УДК 696.2 (075.8)

РАСЧЕТ ЗАКОЛЬЦОВАННЫХ ГАЗОВЫХ СЕТЕЙ НИЗКОГО ДАВЛЕНИЯ ПО МИНИМУМУ МАТЕРИАЛЬНЫХ ВЛОЖЕНИЙ

канд. техн. наук, доц. В.В. БУЛАХ, канд. физ.- мат. наук, доц. И.Б. СОРОГОВЕЦ
(Полоцкий государственный университет)

Разработана методика гидравлического расчета на ПЭВМ (в среде MATHCAD) закольцованных газовых сетей низкого давления на основе углубленного применения матричных представлений графических изображений газовых сетей.

1. Матричные способы задания закольцованных газовых сетей. Для задания граф-схем закольцованных газовых сетей низкого давления будем использовать следующие матрицы инцидентности:

- матрица A инцидентности между участками и узлами;
- матрица С инцидентности между участками и кольцами;
- матрица B инцидентности между участками и газифицируемыми площадями;
- матрица TS инцидентности между путями, идущими в точки схода и участками.

Первым этапом определения матриц инцидентности A, B, С, TS является установление ориентации граф-схемы газовой сети. Для разветвленных тупиковых газовых сетей это делается естественным образом. В случае закольцованных газовых сетей определяем точки схода и интуитивно задаем пути снабжения газом этих точек (обычно по кратчайшему расстоянию). Затем (также интуитивно) устанавливаем направления газовых потоков на остальных участках. В результате каждый участок получит направление, т.е. будет указано, какой узел является начальным и какой конечным. В результате граф-схема сети станет ориентированным графом.

Вторым этапом определения матриц инцидентности является упорядочение узлов и участков орграфа сети. Это можно сделать, например, с помощью алгоритма Форда - Фалкерсона. Суть его состоит в следующем. Узел подключения к газораспределительному пункту (ГРП) обозначаем цифрой 0. Участкам, исходящим из узла 0, произвольно присваиваем номера 0, 1,2, ... (начиная, например, снизу, и далее - по ходу часовой стрелки). Вычеркивая узел 0 и пронумерованные участки (первое вычеркивание), получим группу узлов, в которые не входит ни один участок. Нумеруем полученные узлы и участки из них выходящие. Вычеркивая пронумерованные узлы и участки (второе вычеркивание), получим группу узлов, в которые не входит ни один участок и т.д. В результате все узлы и участки будут пронумерованы.

Рассматриваемые ниже матрицы инцидентности относятся к так называемым «разреженным» матрицам, т.е. большинство элементов этих матриц равны нулю и только некоторые из элементов отличны от нуля.

Матрица A инцидентности между участками и узлами определяется следующим образом: строки матрицы A соответствуют узлам, столбцы – участкам, т.е. размеры матрицы A равны $m \times n$, где m – количество узлов, n – количество участков; если i-тый узел является началом j-того участка ($i = 0, 1, ..., m-1$; $j = 0, 1, ..., n-1$), то $A_{i,j} = -1$; если i-тый узел является концом j-того участка, то $A_{i,j} = 1$; все остальные элементы матрицы A равны нулю.

Матрица B инцидентности между участками и газифицируемыми площадями имеет размеры $S \times n$, где S – количество площадей, т.е. строки B соответствуют газифицируемым площадям, столбцы – участкам. Если j-тый участок ограничивает s-тую площадь ($s = 0, 1, ..., S-1; j = 0, 1, ..., n-1$), то $B_{s,j} = 1$. Остальные элементы матрицы B равны нулю.

Аналогично, матрица C инцидентности между участками и кольцами имеет размеры $K \times n$, где K – количество колец. Если j-тый участок ограничивает k-тое кольцо ($k = 0, 1, ..., K-1; j = 0, 1, ..., n-1$) и его направление при обходе кольца совпадает с направлением движения часовой стрелки, то $C_{k,j} = 1$. Если же направление j-того участка, ограничивающего k-тое кольцо, противоположно направлению хода часовой стрелки, то $C_{k,j} = -1$. Остальные элементы матрицы C равны нулю.

Строки матрицы TS соответствуют конечным точкам или точкам схода, количество которых равно SX. Эти точки следует пронумеровать отдельно от 0 до $SX-1$ ($sx = 0, 1, ..., SX-1$). Если j-тый участок является частью пути из узла 0 в точку с номером sx, то $TS_{sx,j} = 1$. Остальные элементы матрицы TS равны нулю.

