УДК 512.542

О ПОДГРУППАХ ШМИДТА ЧЕТНОГО ПОРЯДКА В КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ

д-р физ.-мат. наук, проф. Э.М. ПАЛЬЧИК, С.Ю. БАШУН
(Полоцкий государственный университет)

Доказывается, что конечная группа, у которой p'-подгруппы Шмидта четного порядка имеют одинаковый порядок при p > 3, либо разрешима, либо имеет секцию $L_2(8)$. Отсюда получается результат, что конечная группа, у которой перестановочны все p'-подгруппы Шмидта различных четных порядков, может иметь простые неабелевы композиционные факторы изоморфные лишь $L_2(8)$.

Подгруппы Шмидта играют важную роль в теории конечных групп. Подробный обзор в этом направлении можно найти, например, в [1]. В этой работе исследуются некоторые свойства конечных групп, связанные с подгруппами Шмидта четного порядка. Поэтому эта работа примыкает к работе [2], в которой, в частности, описаны простые неабелевы группы, у которых все {2, 3}-подгруппы Шмидта 3-замкнуты или их нет.

Используются обозначения и терминология из [3, 4].

ТЕОРЕМА 1. Пусть X – конечная группа и p – простой делитель порядка $|X|$ группы X, $p > 3$. Предположим, что в X нет 2-замкнутых $2d$-подгрупп Шмидта, порядки которых взаимно просты с p. Тогда либо группа X разрешима, либо имеет секцию вида $L_2(2^r)$ или $Sz(2^r)$, где в обоих случаях r – простое число.

Доказательство. Можно считать, что X не имеет секций вида $L_2(2^r)$ или $Sz(2^r)$.

Пусть M – собственная подгруппа из X. Если p не делит $|M|$, то из теоремы С.А. Чунихина [4, теорема 4.3.1] следует, что M – $2'$-замкнутая подгруппа в X.

Пусть теперь p делит $|M|$. По индуктивному предположению M – разрешимая группа.

Итак, X – группа, все собственные подгруппы которой разрешимы.

Предположим, что $1 \neq K \lhd X$ и $K \subset X$. Из леммы 5 в [5] следует, что группа $\overline{X} = X / K$ не может иметь 2-замкнутых $2d$-подгрупп Шмидта порядка взаимно простого с p. Применение индукции дает нам разрешимость группы $\overline{X}$. Ясно тогда, что и X – разрешимая группа.

Поэтому впредь можно считать, что X – простая неабелева группа, все собственные подгруппы которой разрешимы. Такие группы описаны Томпсоном (см., например, [3, замечание 2.7.5]).

Это группы:

$L_2(2^r)$, r – простое число;

$L_2(3^r)$, r – нечетное простое число;

$L_2(r)$, r – простое число, $r > 3$, $r^2 + 1 \equiv 0\ (mod\ 5)$; (1)

$Sz(2^r)$, r – нечетное простое число;

$L_3(3)$.

Из результата В.С. Монахова [2] следует, что $X \in \{L_2(2^n),\ n = 2k + 1,$

$U_3(2^n),\ n \not\equiv 0\ (mod 3);\ Sz(2^{2k+1})\}$, так как у этих групп нет 2-замкнутых $3d$-подгрупп Шмидта. Вместе с (1) это доказывает теорему.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть X – конечная группа и p – простой делитель порядка группы X, $p > 3$. Предположим, что в X либо нет p'-подгрупп Шмидта четного порядка, либо имеется только один класс изоморфных p'-подгрупп Шмидта четного порядка. Тогда либо группа X разрешима, либо имеет секции, изоморфные только $L_2(8)$.

Доказательство. По теореме 2 из [6] можно считать, что в X имеется $2'$-замкнутая $2d$-подгруппа Шмидта S, и $(|S|, p) = 1$. По теореме 1 можно считать, что в X имеется секция $\overline{G} = L_2(2^r)$ или $Sz(2^r)$, где в обоих случаях r – простое число. Из теоремы 11.3.10 в [7] следует, что в группе $\overline{G} \cong Sz(2^r)$ имеются холловы подгруппы H, A_1, A_2 порядков соответственно $2^r - 1$, $2^r - 2\cdot 2^{(r-1)/2} + 1$ и $2^r + 2\cdot 2^{(r-1)/2} + 1$, нормализаторы которых являются группами Фробениуса порядков $2\cdot|H|$, $4\cdot|A_1|$, $4\cdot|A_2|$ соответственно. Если даже $p = |H|$ или $p = |A_1|$, или $p = |A_2|$, то в любом случае имеются $2'$-замкнутые $2d$-подгруппы Шмидта различных порядков в $\overline{G}$. По лемме 5 в [5] тогда и в X есть неизоморфные подгруппы Шмидта четного порядка. Это невозможно по условию.

