УДК 536.24.621.1.016.4

ВЛИЯНИЕ ТОЧНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА ПОГРЕШНОСТЬ РАСЧЕТА ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

канд. техн. наук, доц. Э.И. ГОНЧАРОВ, канд. техн. наук Т.И. КОРОЛЕВА,
Е. С. ДОБРОСОЛЬЦЕВА
(Полоцкий государственный университет)

Исследовано влияние точности определения граничных условий на погрешности расчета температурных полей термически «тонких» тел, что дает возможность получить верхний предел погрешности определения температурных полей, а также тел умеренной термической массивности, температурные поля которых более консервативны к изменению внешних условий теплообмена.

При решении задач теплопроводности граничные условия, определяемые экспериментально с некоторой погрешностью, предполагаются заданными, поэтому необходимо заранее иметь представление о возможных погрешностях в расчете температурных полей в твердых телах в связи с неточным определением параметров внешнего теплообмена. Следовательно, становится актуальной проблема исследования влияния граничных условий на температурные поля в твердых телах при стационарных и нестационарных режимах нагрева (охлаждения).

Известно, что самым чувствительным телом, моментально реагирующим на изменение внешних условий, является термически «тонкое» тело. Имея представление о той точности, которая должна предъявляться к расчету внешних параметров, характеризующих теплоперенос в термически «тонком» теле, можно получить верхний предел возможных погрешностей при определении температурного режима твердых тел любой массивности.

Дифференциальное уравнение баланса теплоты элемента «тонкого» тела при конвективном теплообмене имеет вид:

$$k \cdot \alpha \cdot (T_c - T) \cdot F \cdot d\tau = V \cdot c \cdot \rho \cdot dT \qquad (1)$$

или в безразмерных величинах

$$\frac{d\theta}{dFo} = k \cdot Bi \cdot (1 - \theta). \qquad (2)$$

Точное решение этого уравнения очевидно

$$\theta_m = 1 - (1 - \theta_o) \cdot e^{-k \cdot Bi \cdot Fo}. \qquad (3)$$

В случае неточного задания граничных условий (критерия Bi) решение (3) будет приближенным:

$$\theta_{np} = \theta_m \pm \Delta\theta = 1 - (1 - \theta_o) \cdot e^{-k \cdot (Bi \pm \Delta Bi) \cdot Fo}. \qquad (3)$$

В этих формулах $k = 1, 2$ – соответственно для пластин, цилиндра; α – коэффициент теплоотдачи; $T(\tau)$ – температура твердого тела; τ – время; T_c – температура греющей среды; F – площадь боковой поверхности тела; $V = F \cdot \delta$ – объем тела; δ – толщина; c – удельная теплоемкость; ρ – плотность; $\theta_o = \frac{T_o}{T_c}$ – безразмерная начальная температура; Bi, Fo – критерии Био и Фурье.

Условимся оценивать погрешности температурного поля в виде соотношения

$$\Delta_\theta = \frac{\theta_{np} - \theta_m}{\theta_m} \cdot 100\ \%, \qquad (5)$$

где θ_{np} – температура в «тонком» теле при условии неточного задания граничных условий (4); θ_m – температура в «тонком» теле при условии точного задания граничных условий (3).

Подставка соотношений (3) и (4) в уравнение погрешностей дает формулу для расчета погрешностей температурного поля термически «тонкого» тела:

$$\pm\Delta_\theta = \frac{1-exp(\pm k\cdot\Delta Bi\cdot Fo)}{\dfrac{1}{(1-\theta_o)\cdot exp(-k\cdot Bi\cdot Fo)}-1}\ . \qquad (6)$$

Это соотношение нами исследовалось, результаты приведены на рис. 1 - 3 .

На рис. 1 приведены кривые, показывающие влияние погрешности измерения критерия Bi на погрешности температурного поля термически «тонкого» тела.

