УДК 512.542

О КВАЗИЛОКАЛЬНЫХ ФУНКЦИЯХ ХАРТЛИ

В.Н. ЗАГУРСКИЙ
(Витебский государственный университет им. П.М. Машерова)

Изучаются квазилокальные функции Хартли как отображения множества всех простых чисел во множество классов групп. Доказано существование локальных классов Фиттинга, определяемых квазилокальными функциями Хартли, которые не являются локальными.

Все рассматриваемые в данной работе группы конечны. Напомним, что класс группы $\mathfrak{X}$ называют: 1) S_n-замкнутым, если $G \in \mathfrak{X}$ и $N \trianglelefteq G$, то $N \in \mathfrak{X}$; 2) N_0-замкнутым, если $G = N_1N_2$, где $N_i \trianglelefteq G$ и $N_i \in \mathfrak{X}$ ($i = 1,2$), то $G \in \mathfrak{X}$.

Класс группы $\mathfrak{X}$ называется классом Фиттинга, если он одновременно S_n-замкнут и N_0-замкнут. Из определения следует, что для любого непустого класса Фиттинга $\mathfrak{X}$ в любой группе G существует единственная $\mathfrak{X}$ -максимальная нормальная подгруппа $G_{\mathfrak{X}}$ группы G. Ее называют $\mathfrak{X}$ -радикалом G. Произведение $\mathfrak{X}\mathfrak{H}$ классов Фиттинга $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{H}$ – это класс всех групп G, для которых $G/G_{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{H}$.

Хорошо известно, что произведение классов Фиттинга является классом Фиттинга и операция умножения классов Фиттинга ассоциативна. Через $\mathfrak{N}$ обозначается класс всех нильпотентных групп, $\mathfrak{N}_\pi$ – класс всех нильпотентных π -групп.

Хартли [1] был предложен метод изучения конечных разрешимых групп в терминах p-групп и радикалов, определяемых посредством отображений f, локальных функций Хартли или локальных H-функций [2], множества P всех простых чисел во множества классов Фиттинга.

Напомним, что класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называют локальным [3], если $\mathfrak{F} = LR(f)$ для некоторой локальной H-функции f. При этом $LR(f)$ класс вида:

$$\mathfrak{E}_\pi \cap (\cap_{p\in\pi} f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}), \tag{1}$$

где $\pi = \{p \in P | f(p) \neq \varnothing\}$ – носитель f.

Расширяя понятия [3], отображение $f: P \to$ {классы групп} назовем квазилокальной функцией Хартли или квазилокальной H_Q-функцией. Если класс Фиттинга $\mathfrak{F} = LR_Q(f)$ для некоторой H_Q-функции f, то $\mathfrak{F}$ назовем квазилокальным. При этом $LR_Q(f)$ класс вида (1).

Очевидно, что каждая локальная H-функция класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ является квазилокальной. В связи с этим возникает следующий вопрос: существуют ли локальные классы Фиттинга определяемые H_Q- функциями, которые не являются локальными? В нашей работе мы даем утвердительный ответ на этот вопрос.

Заметим, что $G_{\mathfrak{N}} = F(G)$ – подгруппа Фиттинга группы G. Множество всех простых делителей порядка группы G обозначаются через $\pi(G)$, а наибольшую нормальную p-группу подгруппы G – через $O_p(G)$.

Другие определения и обозначения при необходимости можно найти в [4, 5].

ЛЕММА [5]. *Если группа N субнормальна в группе G и $\mathfrak{F}$ – непустой класс Фиттинга, то $N_{\mathfrak{F}} = N \cap G_{\mathfrak{F}}$.*

В [6] нами доказано, что локальный класс Фиттинга $\mathfrak{N}_\pi$ всех нильпотентных π-групп определяется H_Q-функцией x, такой, что

$$x(p) = \begin{cases} (G/G_{\mathfrak{N}_\pi} \in \mathfrak{N}_p), \text{ если } p \in \pi, \\ \varnothing, \text{ если } p \in \pi', \end{cases} \tag{2}$$

Доказательство того, что H_Q-функция x не является локальной, и тем самым утвердительный ответ на указанный во введении вопрос дает

ТЕОРЕМА. *Пусть π такое множество простых чисел, что $\{2,3\} \subseteq \pi$. Тогда функция (2) квазилокальна и не является локальной.*

Доказательство. Покажем, что $x(p)$ не является классом Фиттинга для $p = 3$.

Пусть $Y = SL(2,3)$ – специальная линейная группа степени 2 над полем $GF(3)$. Поэтому порядок группы Y равен 24, и она содержит единственную минимальную нормальную подгруппу D, причем $D = Z(Y)$ и $|D| = 2$.

Пусть $H = Y_1 \cdot Y_2$, где $Y_i \cong Y$ для $i = 1,2$ и $\tilde{D} = \{(d, d) | d \in D\}$. Следовательно, $\tilde{D}$ является минимальной нормальной подгруппой в H и $|\tilde{D}| = 2$.

Ввиду леммы [7] H/D имеет точное неприводимое представление Φ над полем $GF(3)$. Будем считать, что пространство представления Φ является векторное пространство V над полем $GF(3)$, и значит V является 3-группой. Поэтому отображение $\Phi{:}H/D \to GL(V)$ – изоморфизм группы $H/\tilde{D}$ и некоторой подгруппы линейной группы $GL(V)$ всех автоморфизмов пространства V. Зададим отображение

$$\varphi : H \to GL(V),$$

полагая $\varphi(h) = \Phi(h\tilde{D})$ для всех $h \in H$.