При построении матриц A, B, C, TS в среде MATHCAD сначала вводим размеры матриц: m – количество узлов; n – количество участков; S – количество площадей; K – количество колец; SX – количество точек схода. Определяем индексы элементов матриц: i, $i1 = 0, ..., m-1$ – индексы узлов; j, $j1 = 0, ..., n-1$ – индексы участков; $s = 0, ..., S-1$ – индексы площадей; $k = 0, ..., K-1$ – индексы колец, $sx = 0, ..., SX-1$ – индексы точек схода. После этого обнуляем элементы всех матриц: $A_{i,j} = 0$, $B_{s,j} = 0$, $C_{k,j} = 0$ $TS_{sx,j} = 0$. Просматривая граф-схему газифицируемого населенного пункта, задаем ненулевые элементы матриц A, B, C, TS.

2. Определение расчетных расходов газа. При расчете закольцованных газовых сетей дополнительными исходными данными для расчета являются: $l = (l_0, l_1, ..., l_{n-1})$ – вектор длин участков; $VS = (VS_0, VS_1, ..., VS_{m-1})$ – вектор сосредоточенных расходов в каждом узле; вектор $F = (F_0, F_1, ..., F_{S-1})$ газифицируемых площадей; Q – общий расход газа. Предполагается равномерная раздача газа на каждой газифицируемой площади и на каждом участке. Неизвестными в задаче расчета являются: d_j – диаметры участков; V_j – расходы газа на участках; p_j – перепады давления на участках. Всего имеется $3n$ неизвестных. Неизвестные связаны между собой системой из n уравнений гидравлических потерь:

$$p_j = a\cdot\frac{V_j^{1.75}}{d_j^{4.75}}\cdot l_j \;\Rightarrow\; d_j = \left(\frac{a\cdot l_j}{p_j}\right)^{\alpha}\cdot V_j^{\beta}\ (\alpha = \frac{1}{4.75}, \beta = \frac{1.75}{4.75}). \quad (1)$$

С учетом соотношений (1) в задаче расчета газовой сети остается $2n$ свободных неизвестных, в качестве которых можно выбрать V_j, p_j.

Некоторое количество ограничений на неизвестные V_j, p_j может быть получено из двух законов газовых сетей, аналогичных законам Кирхгофа для электрических цепей: 1) алгебраическая сумма расходов газа, сходящихся в узле, равна нулю; входящим расходам присваивается знак (+), а выходящим знак (–); 2) алгебраическая сумма перепадов давлений в каждом кольце равна нулю.

Неизвестные V_j можно определить из 1-го закона Кирхгофа (хотя и неоднозначно). Ниже будет показано, что число свободных параметров при нахождении V_j равно количеству узлов встречи потоков, не являющихся точками схода. При известных расходах p_j определяются в результате решения задачи оптимизации. Определение расчетных расходов закольцованных ГНД разбиваем на несколько этапов.

Расчет путевых и узловых расходов:

а) по формуле

$$QF_s = \frac{Q}{\sum_s F_s}\cdot F_s$$

получим вектор QF удельных расходов газа по площадям.

По матрице B и вектору l определяем периметры площадей (символом P будет обозначаться вектор периметров площадей):

$$P_s = \sum_j B_{s,j}\cdot l_j .$$

Определяем удельные путевые расходы q_j по каждому участку:

$$q_j = \sum_s \frac{B_{s,j}\cdot QF_s}{P_s} .$$

Строим векторы VP и VY путевых и узловых расходов по формулам:

$$VP_j = q_j\cdot l_j, \quad VY_i = \frac{1}{2}\cdot\sum_j\left|A_{i,j}\right|\cdot VP_j + VS_i . \quad (2)$$

При более точном определении узловых расходов (когда в начальном узле расходуется 0.45, а в конечном 0.55 путевого расхода) вместо формулы (2) следует воспользоваться формулой

$$VY_i = \sum_j if(A_{i,j} = -1,\ \ 0.45\cdot VP_j,\ \ 0.55\cdot A_{i,j}\cdot VP_j)\ + VS_i \cdot$$

б) из матрицы A строим четыре вспомогательные матрицы по формулам:

$$A1_{i,j} = \frac{1}{2}\cdot\left(\left|A_{i,j}\right| + A_{i,j}\right),\ A2_{i,j} = \frac{1}{2}\cdot\left(\left|A_{i,j}\right| - A_{i,j}\right),\ A3 = A1^T\cdot A2,\ E0 = A1^T\cdot A1.$$

Рассмотрим смысл каждой из введенных матриц. Матрица $A1$ получается из матрицы A выбрасыванием элементов равных -1. Ее можно назвать матрицей инцидентности между участками и узлами входа, т.е. $A1_{i,j} = 1$, если i-тый узел является точкой входа для j-того участка, и $A1_{i,j} = 0$, если нет. Аналогично, матрицу $A2$ можно назвать матрицей инцидентности между участками и узлами выхода.