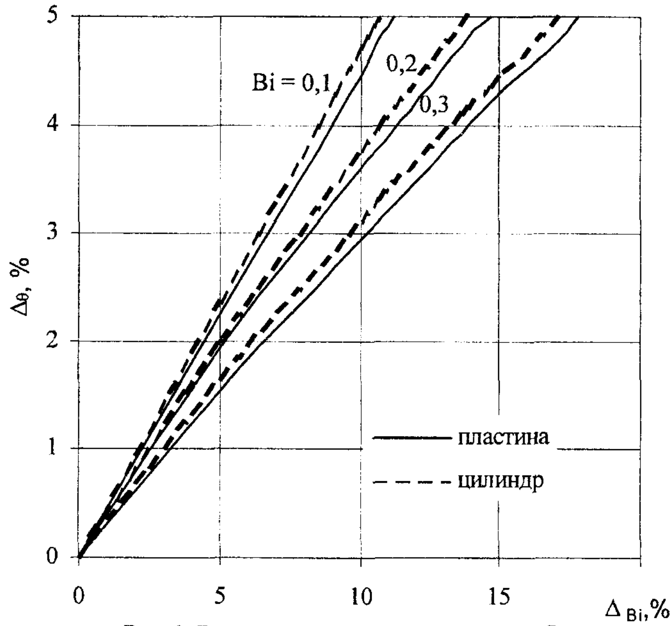

Рис. 1. Влияние погрешности измерения B_i на погрешность температурного поля

Графики построены при $\theta_о = 0{,}2$ и величинах критерия $F\text{o} = 5{,}0$ для пластины и $F\text{o} = 2{,}0$ для цилиндра как соответствующие максимальным значениям Δ_θ (рис. 2).

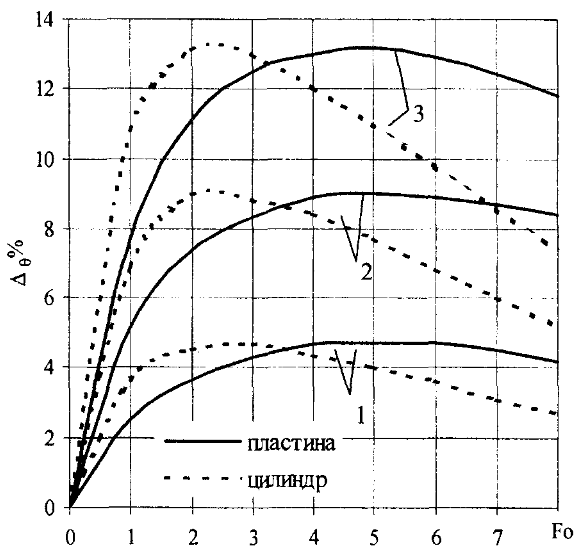

Рис. 2. Влияние критерия F_o на погрешность температурного поля
$1 - \Delta B_i = 10$ %; $2 - \Delta B_i = 20$ %; $3 - \Delta B_i = 30$ %

В качестве верхнего предела погрешности Δ_θ взята величина 5 % как приемлемая для технических расчетов.

Анализ этих зависимостей позволяет отметить следующее:

- чем больше исходное значение Bi, тем меньшую точность можно предъявлять при его определении;
- точность, предъявляемая к определению критерия Bi при расчетах температурного поля термически «тонкого» цилиндра, должна быть несколько выше, чем для «тонкой» пластины.

Влияние критерия Fo на погрешность температурного поля термически «тонких» тел показано на рис. 2.

Кривые построены при значениях $\theta_o = 0{,}2$ и $Bi = 0{,}1$. Как следует из этих графиков, максимальное значение погрешности Δ_θ для тел разной геометрической формы различается мало, а значения критерия Fo, соответствующие максимальному значению погрешностей Δ_θ, равны $Fo = 5{,}0$ – для термически «тонкой» пластины и $Fo = 2{,}0$ – для термически «тонкого» цилиндра.

На рис. 3 показано влияние начального распределения θ_o на погрешность температурного поля в «тонких» телах.

Значения режимных параметров следующие:

- $Bi = 0{,}1$, $Fo = 5{,}0$ – для пластины;
- $Fo = 2{,}0$ – для цилиндра.

