1}^{n}\tilde{\tilde{L}}_{j,x}\left(X_1(x),X_2(x),\ldots,X_s(x)\right)\tilde{\tilde{L}}_{j,y}\left(Y_1(y),Y_2(y),\ldots,Y_s(y)\right)-\sum_{k=1}^{t}\Phi_k(x)\mathrm{T}_k(y)=0.\end{aligned} \tag{10}$$

Равенство (10) означает, что уравнение (1) становится билинейно функциональным

$$\sum_{\zeta=1}^{N}f_\zeta(x)\,g_\zeta(y)=0, \tag{11}$$

Без ограничения общности предполагаем, что в (11) $f_\zeta(x)$, $g_\zeta(y)$ тождественно не равны нулю для любого $\zeta=\overline{1,N}$.

В противном случае уравнение (11) сохраняет свой вид, но с другим значением N.

Представляя (11) в матричном виде, получаем

$$\mathbf{f}^{\mathrm{T}}\times\mathbf{g}=0. \tag{12}$$

При этом в (11), (12)

$$N=m\times s+n+t, \tag{13}$$

$$\mathbf{f}=\begin{pmatrix} \tilde{L}_{1x}(X_1) \\ \ldots \\ \tilde{L}_{1x}(X_s) \\ \ldots \\ \tilde{L}_{mx}(X_1) \\ \ldots \\ \tilde{L}_{mx}(X_s) \\ \tilde{\tilde{L}}_{1x}(X_1, X_2, \ldots, X_s) \\ \ldots \\ \tilde{\tilde{L}}_{nx}(X_1, X_2, \ldots, X_s) \\ -\Phi_1 \\ \ldots \\ -\Phi_t \end{pmatrix};\ \mathbf{g}=\begin{pmatrix} \tilde{L}_{1y}(Y_1) \\ \ldots \\ \tilde{L}_{1y}(Y_s) \\ \ldots \\ \tilde{L}_{my}(Y_1) \\ \ldots \\ \tilde{L}_{my}(Y_s) \\ \tilde{\tilde{L}}_{1y}(Y_1, Y_2, \ldots, Y_s) \\ \ldots \\ \tilde{\tilde{L}}_{ny}(Y_1, Y_2, \ldots, Y_s) \\ \mathrm{T}_1 \\ \ldots \\ \mathrm{T}_t \end{pmatrix}, \tag{14}$$

$\mathbf{f}^{\mathrm{T}}$ – матрица, транспонированная к $\mathbf{f}$.

В [6] установлено, что для нахождения решений уравнения (11) необходимо и достаточно решить $\sum_{r=0}^{N} C_N^r = 2^N$ систем обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\left(\mathbf{E}-\mathbf{A}\left[i^r\right]\right)\mathbf{f}=0, \mathbf{A}'\left[i^r\right]\mathbf{g}=0. \tag{15}$$

Напомним, что $\mathbf{E}$ – единичная матрица порядка N, $r=\overline{1,N}$, $\mathbf{A}\left[i^r\right]$ – матрица размерности $N\times N$, $\mathbf{A}'\left[i^r\right]$ – матрица, транспонированная к $\mathbf{A}\left[i^r\right]$, элементы которой определяются следующим образом:

$$\mathrm{a}_{i,j}=\begin{cases} 1, i=j\in\left\{i^r\right\}; \\ 0, i\in\left\{i^r\right\}, j\in\left\{i^r\right\}, i\neq j; \\ \alpha_{i,j}, i\in\left\{j^r\right\}, j\in\left\{i^r\right\}; \\ 0, j\in\left\{j^r\right\}, \end{cases} \tag{16}$$