Произведение $A1^T \cdot A2 = A3$, где $A1^T$ – транспонированная матрица, дает матрицу *смежности* участков: если участок с номером $j1$ непосредственно предшествует участку с номером j, то $A3_{j1,j} = 1$; в противном случае $A3_{j1,j} = 0$. Отметим, что матрица $A3$ является квадратной матрицей порядка n, где n – количество участков. По $A3$ можно определить, какие участки заканчиваются точками схода. Если все элементы j-той строки матрицы $A3$ равны нулю, то участок с номером j заканчивается точкой схода. Этот факт играет важную роль при определении расходов газа с помощью 1-го закона Кирхгофа.

Матрицу $E0 = A1^T \cdot A1$ можно назвать матрицей смежности участков по узлам входа. $E0$ является симметричной матрицей порядка n, все диагональные элементы которой равны 1. Отличные от нуля недиагональные элементы матрицы $E0$ определяются следующим образом: если участки с номерами j и $j1$ имеют общую точку входа, то $E0_{j1,j} = E0_{j,j1} = 1$.

Определение расчетных расходов. Первый закон Кирхгофа можно записать в виде некоторой системы линейных уравнений с неизвестными расходами V_j, из которых можно составить вектор V. Если не учитывать точки схода, то в качестве матрицы этой системы можно взять матрицу $E0 - A3$. Однако на участках, примыкающих к точкам схода, расходы известны (они равны половинам путевых расходов на этих участках). В связи с этим в строках матрицы $E0$, соответствующих участкам, примыкающим к точкам схода, недиагональные элементы следует положить равными нулю. Это можно сделать с помощью следующего алгоритма. Пусть E – единичная матрица порядка n. Вводим матрицу $A0$ по следующим условиям: если $\sum_j A3_{j1,j} \neq 0$, т.е. участок с номером $j1$ не заканчивается точкой схода, то $A0_{j1,j} = E0_{j1,j} - A3_{j1,j}$; если же указанная выше сумма равна нулю, то $A0_{j1,j} = E_{j1,j}$. В среде MATHCAD этот алгоритм можно реализовать с помощью условного оператора *if*:

$$A0_{j1,j} := if\left(\sum_j A3_{j1,j}, E0_{j1,j} - A3_{j1,j}, E_{j1,j}\right). \tag{3}$$

Таким образом, матрица системы линейных уравнений, соответствующих 1-му закону Кирхгофа, определена, а саму систему можно записать в виде

$$A0 \cdot V = B0. \tag{4}$$

Вектор $B0$ определяется так: если j-тый участок заканчивается точкой схода, то $B0_j = 0.5 \cdot VP_j$. В противном случае $B0_j = VY_i$, где i – узел входа для j-того участка. Построение вектора $B0$ производится по аналогии с формулой (3):

$$B0_j := if\left(\sum_{j1} A3_{j,j1}, \sum_i A1_{i,j} \cdot VY_i, 0.5 \cdot VP_j\right).$$

Смысл системы (4) состоит в следующем: если j-тый участок входит в i-тый узел (не являющийся точкой схода), то расход по этому участку плюс расходы по другим участкам, входящим в i-тый узел, равен сумме расходов участков, выходящих из i-того узла, плюс узловой расход по i-тому узлу; если же узел входа j-того участка является точкой схода, то расход по этому участку равен половине путевого расхода (при более точном определении узловых расходов 0.55 узлового расхода). Если в узел, не являющийся точкой схода, входит несколько участков, то уравнения системы (4), соответствующие этим участкам, одинаковы. В связи с этим ранг полученной системы равен

$$r = n - \Sigma(KIвх - 1)Iвх, \tag{5}$$

где сумма берется по узлам, не являющимся точками схода, в которые входит более одного участка, а $KIвх$ – число участков, входящих в такие узлы.