Предположим, что в X имеется секция $\overline{G} \cong L_2(2^r)$, r – простое число, $|G| = 2^r(2^r-1)(2^r+1)$. Предположим, что p делит $(2^r - 1)$. Тогда в $\overline{G}$ есть подгруппа Шмидта порядка $2 \cdot t$, где t – простой делитель числа $2^r + 1$ [3, теорема 2.8.27]. Не нарушая общности, ввиду леммы 5 в [5] можно считать, что $|S| = 2 \cdot t^k$, $k \geq 1$. Так как по условию в $\overline{G}$ нет подгрупп Шмидта четного порядка, не изоморфных с S, то $2^r + 1 = t^\alpha$ ввиду теоремы 2.8.27 в [3]. Тогда по теореме Жигмонди [8] $\alpha = 1$ и t – простое число Ферма, или $\alpha = 2$, $t = 3$ и $\overline{G} \cong L_2(8)$. Случай $\alpha = 1$ и t – простое число Ферма невозможен по условию, так как тогда по условию и теореме 2.8.27 в [3] и $2^r - 1 = p^\beta$, опять по теореме из [8] $\beta = 1$, $p = 2^r - 1$, $|G| = 2^r \cdot p \cdot t$. Из $p < t$ теперь следует $p = 3$, что противоречит условию $p > 3$.

Предположим теперь, что p делит $(2^r + 1)$. Тогда из условия и теоремы 2.8.27 в [3] следует, что $2^r - 1 = t^\alpha$, где t – простое число. Откуда по [8] $\alpha = 1$. Поэтому t – простое число Мерсенна. Но тогда по условию и теореме 2.8.27 в [3] имеем $2^r + 1 = p^\beta$. Опять по [8] $\beta = 1$, p – простое число Ферма, или $r = 3$, $p = 3$, $\beta = 2$. В первом случае $|G| = 2^r \cdot t \cdot p$, и $t < p$ влечет $t = 3$. Но тогда $2^r + 1 = 3$ влечет $r = 1$, что невозможно по условию. Во втором случае $p = 3$, что невозможно по условию. Следствие доказано.

ТЕОРЕМА 2. Пусть X – конечная группа, p – нечетный простой делитель порядка группы X, $p > 3$. Если в X нет двух классов неизоморфных p'-подгрупп Шмидта четных порядков, то X может иметь простые неабелевы композиционные факторы только вида $L_2(8)$.

Доказательство. Предположим, что X – неразрешимая группа. По следствию в X есть секция $\overline{G} \cong L_2(8)$. Поэтому в $\overline{G}$ есть p'-подгруппа Шмидта $\overline{S}$ порядка 2.3. Пусть $N \lhd G$ и $\overline{G} = G/N$. По лемме 5 в [5] в G тогда есть 3-замкнутая $\{2, 3\}$-подгруппа Шмидта $S_0 \subseteq S$, $S_0 \not\subseteq N$. По условию теоремы все $\{2, 3\}$-подгруппы Шмидта в X должны быть изоморфны S_0, т.е. быть 3-замкнутыми. По теореме Монахова [2] простые неабелевы композиционные факторы группы X должны быть группами вида $L_2(2^n)$, $n = 2k+1$, $U_3(2^n)$, $n \not\equiv 0(3)$, $Sz(2^{2k+1})$, $k \geq 1$. Как и в доказательстве следствия, легко показывается, что X не может иметь секций вида $Sz(2^{2k+1})$.

Предположим, что в X есть секции $\overline{G}$ вида $U_3(2^n)$, $n \not\equiv 0(mod 3)$. По условию теоремы в X нет 2-замкнутых $2d$-подгрупп Шмидта порядка взаимно простого с p (ввиду наличия S_0). В $\overline{G}$ есть 2-замкнутая подгруппа Фробениуса $\overline{L}$ порядка $(2^n - 1) \cdot 2^{3n}$ (см., например, [9, с. 166]). Поэтому $2^n - 1 = p^k$. По теореме Жигмонди из [8] $k = 1$ и p – простое число Мерсенна. Тогда 3 делит $2^n + 1$ $(3 \neq p)$. По теореме 6.5.3 в [10] в $\overline{G}$ есть подгруппа $\overline{K}$ порядка $\frac{(2^n+1)^2}{3} \cdot 6$, являющаяся расширением абелевой подгруппы порядка $\frac{(2^n+1)^2}{3}$ с помощью S_3. Так как по условию в X (и, значит, в $\overline{K}$ (по лемме 5 в [5]) не может быть 2′-замкнутых подгрупп Шмидта, отличных от $\{2, 3\}$-групп, то $2^n + 1 = 3^\beta$. Опять по теореме Жигмонди, из [8] либо $\beta = 1$, либо $\beta = 2$. В первом случае $n = 1$. Во втором $n = 3$. Тогда $\overline{G} \cong U_3(8)$, что противоречит факту $n \not\equiv 0$ $(mod 3)$. Итак, X не может иметь секции $U_3(2^n)$.

