МАТЕМАТИКА

УДК 512. 542

О РАЗРЕШИМОСТИ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ИНДЕКСАМИ НЕНИЛЬПОТЕНТНЫХ МАКСИМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП

Д.А. ХОДАНОВИЧ
(Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины)

Доказывается, что конечная группа G, все максимальные подгруппы которой либо нильпотентны, либо имеют своим индексом простое число или квадрат простого числа, разрешима и $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{N}_2\mathfrak{U}$.

1. Введение

Согласно известной теореме Ф. Холла [1, теорема VI.9.4], конечная группа, у которой индексы максимальных подгрупп простые числа или квадраты простых чисел, является разрешимой. Более детальное изучение конечных групп с такими индексами максимальных подгрупп осуществлено в работах С.Ф. Каморникова [2], В.С. Монахова, М.В. Селькина и Е.Е. Грибовской [3, 4].

Группой Шмидта называют ненильпотентную группу, у которой все собственные подгруппы нильпотентны. Еще в 1924 году О.Ю. Шмидт доказал, что группы Шмидта разрешимы и их порядок делится в точности на два различных простых числа [5]. Обзор результатов о группах Шмидта и перспективы их приложений в теории конечных групп содержатся в статье В.С. Монахова [6].

Вполне естественно возникает задача изучения строения конечной группы, у которой максимальные подгруппы либо нильпотентны, либо имеют своим индексом простое число или квадрат простого числа.

ТЕОРЕМА. Если в конечной группе G индекс каждой ненильпотентной максимальной подгруппы есть простое число либо квадрат простого числа, то группа G разрешима и $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{N}_2\mathfrak{U}$.

Кроме того, доказано, что в классе всех разрешимых групп принадлежность группы $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{N}_2\mathfrak{U}$ остается истинной, если индекс каждой ненильпотентной максимальной подгруппы есть простое число либо квадрат простого числа, или число 8.

2. Основные используемые результаты и понятия

Используются следующие обозначения:

p, q, r - некоторые простые числа;

$a \equiv b(\bmod p)$ - число a сравнимо с числом b по модулю числа p;

$|G|$ - порядок группы G;

E - единичная подгруппа группы G;

Ф(С) - подгруппа Фраттини группы G, т.е. пересечение всех максимальных подгрупп группы;

$F(G)$ - подгруппа Фиттинга группы G, т.е. произведение всех нормальных нильпотентных подгрупп группы G;

$S(G)$ - наибольшая нормально разрешимая подгруппа группы G;

$O_p(G)$ - наибольшая нормальная p-подгруппагруппы G;

G_p - силовская p-подгруппа группы G;

$G_{p'}$ - дополнение к силовской p-подгруппе в группе G, т.е. p' -холлова подгруппа группы G;

Z_n - циклическая группа порядка n

$GL(n,p^m)$ - полная линейная группа степени n надполем из p^m элементов;

E_{p^n} - элементарная абелева p-группа порядка p^n

$[A]B$ - полупрямое произведение нормальной подгруппы A и подгруппы B;

$A \cong B$ - A и B изоморфны;

$r(G)$ - главный ранг группы G;

$n(G)$ - нильпотентная длина группы G;

$d(G)$ - производная длина группы G;

$\mathfrak{N}$ – класс всех нильпотентных групп;

$\mathfrak{N}_2$ – класс всех 2-групп;

$\mathfrak{N}_{2'}$ – класс всех нильпотентных групп нечетного порядка;

$\mathfrak{U}$ – класс всех сверхразрешимых групп;

$\mathfrak{A}$ – класс всех абелевых групп.

Понятия, соответствующие введенным обозначениям, можно более детально изучить, например, в пособии [7].

Пусть $\mathfrak{F}$ – некоторый класс групп и G-группа. $G^{\mathfrak{F}}$ – $\mathfrak{F}$-корадикал группы G, т.е. пересечение всех тех нормальных подгрупп N из G, для которых $G/N \in \mathfrak{F}$.

Если $\mathfrak{F}$ – формация, то $G^{\mathfrak{F}}$ является наименьшей нормальной подгруппой группы G, фактор-группа по которой принадлежит $\mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}$ – формация всех сверхразрешимых групп, то $G^{\mathfrak{U}}$ называется сверхразрешимым корадикалом группы G.