Для удобства дальнейших рассуждений введем несколько дополнительных понятий. *Точками встречи* будем называть узлы, в которых сходится не менее двух участков. Сами участки, имеющие общие концевые точки, будем называть *встречными*. В частности, точки схода являются точками встречи.

Методом математической индукции легко доказывается следующая **Теорема.** *Число колец равно числу встречных участков минус число точек встречи. По-другому, число колец равно числу свободных неизвестных уравнения* $A0 \cdot V = B0$ *плюс число точек схода:* $K = (n - r) + Msx$, *где* Msx – число точек схода, а r определяется формулой (5). В дальнейшем для сокращения речи *к точкам встречи не будем относить точки схода.*

При поиске расходов по участкам с помощью системы (4) свободными являются расходы по некоторым $n - r$ участкам (эти участки так же будем называть свободными). Значения свободных расходов произвольны и удовлетворяют лишь условию $0.5V_{пут} \le V \le 0.5 \cdot V_{пут} + V_{транз}$, где $V_{транз}$ – максимально возможный транзитный расход через свободный участок.

Замечание. В данной работе, кроме предыдущего абзаца, понятие транзитного расхода не используется в связи с другой методикой определения расчетных расходов.

Отметим, что *транзитным* называется расход через данный участок, идущий на путевые и узловые расходы всех последующих участков и узлов в направлении от ГРП к точкам схода.

В качестве свободных участков наиболее просто выбирать встречные. Если в точке встречи сходятся, например, три участка, то два из них следует взять в качестве свободных. Кроме встречных, свободными можно выбирать и другие участки, связанные со встречными уравнениями. Укажем одну особенность при назначении свободных участков, которая будет использоваться ниже: *каждое кольцо, содержащее точку встречи, должно быть ограничено хотя бы одним свободным участком.*

В среде MATHCAD решение системы (4) можно произвести несколькими способами:

1-й способ применяется в случае, когда определитель матрицы $A0$ отличен от нуля ($detA0 \ne 0$). В этом случае все точки встречи являются точками схода, и система имеет единственное решение, определяемое формулой

$$V = A0^{-1} \cdot B0. \tag{6}$$

2-й способ применяется в случаях, когда определитель матрицы $A0$ равен нулю и число участков не очень большое. Решение производится с помощью следующей системы операторов:

$$V := 0{,}5 \cdot VP$$

Given

$$V \ge 0{,}5 \cdot VP \qquad A0 \cdot V = B0 \qquad V_{j1} = 0{,}5VP_{j1} + k1 \cdot VT_{j1} \qquad V_{j2} = 0{,}5VP_{j2} + k2 \cdot VT_{j2}$$

$$V := Find(V)$$

В этой системе операторы $V_{j1} = 0.5 \cdot VP_{j1} + k1 \cdot VT_{j1}$, $V_{j2} = 0.5 \cdot VP_{j2} + k1 \cdot VT_{j2}$, ... определяют значения свободных расходов, $k1$, $k2$, ... – предполагаемые доли транзитных расходов.

3-й способ. При большом количестве участков MATHCAD не может решить систему (4) по 2-му способу. В этом случае множество участков разобьем на два подмножества LV и LS. В первое из них включим все участки, ограничивающие кольца с точками встречи, а во второе – все остальные участки.

Можно считать, что участки из LV перенумерованы цифрами 0, 1, ..., $nv - 1$, а все оставшиеся участки имеют номера $n - ns$, $n - ns + 1$, ..., $n - 1$. Здесь nv и ns – количества элементов множеств LV и LS соответственно. Тогда матрицу $A0$, векторы $B0$ и V из (4) можно разбить на блоки:

$$A0 = \begin{bmatrix} AV & AVS \\ 0 & AS \end{bmatrix}, \quad B0 = \begin{bmatrix} BV \\ BS \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} V1 \\ V2 \end{bmatrix}.$$

При этом система (4) распадается на уравнения

$$AS \cdot V2 = BS \Rightarrow V2 = AS^{-1} \cdot BS; \tag{7}$$

$$AV \cdot V1 + AVS \cdot V2 = BV. \tag{8}$$

Построение матриц AV, AS, AVS, BV, BS в среде MATHCAD можно осуществить следующим образом. Задаем размеры nv, ns и вводим индексы: $iv := 0, ..., nv - 1$ $\; jv := 0, \ldots, nv - 1$ $\; is := 0, \ldots, ns - 1$ $\; js := 0 \ldots, ns - 1$.
Тогда $AV_{iv,jv} := A0_{iv,jv}$ $AS_{is,js} := A0_{is+nv,js+nv}$ $AVS_{iv,js} := A0_{iv,js+nv}$ $BV_{iv} := B0_{iv}$ $BS_{is} := B0_{is+nv}$

Таким образом, вектор $V2$ расходов по участкам из LS определяется формулой (7).