Пусть теперь в X есть композиционный фактор $\overline{G} \cong L_2(2^n)$, $n = 2k+1$. Как и в доказательстве следствия, легко показывается, что только группа $L_2(8)$ имеет один класс 7′-подгрупп Шмидта порядка $2 \cdot 3$. Остальные группы серии $L_2(2^n)$ (при $n > 3$) имеют p'-подгруппы Шмидта различных четных порядков. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3. Пусть X – конечная группа, p – простой делитель ее порядка, $p > 3$. Предположим, что в X перестановочны все p'-подгруппы различных четных порядков или таковых нет. Тогда либо группа разрешима, либо имеет композиционные факторы только вида $L_2(8)$.

Доказательство. Пусть X – контрпример минимального порядка. Предположим, что $1 \neq N \lhd X$ и $N \subset X$. Покажем, что группа $\overline{X} = X/N$ удовлетворяет условию теоремы. Итак, пусть $\overline{H}$ и $\overline{K}$ – неизоморфные p'-подгруппы Шмидта четного порядка. По лемме 5 из [5], в H и K имеются неизоморфные p'-подгруппы

Шмидта H_0 и K_0 такие, что $<\overline{H_0}^{\overline{H}}> = \overline{H}$, $<\overline{K_0}^{\overline{K}}> = \overline{K}$. По условию теоремы $H_0^x K_0^y = K_0^y H_0^x$, для всех $x, y \in X$. Хорошо известно, что и порождения перестановочных подгрупп перестановочны, т.е. $<H_0^H><K_0^K> = <K_0^K><H_0^H>$. Известно также, что тогда и их гомоморфные образы перестановочны, т.е. $<\overline{H_0}^{\overline{H}}><\overline{K_0}^{\overline{K}}> = \overline{H}\,\overline{K} = \overline{K}\,\overline{H} = <\overline{K_0}^{\overline{K}}><\overline{H_0}^{\overline{H}}>$. Поэтому применение предположения индукции к $\overline{X}$ и N дает нам заключение теоремы для $\overline{X}$ и N. Очевидно, что тогда и X удовлетворяет заключению теоремы. Поэтому впредь можно считать, что X – простая неабелева группа.

По теореме 2 можно считать, что в X есть неизоморфные p'-подгруппы S и T четных порядков. По условию $ST^x = T^xS$ для всех $x \in X$. По теореме Кегеля [3, теорема 6.4.10], $X = TS$. Из результата Монахова [11] следует, что $X \cong L_2(5)$, $L_2(11)$, $L_2(8)$. Группа $L_2(11)$ имеет порядок $2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$ и поэтому не может быть произведением $2d$-групп S и T. В $L_2(5)$ есть неизоморфные $5'$-подгруппы Шмидта порядка $2^2 \cdot 3$ и $2 \cdot 3$. Тогда $X \neq TS$. Поэтому $X \cong L_2(8)$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Монахов В.С. Подгруппы Шмидта, их существование и некоторые приложения // Праці Українського математического конгресса-2001, Алгебра і теорія чисел / Київ: Інститут математики НАН України. - Киев, 2002. - С. 81 - 90.
2. Монахов В.С. О подгруппах Шмидта конечных групп // Вопросы алгебры. - Гомель: Изд-во Гомельского ун-та, 1998. - Вып. 13. - С. 153-171.
3. Huppert B. Endliche Gruppen, I. Berlin: Springer - Verlag, 1967. - 793 S.
4. Чунихин С.А. Подгруппы конечных групп. - Мн.: Наука и техника, 1964. - 154 с.
5. Пальчик Э.М., Голубева О.В. О подгруппах Шмидта простых неабелевых К-групп // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. - Гомель: Изд-во Гомельского ун-та - 2000. - № 3 (16) (Вопросы алгебры). - С. 138 - 144.
6. Голубева О.В. О существовании подгрупп Шмидта у конечной группы // Весці НАН Беларусь Сер. фіз.-мат. навук. - 2001. - № 2. - С. 44 - 47.
7. Huppert B., Blackburn N. Finite groups, 111. Berlin: Springer - Verlag. - 1982. - 454 p.
8. Zsigmondy K. Zur theorie der Potenzrests // Monatsh. Math. Phys. - 1892. - V. 3. - P. 265 - 284.
9. Горенстейн Д. Конечные простые группы. Введение в их классификацию. - М.: Мир, 1985. - 352 с.
10. Gorenstein D., Lyons R., Solomon R. The classification of the finite simple groups // Math. Surveys and monogr. - 1994. - V. 40. - № 3. - 419 p.
11. Монахов В.С. Произведение конечных групп, близких к нильпотентным // Конечные группы. - Мн.: Наука и техника, 1975. - С. 70 - 100.