где $\alpha_{i,j}$ – произвольные числовые коэффициенты; $\left\{i^r\right\}$, $\left\{j^r\right\}$ – упорядоченные целочисленные множества, такие, что

$$\left\{i^r\right\}=\left\{i_1, \ldots, i_r\right\}; \left\{j^r\right\}=\left\{j_1, \ldots, j_{N-r}\right\}; r=\overline{1,N}; \left\{i^0\right\}=\varnothing; \left\{j^0\right\}=\left\{1,2,\ldots,N\right\}, \tag{17}$$

$$1\le i_1 \langle i_2 \langle \ldots \langle i_r \le N; 1\le j_1 \langle j_2 \langle \ldots \langle j_{N-r}\le N; \left\{i^r\right\}\cup\left\{j^r\right\}=\left\{1,2,\ldots,N\right\}; \left\{i^r\right\}\cap\left\{j^r\right\}=\varnothing. \tag{18}$$

Ввиду [1] решение системы (15) может быть представлено как

$$\mathbf{f}=\mathbf{A}\left[i^r\right]_{i_1,\ldots,i_r}\begin{pmatrix} F_1(x) \\ . \\ . \\ F_r(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{g}=\left(\mathbf{E}-\mathbf{A}'\left[i^r\right]\right)_{j_1,\ldots,j_{N-r}}\begin{pmatrix} G_1(y) \\ . \\ . \\ G_{N-r}(y) \end{pmatrix}, \tag{19}$$

где $\mathbf{A}\left[i^r\right]_{k_1,\ldots,k_s}$, $\mathbf{A}'\left[i^r\right]_{k_1,\ldots,k_s}$ – матрицы, образованные столбцами $k_1,\ldots,k_s$ матриц $\mathbf{A}\left[i^r\right]$, $\mathbf{A}'\left[i^r\right]$ соответственно; $F_1(x),\ldots,F_r(x)$ – произвольная линейно независимая система функций, а $G_1(y),\ldots,G_{N-r}(y)$ – произвольная система функций.

Заметим, что матрицы $\mathbf{A}\left[i^r\right]$ из (15) (19) имеют структуру:

	i_1	...	i_r	j_1	...	j_{N-r}
i_1	1	...	0	0	...	0
...	...	...	...	...	...	...
i_r	0	...	1	0	...	0
j_1	α_{j_1, i_1}	...	α_{j_1, i_r}	0	...	0
...	...	...	...	...	...	...
j_{N-r}	α_{j_{N-r}, i_1}	...	α_{j_{N-r}, i_r}	0	...	0

Таким образом, любое решение уравнения (11) можно представить в виде (19) при соответствующем выборе матрицы $\mathbf{A}\left[i^r\right]$ и системы функций $F_1(x),...,F_r(x)$, $G_1(y),...,G_{N-r}(y)$ с указанными свойствами, и наоборот, всякая система функций, имеющая вид (19), является решением уравнения (11).

Для нахождения всех решений уравнения (11) необходимо решать 2^N систем переопределенных обыкновенных дифференциальных уравнений (по количеству различных матриц (16), равному $\sum_{r=0}^{N} C_N^r = 2^N$). При этом возникает следующая сложность: в каждой системе имеется $(N-r)\times r$ постоянных разделения $\alpha_{j,i}$, подлежащих дополнительному определению. В итоге полученные в [6] результаты оказываются малопригодными к практическому применению из-за своей громоздкости и сложности.

Заметим, что эти недостатки ОМФ были в значительной мере устранены в [7], где установлено, что ***различные матрицы*** $\mathbf{A}\left[i^r\right]$ ***для одного и того же r подобны.*** Данный факт исключает необходимость рассмотрения всей совокупности из 2^N систем обыкновенных дифференциальных уравнений, и позволяет ограничиться решением не более чем $(N-2)$ систем.