Уравнение (8) можно попытаться решить по 2-му способу.

Если попытка не привела к успеху (количество компонент вектора *VI* все еще достаточно велико), поступаем следующим образом.

Задаем значения свободных расходов вектора *VI.* Столбцы системы (8), соответствующие свободным расходам, перенесем в правую часть. При этом правую часть запишем как вектор *bv,* а саму систему - в виде *av-U* = *bv,* где матрица *av* получена из *AV* выбрасыванием столбцов с номерами свободных расходов, а вектор *U* получен из *VI* выбрасыванием строк с номерами свободных расходов.

Выбрасывая из матрицы *av* и вектора *bv* строки с номерами свободных расходов приходим к системе *AB U* = *BA,у* которой *detAB* # 0, и решить ее можно относительно *U* по формуле (6): U = *AB'^1 BA*.

3. Расчет перепадов давлений по минимуму материаловложений

Постановка и решение задачи оптимизации. Как отмечено в [1, 2, 4], задачу минимизации материальных вложений в газовую сеть можно записать в виде

$$Fi(p) = \left.\begin{array}{c} \sum_j \left(\frac{l_j}{p_j}\right)^{\alpha} \cdot V_j^{\beta} \cdot l_j \to min \\ C \cdot p = 0, TS \cdot p \le p0, \quad p > 0 \end{array}\right\}, \tag{9}$$

где $p0$ – максимально допустимый перепад давлений между точкой питания и точками схода.

Значение функции $Fi(p)$ зависит от начальных значений свободных расходов. Решая задачу (9) в конкретных случаях при различных значениях свободных расходов, можно заметить, значения $Fi(p)$ различаются на 1 – 2 %. В связи с этим значения свободных расходов удобно принять 0.5 путевого расхода плюс 0.5 транзитного. Решение задачи (9) в среде MATHCAD осуществляется с помощью следующей последовательности операторов:

$$\alpha := \frac{1}{4.75} \quad \beta := \frac{1.75}{4.75} \quad a := 0.211 \quad \beta := 0.368 \quad a := 2.02 \quad p0 := 120$$

$$F(p) := \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(l_j)^{1+\alpha} \cdot (V_j)^{\beta}}{(p_j)^{\alpha}} \qquad p_j := 5;$$

Given

$$C{\cdot}p = 0 \quad TS{\cdot}p \le 0 \quad p > 0$$

$$p0 := \mathrm{Minimize}(F, p)$$

Оптимальным решением задачи (9) будет вектор *ро.*

Подбор стандартных диаметров. По вектору *ро* находим диаметры участков, соответствующие оптимальному решению, с помощью 2-й из формул (1).

Найденные диаметры заменяем на близкие по размерам ГОСТовские диаметры D_j. По диаметрам D_j вычисляем перепады давлений ps_j по формуле:

$$d_j = \left(\frac{a \cdot l_j}{po_j}\right)^{\alpha} \cdot V_j^{\beta} . \tag{10}$$

Проверку условий технологичности и 2-го закона Кирхгофа можно сделать с помощью операторов $C{\cdot}ps$ = и $TS{\cdot}ps$ =.

Примеры показывают, что не для всех колец 2-й закон Кирхгофа выполняется. Допускается 10-процентное отклонение от выполнения 2-го закона Кирхгофа, т.е. для каждого кольца алгебраическая сумма перепадов давлений, деленная на сумму их абсолютных величин, по модулю не должна превышать 0.1. В среде MATHCAD такую проверку можно осуществить с помощью операторов