Формация $\mathfrak{F}$ называется насыщенной, если всегда из условия $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ следует, что и $G \in \mathfrak{F}$. Класс групп $\mathfrak{X}$ называется наследственным или замкнутым относительно подгрупп, если из посылки $G \in \mathfrak{X}$ следует, что и каждая подгруппа группы G принадлежит $\mathfrak{X}$.

Произведение формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ состоит из всех групп G, для которых $G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{F}$, т.е. $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = \{G \in \mathfrak{G} \mid G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{F}\}$ [7]. Как обычно, $\mathfrak{F}^2 = \mathfrak{F}\mathfrak{F}$.

3. Предварительные результаты

3.1. ЛЕММА [8, теорема 1.1]. Произведение любых двух формаций также является формацией. Кроме того, для разрешимых насыщенных формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ их формационное произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ также является разрешимой насыщенной формацией.

3.2. ЛЕММА. Формации $\mathfrak{N}\mathfrak{N}_2\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{N}^2$ являются насыщенными.

Доказательство. По лемме 3.1 можно заключить, что $\mathfrak{N}\mathfrak{N}_2\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{N}^2$ являются насыщенными формациями. Первая образована путем последовательного произведения разрешимых насыщенных формаций $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{N}_2$, $\mathfrak{N}\mathfrak{N}_2$ и $\mathfrak{U}$. Вторая – это произведение $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{N}$. Лемма доказана.

3.3. ЛЕММА. Если H – подгруппа группы $GL(3,2)$, то

$$H \in \{E, GL(3,2), Z_2, Z_3, Z_7, Z_2 \times Z_2, Z_4, D_8, S_3, A_4, S_4, [Z_7]Z_3\}.$$

Доказательство. По теореме II.6.14. [1] группа $GL(3,2) \cong PSL(2,7)$, а по теореме II.8.27 [1] подгруппа H из заключения леммы. Лемма доказана.

3.4. ЛЕММА [8, лемма 1.2]. Если $\mathfrak{F}$ – непустая формация и K – нормальная подгруппа группы G, то $(G/K)^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}}K/K$.

3.5. ЛЕММА [9, лемма 3.1.6]. Пусть H – неприводимая разрешимая подгруппа группы, тогда:

1) $r(H) \le 2$, $n(H) \le 3$, $d(H) \le 4$;

2) сверхразрешимый корадикал подгруппы H является расширением циклической 2-группы порядка, делящего $(p-1)$, с помощью подгруппы из элементарной абелевой группы порядка 4.

3) $H \in \mathfrak{N}_2\mathfrak{U}$.

3.6. ЛЕММА [10, Теорема 2]. Пусть максимальная подгруппа M группы G является p-разложимой подгруппой. Тогда G имеет нормальную подгруппу одного из видов:

(1) p-силовскую подгруппу из M;

(2) p'-холлову подгруппу из M;

(3) p'-холлову подгруппу из G.

3.7. ЛЕММА. Если $n = ab$ и $n \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)$, $b \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)$, то $a \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)$.

Доказательство. Поскольку n и b сравнимы с 1 по модулю p, то $n = 1 + kp$ и $b = 1 + lp$, где l и k – целые числа. С другой стороны, $n = ab$, поэтому $1 + kp = a(1 + lp)$, или $1 + kp = a + alp$. Отсюда $a = 1 + (k - al)p$, т.е. $a \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)$. Лемма доказана.

3.8. ЛЕММА (Ф. Холл) [1, теорема VI.9.4]. Если в группе G индексы максимальных подгрупп являются простыми числами или квадратами простых чисел, то группа G разрешима.

3.9. ЛЕММА (Дж. Томпсон) [11]. Группа, содержащая нильпотентную максимальную подгруппу нечетного порядка, разрешима.

4. Основные результаты

4.1. ТЕОРЕМА. Если в конечной группе G индекс каждой ненильпотентной максимальной подгруппы есть простое число либо квадрат простого числа, то группа G разрешима.

Доказательство. Проверим, что условия теоремы наследуются фактор-группами группы G.

Пусть N – нормальная подгруппа группы G. Рассмотрим фактор-группу G/N. Если M/N – максимальная подгруппа в G/N, то M – максимальная подгруппа группы G, причем $N \le M$. Согласно гипотезе теоремы, M либо нильпотентна, либо $|G:M| = q$ или $|G:M| = r^2$, где q и r – некоторые простые числа. В первом случае M/N нильпотентна как фактор-группа нильпотентной группы M. Второй пункт альтернативы выполнен ввиду равенства $|G:M| = |G/N:M/N|$, т.е. $|G/N:M/N| = q$ или $|G/N:M/N| = r^2$.