Можно отметить слабое влияние начального распределения θ_o на погрешность температурного поля Δ_θ при значениях $\theta_o \geq 0{,}5$. При изменении же $0{,}2 \leq \theta_o < 0{,}5$ это влияние существенно. Это значит, что при $\theta_o \geq 0{,}5$ имеется возможность менее точного распределения критерия внешнего теплообмена Bi.

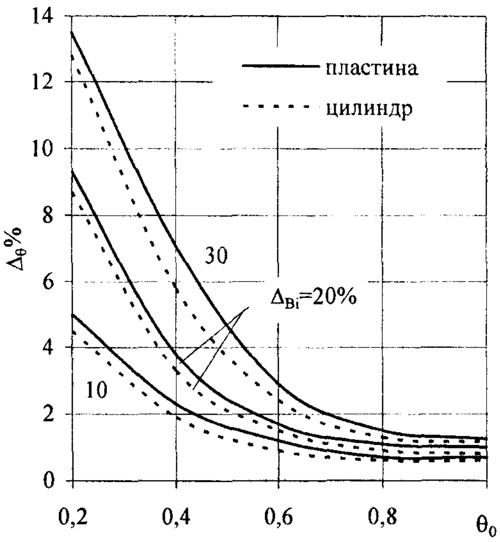

Рис. 3. Влияние θ на погрешность температурного поля

Проследим теперь за тем, как влияет нестационарность коэффициента теплообмена на погрешность температурных полей термически «тонких» тел.

Решение уравнения (2) при $Bi = Bi(Fo)$ имеет вид [1]:

$$\theta_m = \exp\left\{-\int_0^{Fo} k \cdot Bi(\eta) d\eta\right\} \cdot \left\{\theta_0 + \int_0^{Fo} k \cdot Bi(\eta) \cdot \exp\int_0^{\eta} Bi(\zeta) d\zeta d\eta\right\}. \tag{7}$$

Зададимся двумя законами изменения $Bi = Bi(Fo)$ – линейным $Bi = Bi_o(1 + Pd \cdot Fo)$ и экспоненциальным $Bi = Bi_0 \cdot \exp(-Pd \cdot Fo)$. Тогда формулы для подсчета погрешностей Δ_θ, полученные путем подстановки этих законов в уравнение (7) и затем в уравнение (5), примут следующий вид:

для линейного закона

$$\pm\Delta_\theta = exp\left\{-k(\pm\Delta Bi)\left(\sqrt{\frac{Pd}{2}} \cdot Fo + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot Pd}}\right)^2\right\} \cdot \frac{exp\,Fo + (\theta_o - 1) \cdot exp\left\{\frac{k \cdot (Bi_0 \pm \Delta Bi)}{2 \cdot Pd}\right\}}{exp\,Fo + (\theta_o - 1) \cdot exp\left(\frac{k \cdot Bi_0}{2 \cdot Pd}\right)} - 1; \quad (8)$$

для экспоненциального закона (9)

$$\pm\Delta_\theta = exp\left\{k \cdot (\pm\Delta Bi) \cdot \frac{1 + exp(-Pd \cdot Fo)}{Pd}\right\} \cdot \frac{\theta_o + exp\{-2 \cdot k \cdot (Bi_0 \pm \Delta Bi)/Pd\} \cdot \left[exp\left\{(1 - Fo)\frac{k \cdot (Bi_0 \pm \Delta Bi)}{Pd}\right\} - 1\right]}{\theta_o + exp\left\{-\frac{2 \cdot k \cdot Bi_0}{Pd}\right\} \cdot \left[exp\left\{\frac{k \cdot Bi_0}{Pd} \cdot (1 - Fo)\right\} - 1\right]}. \quad (9)$$

Результаты расчетов по этим формулам представлены на рис. 4 при следующих значениях: $Bi_0 = 0{,}1$; $\theta_0 = 0{,}2$; $Fo = 5{,}0$