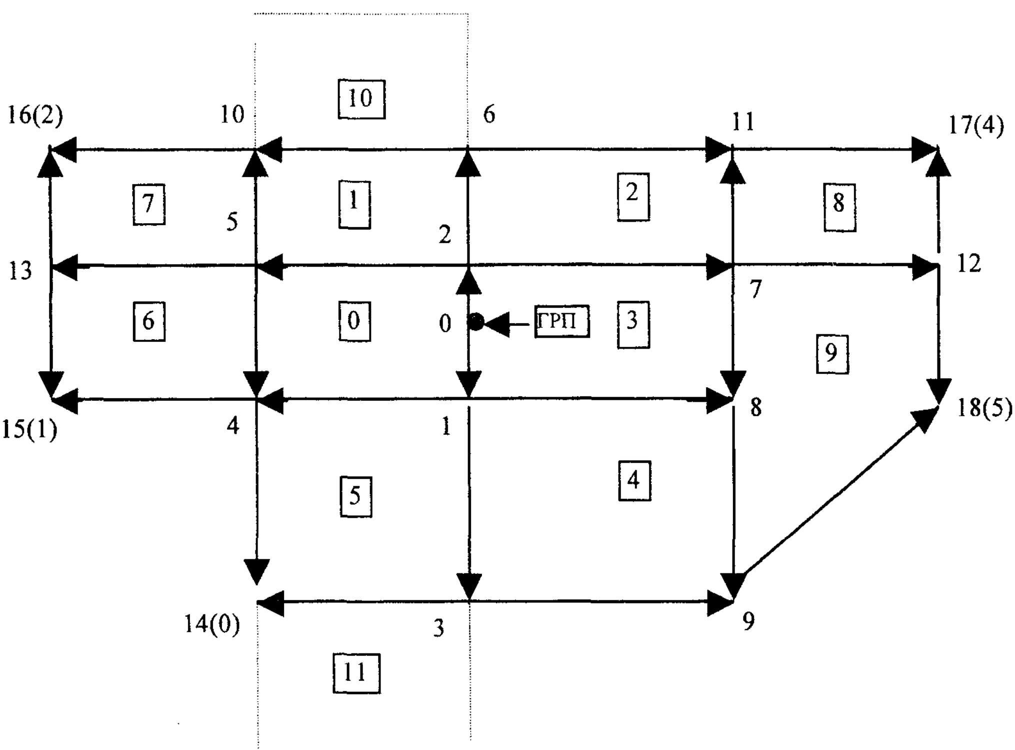
$$KIR_k := \frac{(C \cdot ps)_k}{\left(\sum_j |C_{k,j}| ps_j\right)} \cdot 100\% \quad , \quad (KIR)^T = \cdot \tag{11}$$

Покажем, что имеется принципиальная возможность корректировки расходов и стандартных диаметров с целью выполнения 2-го закона Кирхгофа. Для этого множество колец разбиваем на два подмножества. Кольца 1-го из них содержат все точки встречи и ограничены только участками из *LV*. Во 2-е подмножество относим все оставшиеся кольца. Из теоремы 1 следует, что число колец 1-го множества равно количеству свободных участков. Свободные участки назначаются так, чтобы каждое кольцо из 1-го множества было ограничено хотя бы одним из свободных участков (этот факт уже отмечался выше).

Укажем методику корректировки свободных расходов для выполнения 2-го закона Кирхгофа. Пусть для k-того кольца выражение (11) превышает по модулю 10 %. Для определенности предположим, что свободный участок k-того кольца направлен по часовой стрелке. Если $K1R_{\kappa} < 0$, то расход по свободному участку нужно увеличить. Если же $K1R_{\kappa} > 0$, то расход по свободному участку следует уменьшить. При невозможности дальнейшего увеличения (уменьшения) расхода свободного участка следует изменить диаметр этого участка. После изменения свободных расходов производится пересчет всех расходов по одному из вышеуказанных способов. Далее пересчитываются перепады давлений по формуле (10) и производится проверка выполнения 2-го закона Кирхгофа по формулам (11). Величина изменения свободных расходов определяется опытным путем, т.е. многократным повторением указанной процедуры. В результате для колец из 1-го множества 2-й закон Кирхгофа (с ошибкой не более 10 %) будет выполнен.

Для колец из 2-го множества (их количество совпадает с числом точек схода) выполнения 2-го закона Кирхгофа с 10-процентным допуском можно добиться изменением стандартных диаметров участков, оканчивающихся точками схода. Эти изменения не влияют на кольца 1-го множества.

Пример. На приведенной схеме указаны номера узлов в соответствии с алгоритмом Форда - Фалкерсона и номера газифицируемых площадей. Некоторые отклонения от алгоритма приняты в связи с необходимостью нумерации узлов встречи и участков из *LV* начальными цифрами 0, 1, 2,...; точки схода дополнительно пронумерованы в скобках. Произвести гидравлический расчет газовой сети.