Далее, используя индукцию по порядку группы G, можно предположить, что разрешимый радикал $S(G) = E$.

По лемме 3.8 в группе G существует максимальная нильпотентная подгруппа A. По лемме 3.9 получаем разрешимость группы G, если $|A|$ – нечетное число. Пусть далее $|A|$ – четное число, т.е. $|A| = 2^{\alpha} m$. Если $m \ne 1$, то из леммы 3.6 вытекает, что в G существует неединичная нормальная подгруппа нечетного порядка, либо силовская 2-подгруппа из A нормальна в G, в частности $S(G) \ne E$, противоречие. Значит, каждая нильпотентная максимальная подгруппа является 2-группой.

Пусть далее p – наибольший простой делитель порядка группы G. Рассмотрим силовскую p-подгруппу P из G. Подгруппа P не является нормальной в группе G. Следовательно, нормализатор $N_G(P)$ не совпадает с группой G, поэтому существует максимальная подгруппа H в группе G, которая содержит $N_G(P)$ и не является 2-группой. Из сказанного выше получаем, что H не является нильпотентной, а это в свою очередь означает, что $|G:H| = q$ или $|G:H| = r^2$, где q и r – некоторые простые числа. Теперь $P \le N_G(P) \subseteq H$, поэтому индекс $|G:H|$ не делится на p. По условию теоремы $|G:H| = q$ или r^2, а по выбору числа p имеем неравенства $p > q$, $p > r$. Так как P – силовская p-подгруппа в H и $N_H(P) = N_G(P)$, то по теореме Силова $|G:N_G(P)| \equiv 1(\mathrm{mod}\, p)$ и $|H:N_G(P)| \equiv 1(\mathrm{mod}\, p)$. Поскольку $N_G(P) \subseteq H \le G$, то по теореме об индексах подгрупп имеем равенство $|G:N_G(P)| = |G:H||H:N_G(P)|$.

Тогда, ввиду последнего и известного свойства сравнений (см. лемма, п. 3.7), получаем, что $|G:H| \equiv 1(\mathrm{mod}\, p)$. Таким образом p делит $|G:H| - 1$. Но по условию теоремы $|G:H| = q$ или $|G:H| = r^2$, а по выбору числа p имеем неравенства $p > q$, $p > r$. Если $|G:H| = q$, то p делит $q-1$, что невозможно. Если $|G:H| = r^2$, то p делит $r^2 - 1 = (r-1)(r+1)$, поэтому $p = r+1$. Следовательно, $r = 2$, а $p = 3$. Но теперь группа G является $\{2, 3\}$-группой и G разрешима по теореме Бернсайда [7, теорема 21.8]. Теорема доказана.

4.2. ПРИМЕР. В простой группе $PSL(2,7)$ индексы максимальных подгрупп принадлежат множеству $\{7, 8\}$, причем максимальные подгруппы индекса 8 являются сверхразрешимыми подгруппами порядка 21, а максимальные подгруппы индекса 7 изоморфны симметрической группе S_4. Поэтому конечная группа со сверхразрешимыми подгруппами непростого индекса может быть неразрешимой.

4.3. ТЕОРЕМА. Если в конечной разрешимой группе G индекс каждой ненильпотентной максимальной подгруппы есть простое число либо квадрат простого числа, либо число 8, то группа $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{N}_2\mathfrak{U}$.

Доказательство. Применим индукцию по порядку группы G. Формация $\mathfrak{N}\mathfrak{N}_2\mathfrak{U}$ является насыщенной формацией по лемме 3.2.

Предположим, что $\Phi(G) \ne E$. Рассмотрим фактор-группу $G/\Phi(G)$, ее порядок $|G/\Phi(G)| < |G|$. Если $M/\Phi(G)$ – максимальная подгруппа группы $G/\Phi(G)$, то M – максимальная подгруппа группы G. По условию теоремы M либо нильпотентна, либо ее индекс $|G:M|$ есть простое число, квадрат простого числа, число 8. В первом случае $M/\Phi(G)$ нильпотентна как фактор-группа нильпотентной группы M. Второй пункт альтернативы выполнен ввиду равенства $|G:M| = |G/\Phi(G):M/\Phi(G)|$. Для $G/\Phi(G)$ условие леммы выполняется, поэтому $G/\Phi(G) \in \mathfrak{N}\mathfrak{N}_2\mathfrak{U}$. Ввиду насыщенности формации $\mathfrak{N}\mathfrak{N}_2\mathfrak{U}$ получаем, что и $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{N}_2\mathfrak{U}$. Далее считаем, что подгруппа Фраттини $\Phi(G) = E$.