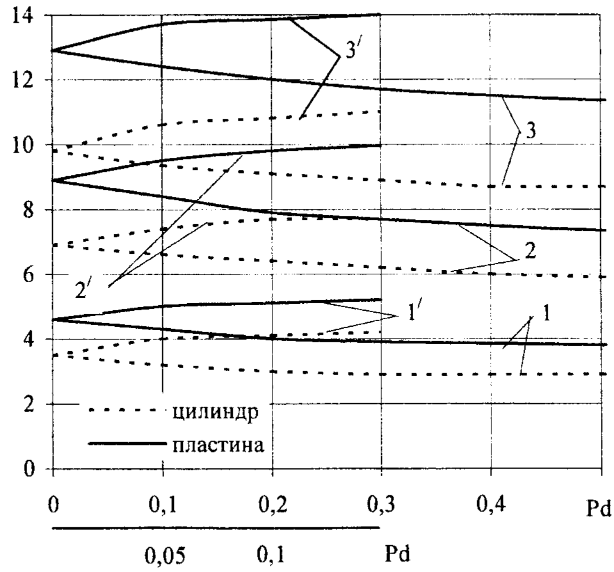

Рис. 4. Влияние критерия Pd на погрешность температурного поля
$1 - \Delta B_i = 10$ %; $2 - \Delta B_i = 20$ %; $3 - \Delta B_i = 30$ %

Из анализа кривых можно сделать вывод о том, что увеличение значения критерия Pd приводит к уменьшению погрешности Δ_θ для линейного закона $Bi = Bi(Fo)$ и к увеличению – для экспоненциального закона изменения $Bi = Bi(Fo)$, причем при $Pd > 0{,}1$ для линейного закона и $Pd > 0{,}05$ для экспоненциального это влияние несущественно.

Для исследования влияния граничных условий на погрешности температурных полей умеренных в термическом отношении твердых тел при постоянном коэффициенте теплообмена воспользуемся известными решениями задачи нестационарной теплопроводности при граничных условиях третьего рода [2]:

для пластины

$$\theta(X, Fo) = 1 - (1 - \theta_o) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2 \cdot Bi \cdot \sqrt{Bi^2 + \mu_n^2}}{\mu_n \cdot (Bi^2 + Bi + \mu_n^2)} \cdot cos\,\mu_n X \cdot exp(-\mu_n^2 \cdot Fo); \quad (10)$$

для цилиндра

$$\theta(X, Fo) = 1 - (1 - \theta_o) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot Bi}{I_o(\mu_n) \cdot (\mu_n^2 + Bi^2)} \cdot I_o(\mu_n X) \cdot exp(-\mu_n^2 \cdot Fo) . \tag{11}$$

Оценку погрешности температурного поля будем производить по соотношению, которое использовалось при анализе термически «тонкого» тела, т.е.

$$\Delta_\theta = \frac{\theta_{np} - \theta_m}{\theta_m} \cdot 100\% , \tag{12}$$

где θ_{np} – температура в теле при условии неточного задания граничных условий; θ_m – температура в теле при условии точного задания граничных условий.

Ввиду громоздкости полученных окончательных соотношений для погрешности $Д_0$ при анализе воспользуемся тем обстоятельством, что решение (10) и (11), так же как и решение при $Bi = Bi(Fo)$, заномографировано [3].

Результаты исследования влияния граничных условий на погрешности температурных полей неограниченной пластины и бесконечного цилиндра представлены на рис. 5-12.

На рис. 5 и 6 показано влияние погрешности измерения критерия Bi на погрешность расчета температурного поля неограниченной пластины и бесконечного цилиндра. Кривые приведены при значении начального распределения температуры $0_о$ = 0,2 и значениях критерия Fo = 0,4 и Fo = 0,8 для поверхности и центра пластины, Fo = 0,3 и Fo = 0,7 - для поверхности и центра цилиндра.