2. Адаптация обобщенного метода Фурье к решению задач прикладной физики

В настоящем разделе, развивая ОМФ, мы находим общие закономерности, позволяющие при реализации ОМФ-s ограничиться рассмотрением $(N\text{-}2s)$ систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Примечателен тот факт, что весьма широкий и значимый спектр задач прикладной физики (электродинамика, акустика, явления переноса и т.д.) сводится к уравнениям вида (1) - (4). Осуществляя в них преобразования линейной части операторов, получаем одну из следующих видов задач:

$$
\begin{gathered}
\sum_{k=1}^{s} X_k''(x)\,Y_k(y)-\sum_{k=1}^{s} X_k(x)\,Y_k''(y)-\left(\sum_{i=1}^{s_1} e_{1i}(x)\,h_{1i}(y)\right)\left(\sum_{k=1}^{s} X_k'(x)\,Y_k(y)\right)+\\
+\left(\sum_{i=1}^{s_2} e_{2i}(x)\,h_{2i}(y)\right)\left(\sum_{k=1}^{s} X_k(x)\,Y_k'(y)\right)+\left(\sum_{i=1}^{s_3} e_{3i}(x)\,h_{3i}(y)\right)\left(\sum_{k=1}^{s} X_k(x)\,Y_k(y)\right)+\sum_{k=1}^{t} \Phi_k(x)\,\mathrm{T}_k(y)+ \qquad (20)\\
+\sum_{j=1}^{n} \tilde{\tilde{L}}_{jx}\left(X_1(x),\, X_2(x),\, ...,\, X_s(x)\right)\tilde{\tilde{L}}_{jy}\left(Y_1(y),\, Y_2(y),\, ...,\, Y_s(y)\right)=0\,;
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
\sum_{k=1}^{s} X_k''(x)\,Y_k(y)-\left(\sum_{i=1}^{s_1} e_{1i}(x)\,h_{1i}(y)\right)\left(\sum_{k=1}^{s} X_k'(x)\,Y_k(y)\right)+\\
+\left(\sum_{i=1}^{s_2} e_{2i}(x)\,h_{2i}(y)\right)\left(\sum_{k=1}^{s} X_k(x)\,Y_k'(y)\right)+\left(\sum_{i=1}^{s_3} e_{3i}(x)\,h_{3i}(y)\right)\left(\sum_{k=1}^{s} X_k(x)\,Y_k(y)\right)+\sum_{k=1}^{t} \Phi_k(x)\,\mathrm{T}_k(y)+ \qquad (21)\\
+\sum_{j=1}^{n} \tilde{\tilde{L}}_{jx}\left(X_1(x),\, X_2(x),\, ...,\, X_s(x)\right)\tilde{\tilde{L}}_{jy}\left(Y_1(y),\, Y_2(y),\, ...,\, Y_s(y)\right)=0\,;
\end{gathered}
$$

$$\sum_{k=1}^{s} X_k''(x)\,Y_k(y)+\sum_{k=1}^{s} X_k(x)\,Y_k''(y)-\left(\sum_{i=1}^{s_1} e_{1i}(x)\,h_{1i}(y)\right)\left(\sum_{k=1}^{s} X_k'(x)\,Y_k(y)\right)+$$
$$+\left(\sum_{i=1}^{s_2} e_{2i}(x)\,h_{2i}(y)\right)\left(\sum_{k=1}^{s} X_k(x)\,Y_k'(y)\right)+\left(\sum_{i=1}^{s_3} e_{3i}(x)\,h_{3i}(y)\right)\left(\sum_{k=1}^{s} X_k(x)\,Y_k(y)\right)+\sum_{k=1}^{t}\Phi_k(x)\,\mathrm{T}_k(y)+ \qquad (22)$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\tilde{\tilde{L}}_{jx}\left(X_1(x),\,X_2(x),\,\ldots,\,X_s(x)\right)\tilde{\tilde{L}}_{jy}\left(Y_1(y),\,Y_2(y),\,\ldots,\,Y_s(y)\right)=0\,.$$

Рассмотрим уравнения (20) – (22) при выполнении условий

$$\Phi_k \equiv 0,\ \mathrm{T}_k \equiv 0\,. \qquad (23)$$

Количество слагаемых в каждом из уравнений (20)...(22) будет соответственно равно

$$N=(2+s_1+s_2+s_3)\times s, \qquad (24)$$

$$N=(1+s_1+s_2+s_3)\times s, \qquad (25)$$

$$N=(2+s_1+s_2+s_3)\times s\,. \qquad (26)$$

Предложение 1

Число линейно независимых функций $F_1(x),\ldots,F_r(x)$ в (19) для уравнений (20) – (22) не меньше модификации ОМФ-s.