Пусть подгруппа Фиттинга $F(G)$ не является минимальной нормальной подгруппой в G. Тогда $F(G)$ есть прямое произведение абелевых минимальных нормальных подгрупп в G, т.е. $F(G) = L_1 \times ... \times L_n$, где L_i – минимальные нормальные абелевы подгруппы в G для любого i и $n \geq 2$. По предположению индукции $G/L_i \in \mathfrak{N}\mathfrak{N}_2\mathfrak{U}$,, следовательно и $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{N}_2\mathfrak{U}$, ввиду того, что $\mathfrak{N}\mathfrak{N}_2\mathfrak{U}$ – формация. В дальнейшем считаем, что $F = F(G)$ является единственной минимальной нормальной подгруппой группы G. Кроме того, $F = C_G(F)$ и $G = [F]M$, где M – некоторая максимальная подгруппа группы G, т.е. группа G примитивна. В соответствии с гипотезой теоремы M либо нильпотентна, либо $|G:M| = q, r^2, 8$, где q и r – некоторые простые числа.

Если M нильпотентная подгруппа, тогда $G \in \mathfrak{N}^2$. В свою очередь $\mathfrak{N}^2 \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{N}_2\mathfrak{U}$. Последнее равносильно искомой принадлежности $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{N}_2\mathfrak{U}$.

Пусть далее M не является нильпотентной. Тогда $|F| = |G:M|$ и порядок $|F|$ равен q, либо r^2, либо 8, где q и r – некоторые простые числа.

Пусть сначала $|F| = q$. Тогда G/F – циклическая группа как группа автоморфизмов группы простого порядка q и G – сверхразрешима. Отсюда следует, что $G \in \mathfrak{U}$, а так как $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{N}_2\mathfrak{U}$, то группа $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{N}_2\mathfrak{U}$.

Пусть теперь $|F| = r^2$. Тогда G/F изоморфна некоторой неприводимой разрешимой подгруппе H группы $GL(2,r)$. По лемме 3.5 подгруппа $H \in \mathfrak{N}_2\mathfrak{U}$ и $G \in \mathfrak{N}_2\mathfrak{U}$, а так как $\mathfrak{N}_2\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{N}_2\mathfrak{U}$, то $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{N}_2\mathfrak{U}$.

Осталось рассмотреть случай, когда $|F| = 8$. Тогда G/F изоморфна некоторой разрешимой подгруппе T группы $GL(3,2)$. Заметим, что в этом случае подгруппа Фиттинга F является наибольшей нормальной 2-подгруппой группы G, то есть $F = O_2(G)$. Тогда $O_2(G/F) = E$. По лемме 3.3 группа $G/F \in \{Z_3, Z_7, [Z_3]Z_2, [Z_7]Z_3\}$ и G/F сверхразрешима. Поскольку F нильпотентна и $|F| = 2^3$, то $G \in \mathfrak{N}_2\mathfrak{U}$, а так как $\mathfrak{N}_2\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{N}_2\mathfrak{U}$, то $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{N}_2\mathfrak{U}$. Теорема доказана.

4.4. СЛЕДСТВИЕ. Если в конечной группе G индекс каждой ненильпотентной максимальной подгруппы есть простое число либо квадрат простого числа, то группа G разрешима и $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{N}_2\mathfrak{U}$.

Доказательство. По теореме 4.1 группа G разрешима, а по теореме 4.3 получаем, что $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{N}_2\mathfrak{U}$.

4.5. ТЕОРЕМА. Если в конечной группе G индекс каждой ненильпотентной максимальной подгруппы есть простое число, то $G \in \mathfrak{N}^2$.

Доказательство. Применим индукцию по числу $|G|$. Формация $\mathfrak{N}^2$ является насыщенной формацией по лемме 3.2.