Исходные данные для расчета: общий расход газа Q = 1500 м^3/ч; сосредоточенные расходы отсутствуют; размеры газифицируемых площадей (га) $F_0 = 7.5$, $F_1 = 7.5$, $F_2 = 10$, $F_3 = 8.75$, $F_4 = 7.5$, $F_5 = 12$, $F_6 = 10$, $F_7 = 14.87$, $F_8 = 10.5$, $F_9 =$, $F_{10} = 12$, $F_{11} = 9$; номера площадей 0, ..., 9 являются одновременно номерами колец;

участки, их концевые точки и длины определены следующими двумя таблицами, в которых 1-я строка - номер участка, 2-я строка - начало-конец участка, 3-я строка - длина участка (м):

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0-1	0-2	1-3	1-4	2-5	2-6	2-7	1-8	3-9	5-4	5-10	6-10	6-11	7-11
150	100	350	300	300	250	400	400	400	250	250	300	400	250

14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
7-8	8-9	5-13	7-12	3-14	4-14	4-15	13-15	13-16	10-16	11-17	12-17	12-18	9-18
250	350	300	350	300	350	300	250	250	300	350	250	250	350

Ниже приведено решение примера в среде MATHCAD.

Ввод исходных данных:

$m := 19$ $n := 28$ $K := 10$ $S := 12$ $SX := 5$ $i := 0..m-1$ $j := 0..n-1$ $j1 := 0..n-1$ $k := 0..K-1$

$s := 0..S-1$ $sx := 0..SX-1$ $Q := 1500$ $VS_i := 0$

$F := (12\ \ 7.5\ \ 10\ \ 10\ \ 14\ \ 10.5\ \ 7.5\ \ 7.5\ \ 8.75\ \ 14.87\ \ 12\ \ 9)$

$l1 := (150\ \ 100\ \ 350\ \ 300\ \ 300\ \ 250\ \ 400\ \ 400\ \ 400\ \ 250\ \ 250\ \ 300\ \ 400\ \ 250)$

$l2 := (250\ \ 350\ \ 300\ \ 350\ \ 300\ \ 350\ \ 300\ \ 250\ \ 250\ \ 300\ \ 350\ \ 250\ \ 250\ \ 350)$

$j0 := 0..13$ $l_{j0} := l1_{0,j0}$ $l_{j0+14} := l2_{0,j0}$

$A_{i,j} := 0$ $A_{0,0} := -1$ $A_{0,1} := -1$ $A_{1,2} := -1$ $A_{1,3} := -1$ $A_{1,7} := -1$ $A_{1,0} := 1$ $A_{2,4} := -1$ $A_{2,5} := -1$

$A_{2,6} := -1$ $A_{2,1} := 1$ $A_{3,8} := -1$ $A_{3,18} := -1$ $A_{3,2} := 1$ $A_{4,19} := -1$ $A_{4,20} := -1$ $A_{4,3} := 1$ $A_{4,9} := 1$

$A_{5,9} := -1$ $A_{5,10} := -1$ $A_{5,16} := -1$ $A_{5,4} := 1$ $A_{6,11} := -1$ $A_{6,12} := -1$ $A_{6,5} := 1$ $A_{7,13} := -1$ $A_{8,15} := -1$

$A_{8,7} := 1$ $A_{7,14} := -1$ $A_{7,17} := -1$ $A_{7,6} := 1$ $A_{9,8} := 1$ $A_{10,23} := -1$ $A_{8,14} := 1$ $A_{9,15} := 1$ $A_{9,27} := -1$

$A_{10,10} := 1$ $A_{10,11} := 1$ $A_{11,12} := 1$ $A_{11,13} := 1$ $A_{11,24} := -1$ $A_{12,17} := 1$ $A_{12,25} := -1$ $A_{12,26} := -1$

$A_{13,16} := 1$ $A_{13,21} := -1$ $A_{13,22} := -1$ $A_{15,20} := 1$ $A_{15,21} := 1$ $A_{14,18} := 1$ $A_{14,19} := 1$ $A_{16,22} := 1$

$A_{16,23} := 1$ $A_{17,24} := 1$ $A_{17,25} := 1$ $A_{18,26} := 1$ $A_{18,27} := 1$

$C_{k,j} := 0$ $C_{0,0} := 1$ $C_{0,1} := -1$ $C_{0,3} := 1$ $C_{0,9} := -1$ $C_{0,4} := -1$ $C_{1,5} := -1$ $C_{1,4} := 1$ $C_{1,10} := 1$ $C_{1,11} := -1$