Доказательство: Представим уравнение (20) в виде

$$\left(X_1Y_1''+X_2Y_2''+\ldots+X_sY_s''\right)-\left(e_{11}X_1'\,h_{11}Y_1+\ldots+e_{1s_1}X_s'\,h_{1s_1}Y_s\right)-\left(e_{21}X_1\,h_{21}Y_1'+\ldots+e_{2s_2}X_s\,h_{2s_2}Y_s'\right)-$$
$$-\left(e_{31}X_1\,h_{31}Y_1+\ldots+e_{3s_3}X_s\,h_{3s_3}Y_s\right)-\left(X_1''Y_1+X_2''Y_2+\ldots+X_s''Y_s\right)=0\,. \qquad (27)$$

Предположим, что для $r \langle s$ решение уравнения (20) известно. В качестве линейно независимой системы функций $F_1(x),F_2(x),\ldots,F_r(x)$ в (19) выберем $X_1(x),\,X_2(x),\,\ldots,\,X_r(x)$. Вспомогательные множества (17), (18) построим, используя табл. 1.

Таблица 1

f_i	X_1	X_2	...	$X_{r=1}$	X_r	X_{r+1}	...	X_s	...	$-e_{3s_3}X_s$	$-X_1''$	$-X_2''$	...	$-X_s''$
g_i	Y_1''	Y_2''	...	Y_{r-1}''	Y_r''	Y_{r+1}''	...	Y_s''	...	$h_{3s_3}Y_s$	Y_1	Y_2	...	Y_s
i	1	2	...	$r-1$	r	$r+1$	...	s	...	$N-s$	$N-s+1$	$N-s+2$	...	N
$\{i^r\}$ $\{j^r\}$	i_1	i_2	...	i_{r-1}	i_r	j_1	...	j_{s-r}	...	J_{N-r-s}	$J_{N-r-s+1}$	$J_{N-r-s+2}$	...	J_{N-r}

Тогда из (19) получаем следующие системы обыкновенных дифференциальных уравнений:
для функций **f** :

$$X_{r+1}=\alpha_{r+1,1}\,X_1+\alpha_{r+1,2}\,X_2+\ldots+\alpha_{r+1,r}\,X_r\,; \qquad (28)$$

$$X_{r+2}=\alpha_{r+2,1}\,X_1+\alpha_{r+2,2}\,X_2+\ldots+\alpha_{r+2,r}\,X_r; \qquad (29)$$

...

$$X_s=\alpha_{s,1}\,X_1+\alpha_{s,2}\,X_2+\ldots+\alpha_{s,r}\,X_r; \qquad (30)$$

$$-X_1''=\alpha_{N-s+1,1}\,X_1+\alpha_{N-s+1,2}\,X_2+\ldots+\alpha_{N-s+1,r}\,X_r\,; \qquad (31)$$

$$-X_2''=\alpha_{N-s+2,1}\,X_1+\alpha_{N-s+2,2}\,X_2+\ldots+\alpha_{N-s+2,r}\,X_r; \qquad (32)$$

...

$$-X_s''=\alpha_{N,1}\,X_1+\alpha_{N,2}\,X_2+\ldots+\alpha_{N+2,r}\,X_r\,; \qquad (33)$$