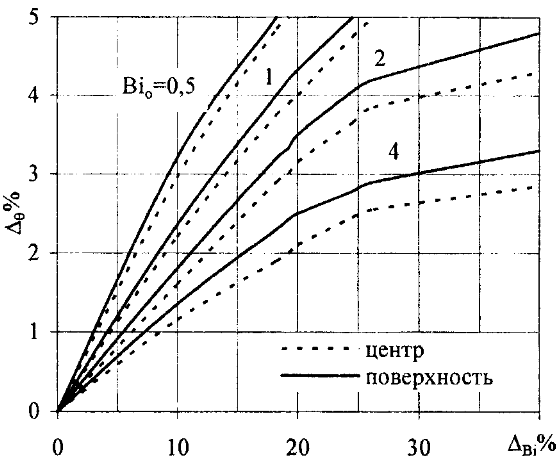

Рис. 5. Влияние погрешности измерения критерия В, на погрешность температурного поля пластины

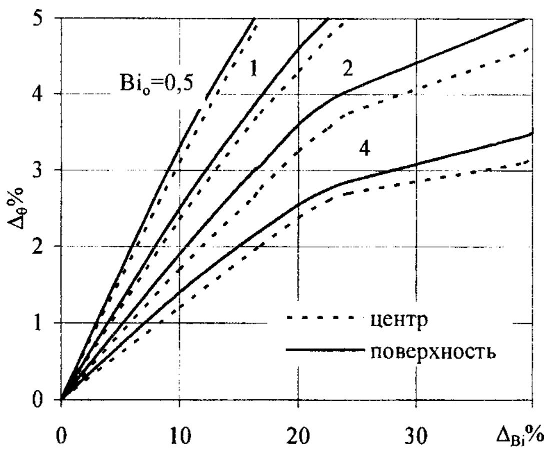

Рис. 6. Влияние погрешности измерения критерия В, на погрешность температурного поля цилиндра

Анализ кривых на рис. 5 и 6 показывает, что, как и в случае термически «тонких» тел, увеличение исходного значения критерия Bi дает возможность менее точного определения коэффициента конвективного теплообмена. Так, для неограниченной пластины при Bi = 0,5 для получения приемлемой для технических расчетов погрешности в определении поверхностной температуры в 5 % можно допустить погрешность в определении Bi до 17 %, а при Bi = 2,0 эта погрешность может быть 30 %.

Для бесконечного цилиндра эти значения равны соответственно 15 и 25 %, т.е. бесконечный цилиндр менее инерционен к изменению параметров внешнего теплообмена. На погрешности температур центров пластины и цилиндра погрешность измерения критерия Bi при прочих равных условиях оказывает меньшее влияние, чем на погрешность температур поверхности этих элементов.

Влияние критерия Fo на погрешность температурных полей неограниченной пластины и бесконечного цилиндра показаны на рис. 7 и 8.