Допустим, что подгруппа Фраттини группы G неединичная, т.е. $\Phi(G) \neq E$. Рассмотрим фактор-группу $G/\Phi(G)$, ее порядок $|G/\Phi(G)| < |G|$. Если $M/\Phi(G)$ – максимальная подгруппа группы $G/\Phi(G)$, то M – максимальная подгруппа группы G. По условию теоремы M либо нильпотентна, либо ее индекс $|G:M|$ есть простое число. В первом случае $M/\Phi(G)$ нильпотентна, как фактор-группа нильпотентной группы M. Второй пункт альтернативы выполнен ввиду равенства $|G:M| = |G/\Phi(G) : M/\Phi(G)|$. Для $G/\Phi(G)$ условие леммы выполняется, поэтому $G/\Phi(G) \in \mathfrak{N}^2$. Ввиду насыщенности формации $\mathfrak{N}^2$ получаем, что и $G \in \mathfrak{N}^2$. Далее считаем, что подгруппа Фраттини $\Phi(G) = E$.

Если подгруппа Фиттинга $F(G)$ не является минимальной нормальной подгруппой в G, тогда $F(G)$ есть прямое произведение абелевых минимальных нормальных подгрупп в G, т.е. $F(G) = L_1 \times ... \times L_n$, где L_i – минимальные нормальные абелевы подгруппы в G для любого i и $n \geq 2$. По предположению индукции $G/L_i \in \mathfrak{N}^2$, следовательно, и $G \in \mathfrak{N}^2$ ввиду того, что $\mathfrak{N}^2$ – формация.

В дальнейшем считаем, что $F = F(G)$ является единственной минимальной нормальной подгруппой группы G. Кроме того, $F = C_G(F)$ и $G = [F]M$, где M – некоторая максимальная подгруппа группы G, т.е. группа G примитивна. В соответствии с гипотезой теоремы, M либо нильпотентна, либо $|G:M| = q$, где q – некоторое простое число.

Если M нильпотентная подгруппа, тогда $G \in \mathfrak{N}^2$.

Пусть далее M не является нильпотентной. Порядок $|F| = q$, так как $|F| = |G:M|$. Тогда G/F – циклическая группа как группа автоморфизмов группы простого порядка q и G – сверхразрешима. Отсюда следует, что $G \in \mathfrak{U}$, а так как $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{N}^2$, то группа $G \in \mathfrak{N}^2$. Теорема доказана.

4.6. ПРИМЕР. Пусть группа $G = [E_{3^2}]S$, где S – силовская 2-подгруппа группы $GL(2,3)$, которая действует неприводимо на группе E_{3^2}. В этой группе максимальные подгруппы исчерпываются подгруппами S и $[E_{3^2}]M_i$, где M_i – максимальная подгруппа в S. Поэтому ненильпотентные максимальные подгруппы группы G имеют индекс 2.

Этот пример указывает на то, что группа из условий теоремы 4.5 может не принадлежать произведению $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Huppert B. Endliche Gruppen I. - Berlin, Heidelberg, New-York. - 1967. - 792 S.
2. Каморников С.Ф. К теореме Ф. Холла // Вопросы алгебры. - 1990. - Вып. 5. - С. 45 - 52.
3. Монахов В.С., Грибовская Е.Е. О максимальных и силовских подгруппах конечных разрешимых групп // Математические заметки. - 2001. - Т. 70, № 4. - С. 603 - 612.
4. Монахов В.С., Селькин М.В., Грибовская Е.Е. О разрешимых нормальных подгруппах конечных групп // Украинский математический журнал. - 2002. - Т. 54, № 7. - С. 940 - 950.
5. Шмидт О.Ю. Группы, все подгруппы которых специальные // Математический сб. - 1924. - № 31. - С. 366 - 372.
6. Монахов В.С. Подгруппы Шмидта, их существование и некоторые приложения // Алгебра і теорія чисел: Праці Українського математичного конгресу, - 2001. - Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. -С. 81 -90.
7. Монахов В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов. - Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2003. -320 с.
8. Шеметков Л.А. Формации конечных групп. - М.: Наука, 1978. - 272 с.
9. Грибовская Е.Е. Индексы максимальных подгрупп в теории классов составных конечных групп: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. - Гомель, 2002. - 24 с.
10. Романовский А.В. Группы с холловскими нормальными делителями // Конечные группы. - Мн.: Наука и техника, 1966. - С. 98 - 115.
11. Thompson J. Finite groups with fixed-point free automorphisms of finite order // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. - 1959. - № 45. - P. 578 - 581.
12. Грибовская М.А. Конечные группы с ограниченными индексами отдельных максимальных подгрупп: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. - Гомель, 2003. - 24 с.