для функций **g** :

$$Y_1'' = -\alpha_{r+1,1} Y''_{r+1} - \alpha_{r+2,1} Y''_{r+2} - \ldots - \alpha_{s,1} Y''_s - \ldots - \alpha_{N-s+1,1} Y_1 - \ldots - \alpha_{N,1} Y_s; \tag{34}$$

$$Y_2'' = -\alpha_{r+1,2} Y''_{r+1} - \alpha_{r+2,2} Y''_{r+2} - \ldots - \alpha_{s,2} Y''_s - \ldots - \alpha_{N-s+1,2} Y_1 - \ldots - \alpha_{N,2} Y_s; \tag{35}$$

$$\ldots$$

$$Y_r'' = -\alpha_{r+1,r} Y''_{r+1} - \alpha_{r+2,r} Y''_{r+2} - \ldots - \alpha_{s,r} Y''_s - \ldots - \alpha_{N-s+1,r} Y_1 - \ldots - \alpha_{N,r} Y_s. \tag{36}$$

Очевидно, что соотношения (28) – (36) указывают на линейную зависимость функций $X_{r+1}(x), \ldots, X_s(x)$ и $X_1(x), \ldots, X_r(x)$, что противоречит изначальному требованию линейной независимости функций $\left(X_1(x),\ X_2(x), \ldots,\ X_s(x)\right)$. Справедливость предложения 1 применительно к уравнению (20) доказана.

Предложение 2

Число линейно независимых функций $F_1(x), \ldots, F_r(x)$ в (19) для уравнений (20) – (22) не превосходит $N-s$, где N – число слагаемых в (20) – (22) и s – модификация ОМФ.

Доказательство. Рассмотрим уравнение (20) в виде (27).

Предположим, что для $r > N-s$ решение уравнения (27) известно. В качестве системы функций $F_1(x), F_2(x), \ldots, F_r(x)$ в (19) выберем

$$X_1(x),\ \ldots,\ X_s(x),\ \ldots, -e_{3\,s_3} X_s,\ \ldots, -X_1''(x),\ \ldots,\ X''_{r-N+s}(x), \tag{37}$$

а вспомогательные множества (17), (18) – в соответствии с табл. 2.

Таблица 2

f_i	X_1	…	X_s	…	$-e_{3\,s_3} X_s$	$-X_1''$	$-X_2''$	…	$-X''_{r-N+s}$	$-X''_{r-N+s+1}$	…	$-X''_{s-1}$	$-X''_s$
g_i	Y_1''	…	Y_s''	…	$h_{3\,s_3} Y_s$	Y_1	Y_2	…	Y_{r-N+s}	$Y_{r-N+s+1}$	…	Y_{s-1}	Y_s
i	1	…	s	…	$N-s$	$N-s+1$	$N-s+2$	…	r	$r+1$	…	$N-1$	N
$\{i^r\}$ $\{j^r\}$	i_1	…	i_s	…	i_{N-s}	i_{N-s+1}	i_{N-s+2}	…	i_r	j_1	…	J_{N-r-1}	J_{N-r}

Тогда (19) эквивалентно следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

для функций **f** :

$$-X''_{r-N+s+1} = \alpha_{r+1,1} X_1 + \alpha_{r+1,2} X_2 + \ldots - \alpha_{r+1,N-s+1} X_1'' - \ldots - \alpha_{r+1,r} X''_{r-N+s}; \tag{38}$$

$$\ldots$$

$$-X_s'' = \alpha_{N,1} X_1 + \alpha_{N,2} X_2 + \ldots - \alpha_{N,N-s+1} X_1'' - \ldots - \alpha_{N,r} X''_{r-N+s}; \tag{39}$$

для функций **g** :

$$Y_1'' = -\alpha_{r+1,1} Y_{r-N+s+1} - \ldots - \alpha_{N-1,1} Y_{s-1} - \alpha_{N,1} Y_s; \tag{40}$$

$$\ldots$$

$$Y_1 = -\alpha_{r+1,N-s+1} Y_{r-N+s+1} - \ldots - \alpha_{N-1,N-s+1} Y_{s-1} - \alpha_{N,N-s+1} Y_s; \tag{41}$$

$$\ldots$$

$$Y_{r-N+s} = -\alpha_{r+1,r} Y_{r-N+s+1} - \ldots - \alpha_{N-1,r} Y_{s-1} - \alpha_{N,r} Y_s. \tag{42}$$