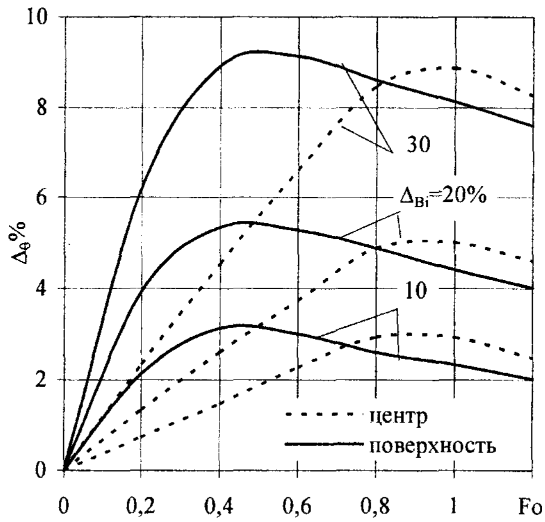

Рис. 7. Влияние критерия *Fo* на погрешность температурного поля пластины

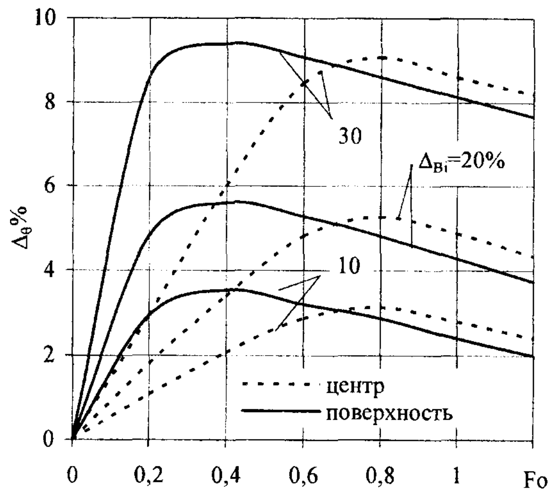

Рис.8. Влияние критерия *Fo* на погрешность температурного поля цилиндра

Графики построены при значениях 0„ = 0,2 и Bi = 0,5 . Как видно из этих рисунков, максимальные значения погрешности $A_в$ для бесконечного цилиндра несколько выше, чем для неограниченной пластины, значения же критерия Fo, соответствующие максимальному значению погрешности $A_в$, равны для поверхностной температуры неограниченной пластины Fo = 5,0, а для температуры центра Fo = 0,9. Аналогичные значения для бесконечного цилиндра будут соответственно равны 0,3 и 0,7, т.е. для цилиндрических элементов они меньше по абсолютной величине. При уменьшении значения $A_ш$ абсолютные значения $Д_0$ уменьшаются, а их максимум несколько сдвигается в сторону малых значений Fo .

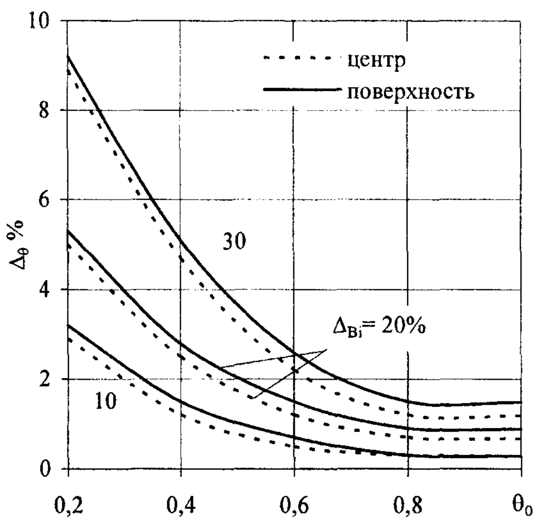

Рис. 9. Влияние начального распределения θ_0 на погрешность температурного поля пластины

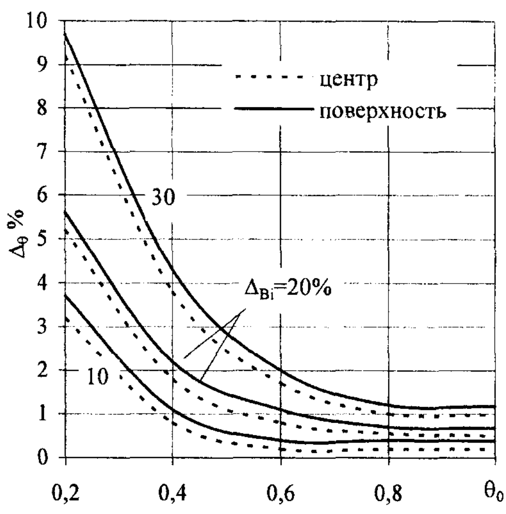

Рис. 10. Влияние начального распределения θ_0 на погрешность температурного поля цилиндра

Для анализа влияния начального распределения температур $\theta_о$ на погрешность температурных полей воспользуемся графиками на рис. 9 и 10, построенными при $Bi = 0{,}5$. Значение временного критерия Fo приняты следующие: для пластины – $Fo = 0{,}4$ для поверхностной температуры и $Fo = 0{,}8$ – для температуры центра; для цилиндра – $Fo = 0{,}3$ для поверхностной температуры, $Fo = 0{,}7$ – для температуры центра.