Так как

$$\varphi(h_1h_2) = \Phi((h_1\tilde{D})(h_2\tilde{D})) = \Phi(h_1\tilde{D})\Phi(h_2\tilde{D}) = \varphi(h_1)\varphi(h_2)$$

для любых h_1, h_2 из H, то φ – гомоморфизм.

Пусть $G = [V]H$ – полупрямое произведение нормальной подгруппы V и подгруппы H, причем H действует на V посредством гомоморфизма φ.

Пусть $Ker\ \varphi = \{h \in H | \varphi(h) = 1\}$ – ядро гомоморфизма φ. Покажем, что справедливо равенство

$$Ker\ \varphi = \tilde{D}. \tag{3}$$

Если $h \in \tilde{D}$, то $\varphi(h) = \Phi(h\tilde{D}) = \Phi(\tilde{D}) = 1$, и поэтому $\tilde{D} \subseteq Ker\ \varphi$. Обратно, пусть $h \in Ker\ \varphi$. Следовательно, $\Phi(h\tilde{D}) = \varphi(h) = 1$. Так как Φ – изоморфизм, то $h\tilde{D} = \tilde{D}$ и значит, $h \in \tilde{D}$. Это означает, что $Ker\ \varphi \subseteq \tilde{D}$ и равенство (3) доказано.

Заметим, что $\pi(Y) = \{2,3\}$ и $\pi(V) = \{3\}$. Тогда $\pi(G) = \{2,3\}$ и $F(G) = O_3(G)O_2(G)$.

Докажем, что $O_3(G) = V$ и $O_2(G) = \tilde{D}$. Так как $\pi(Y) = \{2,3\}$ и $F(Y)$ – силовская 2-подгруппа в Y, то $F(H) = F(Y_1)F(Y_2) = O_2(H)$. Значит, $O_3(H) = 1$. Поскольку $V \lhd G$ и $\pi(V) = \{3\}$, то $V \le O_3(G) \le G$. Тогда по тождеству Дедекинда справедливо равенство $O_3(G) \cap VH = V(O_3(G) \cap H)$. Также ввиду $O_3(G) \cap H \trianglelefteq H$ и $O_3(H) = 1$, получаем $O_3(G) \cap H = 1$. Кроме того, $G = VH$, и следовательно $O_3(G) = V$.

Поскольку $\pi(V) = \{3\}$, то $O_2(G) \le H$. Из свойств полупрямого произведения следует, что если $N \trianglelefteq H$, то N является нормальной подгруппой в G тогда и только тогда, когда $N \le Ker\ \varphi$. Поэтому, учитывая $O_2(G) \trianglelefteq H$ и равенство (3), мы получаем, что $O_2(G) \le \tilde{D}$. Но $|\tilde{D}| = 2$, и значит $O_2(G) = \tilde{D}$.

Таким образом, $F(G) = O_3(G)O_2(G) = V\tilde{D}$.

Из свойств полупрямого произведения следует, что $G = VY_1 \cdot VY_2$ и $VY_i \lhd G$ для $i = 1,2$.

Тогда по лемме:

$$F(VY_i) = F(G) \cap VY_i = V\tilde{D} \cap VY_i = V \in \mathfrak{S}_3.$$

Теперь из условия $\{2,3\} \subseteq \pi$ и $\pi(VY_i) = \{2,3\}$ вытекает, что

$$(VY_i) = (VY_i) = O_2(VY_i)O_3(VY_i) = F(VY_i).$$

Аналогично, $G_{\mathfrak{N}_\pi} = F(G)$. Значит, $(VY_i)_{\mathfrak{N}_\pi} \in \mathfrak{S}_3$ и $G_{\mathfrak{N}_\pi} = V\tilde{D} \notin \mathfrak{S}_3$.

Следовательно, по определению функции x получаем $VY_i \in x(3)$ для $i = 1,2$ и $G \notin x(3)$.

Итак, класс группы $x(3)$ не является N_0- замкнутым и поэтому не является классом Фиттинга. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hartley B. On Fisher's Dualization of formation theory // Proc. London Math. Soc. - 1969. - V. 3, № 2. - P. 193 -207.
2. Воробьев Н.Т. О предположении Хоукса для радикальных классов // Сибирский математический журнал. - 1996. - Т. 37, № 6. - С. 1296 - 1302.
3. D'Arcy P. Locally defined Fitting classes // J. Austral. Math. Soc. - 1975. - V. 20, № 1. - P. 25 - 31.
4. Шеметков Л.А. Формации конечных групп. - М.: Наука, 1978. - 272 с.
5. Doerk K., Hawkes T. Finite solvable groups // Walter de Gryeter. New-York - Berlin, 1992.- 891 p.
6. Загурский В.Н., Воробьев Н.Т. О квазилокальных классах Фиттинга // Междунар. алгебраическая конф., посв, памяти З.И. Боревича, Санкт-Петербург, 17-23 сентября 2002 г. - СПб., 2002. - С. 26 - 27.
7. Doerk K. Zur Theorie der Formationen endlicher aufldsbarer Gruppen // J. Algebra. - 1969. - Bd. 13, № 3. - S. 345 -373.