Очевидно, что соотношения (41) – (42) указывают на линейную зависимость функций $Y_1(y), \ldots, Y_{r-N+s}(y)$ и $Y_{r-N+s+1}(y), \ldots, Y_s(y)$, что противоречит изначальному требованию линейной независимости функций $\left(Y_1(y), Y_2(y), \ldots, Y_s(y)\right)$. Справедливость предложения 2 применительно к уравнению (20) доказана.

Аналогичным образом доказывается справедливость предложений 1 и 2 применительно к уравнениям (21), (22).

Непосредственно из предложений 1 и 2 вытекает

ТЕОРЕМА. Для построения общего решения уравнения (1) – (5), преобразованного к виду (11), достаточно получить решения $N-2s$ ***систем обыкновенных дифференциальных уравнений вида***

$$\left(\mathbf{E}-\mathbf{A}\left[i^r\right]\right)\mathbf{f}=0,\mathbf{A}'\left[i^r\right]\mathbf{g}=0,$$

где $\mathbf{A}\left[i^r\right]$ ***– матрица размерности*** $N\times N$***, элементы которой определяются следующими соотношениями:***

$$a_{ij}=\sum_{i'\in\{i^r\}}\delta_{ii'}\delta_{i'j}+\sum_{i'\in\{i^r\}}\sum_{j'\in\{j^r\}}\alpha_{ij}\delta_{ii'}\delta_{i'j}$$

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, i=j,\\ 0, i\neq j;\end{cases}$$

α_{ij} ***– произвольные числовые коэффициенты,*** $\left\{i^r\right\}$, $\left\{j^r\right\}$ ***– для каждого*** $r=\overline{s,N-s}$ ***одна из возможных пар упорядоченных целочисленных множеств, таких, что***

$$\left\{i^r\right\}=\left\{i_1,\dots,i_r\right\};\left\{j^r\right\}=\left\{j_1,\dots,j_{N-r}\right\};\left\{i^0\right\}=\varnothing;\left\{j^0\right\}=\left\{1,2,\dots,N\right\};$$

$$1\le i_1\langle i_2\langle\dots\langle i_r\le N;\ 1\le j_1\langle j_2\langle\dots\langle j_{N-r}\le N;\ \left\{i^r\right\}\cup\left\{j^r\right\}=\left\{1,2,\dots,N\right\};\ \left\{i^r\right\}\cap\left\{j^r\right\}=\varnothing.$$

Заключение

При решении задач вида (20) - (22) с использованием ОМФ-s достаточно ограничиться рассмотрением N $-2s$ систем обыкновенных дифференциальных уравнений, эквивалентных исходному дифференциальному уравнению с частными производными, вместо используемых для этих целей 2^N таких систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Юшкевич А.П. История математики в России до 1917 года. - М.: Наука, 1968. - 591 с.
2. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. - 2-е изд. - М.: Наука, 1982. - 336 с.
3. Миллер У. Симметрия и разделение переменных. - М.: Мир, 1981. - 342 с.
4. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. - М.: Изд-во иностранной литературы, 1958. Т. 1 .- 930 с.
5. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. - М.: Издательство иностранной литературы, 1960. Т.2. - 896 с.
6. Скоробогатько В.Я. Исследования по качественной теории дифференциальных уравнений с частными производными. - Киев: Наукова думка, 1980. - 239 с.
7. Андрушкевич И.Е. Об одном обобщении метода Фурье разделения переменных // Электромагнитные волны & Электронные системы. - № 4, Т. 3. - 1998. - С. 4 - 17.
8. Андрушкевич И.Е. Об алгебраическом методе разделения переменных в уравнении Дирака // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. - № 6(27). - 2004. - С. 158 - 164.