Как для неограниченной пластины, так и для бесконечного цилиндра можно отметить слабое влияние начального распределения температур θ_0 на погрешности определения температурных полей при значениях $\theta_0 \geq 0{,}5$, при $0{,}2 \leq \theta_0 < 0{,}5$ это влияние более значительно. Следует отметить также, что с увеличением θ_0 абсолютные значения Δ_θ уменьшаются, что дает возможность быть более произвольным в задании коэффициента теплообмена (критерия Bi). Так, например, уже при $\theta_o = 0{,}4$ даже при значениях $\Delta_{Bi} = 30$ % мы укладываемся в допустимую для технических расчетов погрешность определения температуры поверхности или цилиндра $\Delta_\theta = 5$ % .

Влияние нестационарности коэффициента конвективного теплообмена на погрешность температурных полей показано на рис. 11 и 12, анализ которых позволяет сделать вывод о том, что с увеличением критерия Pd погрешность температурного поля Δ_θ как для неограниченной пластины, так и для бесконечного цилиндра уменьшается для линейного закона изменения $Bi = Bi(Fo)$ и увеличивается, если закон изменения $Bi(Fo)$ экспоненциальный. Графики построены при следующих значениях режимных параметров: $Bi_0 = 0{,}5$, $\theta_0 = 0{,}2$, $Fo = 1{,}0$ – для неограниченной пластины и $Fo = 0{,}8$ – для бесконечного цилиндра.

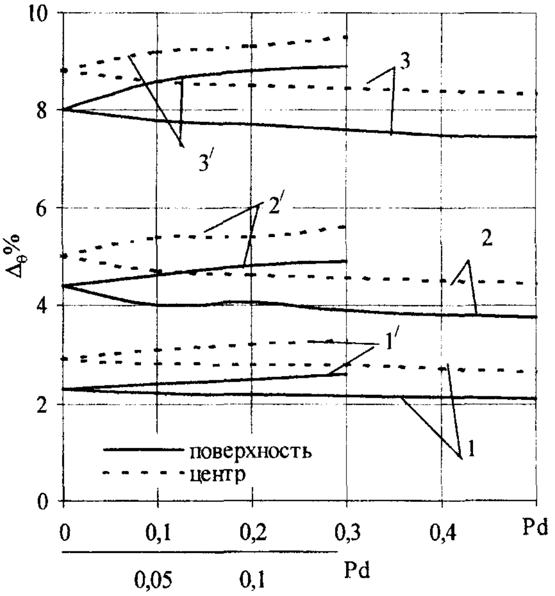

Рис. 11. Влияние критерия Pd на погрешность температурного поля неограниченной пластины

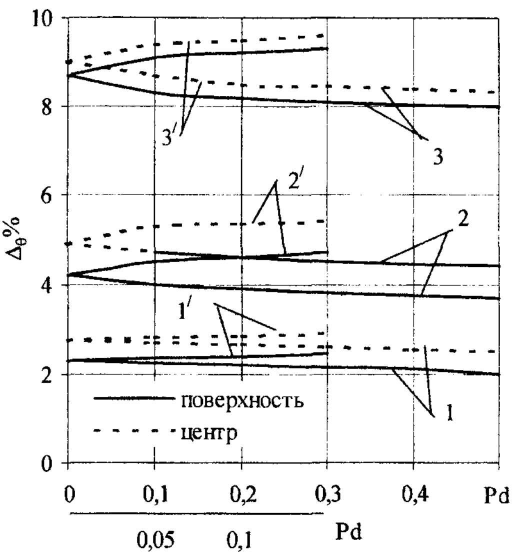

Рис. 12. Влияние критерия Pd на погрешность температурного поля бесконечного цилиндра

Влияние критерия Pd на погрешность температурного поля A_e неограниченной пластины и бесконечного цилиндра незначительно при $Pd > 0{,}2$ для линейного закона изменения $Bi(Fo)$ и при $Pd > 0{,}05$ для экспоненциального.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зарубин В.С. Температурные поля в конструкциях летательных аппаратов. - М.: Машиностроение, 1988.-386 с.
2. Лыков А.В. Тепломассообмен: Справочник. - М.: Энергия, 1978 - 480 с.
3. Саломатов В.В., Гончаров Э.И. К расчету теплопроводности при нестационарном коэффициенте теплообмена // Известия АН СССР. Энергетика и транспорт. - № 6. - 1989.