$C_{2,6} := -1$ $C_{2,5} := 1$ $C_{2,12} := 1$ $C_{2,13} := -1$ $C_{3,0} := -1$ $C_{3,1} := 1$ $C_{3,6} := 1$ $C_{3,14} := 1$ $C_{3,7} := -1$ $C_{4,7} := 1$

$C_{4,15} := 1$ $C_{4,8} := -1$ $C_{4,2} := -1$ $C_{5,2} := 1$ $C_{5,18} := 1$ $C_{5,3} := -1$ $C_{5,19} := -1$ $C_{6,9} := 1$ $C_{6,20} := 1$ $C_{6,21} := -1$

$C_{6,16} := -1$ $C_{7,16} := 1$ $C_{7,22} := 1$ $C_{7,23} := -1$ $C_{7,10} := -1$ $C_{8,13} := 1$ $C_{8,24} := 1$ $C_{8,25} := -1$ $C_{8,17} := -1$

$C_{9,17} := 1$ $C_{9,26} := 1$ $C_{9,27} := -1$ $C_{9,15} := -1$ $C_{9,14} := -1$

$B_{s,j} := 0$ $B_{k,j} := \left| C_{k,j} \right|$ $B_{10,11} := 1$ $B_{11,18} := 1$

$TS_{sx,j} := 0$ $TS_{0,0} := 1$ $TS_{0,2} := 1$ $TS_{0,18} := 1$ $TS_{1,0} := 1$ $TS_{1,3} := 1$ $TS_{1,20} := 1$ $TS_{2,1} := 1$ $TS_{2,4} := 1$

$TS_{2,10} := 1$ $TS_{2,23} := 1$ $TS_{3,25} := 1$ $TS_{3,1} := 1$ $TS_{3,6} := 1$ $TS_{3,17} := 1$ $TS_{4,1} := 1$ $TS_{4,6} := 1$ $TS_{4,17} := 1$

$TS_{4,26} := 1$

Определение *путевых и узловых расходов*:

$$QF_s := \frac{Q}{\sum_s F_{0,s}} \cdot F_{0,s} \quad P_s := \sum_j B_{s,j} \cdot l_j \quad q_j := \sum_s \frac{B_{s,j} \cdot QF_s}{P_s} \quad VP_j := q_j \cdot l_j \quad VY_i := \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_j \left| A_{i,j} \right| \cdot VP_j \right).$$

Определение *расчетных расходов*:

$$A1_{i,j} := \frac{1}{2} \cdot \left(\left| A_{i,j} \right| + A_{i,j} \right) \quad A2_{i,j} := \frac{1}{2} \cdot \left(\left| A_{i,j} \right| - A_{i,j} \right) \quad A3 := A1^T \cdot A2;$$

$$E_{j1,j} := 0 \quad E0 := A1^T \cdot A1 \quad E_{j,j} := 1 \quad j2 := 0..n-1;$$

$$A0_{j1,j} := \mathrm{if}\left(\sum_{j2} A3_{j1,j2}, E0_{j1,j} - A3_{j1,j}, E_{j1,j} \right) \quad B0_{j1} := \mathrm{if}\left(\sum_j A3_{j1,j}, \sum_i A1_{i,j1} \cdot VY_i, \frac{1}{2} \cdot VP_{j1} \right).$$

В рассматриваемом случае расчетные расходы невозможно определить по 2-му способу. Применяем 3-й способ:

$$iv := 0..15 \quad jv := 0..15 \quad kv := 0..4 \quad is := 0..11 \quad js := 0..11;$$

$$AS_{is,js} := A0_{is+16,js+16} \quad AV_{iv,jv} := A0_{iv,jv} \quad AVS_{iv,js} := A0_{iv,js+16};$$

$$BV_{iv} := B0_{iv} \quad BS_{is} := B0_{is+16} \quad V2 := AS^{-1} \cdot BS \quad V_{is+16} := V2_{is}.$$

В качестве свободных выбираем участки 3, 10, 12, 14, 15.

Начальные значения свободных расходов выбираем равными половине путевого плюс половина максимального транзитного.

$$V1P_{iv} := VP_{iv} \quad V1_{iv} := 0.5 \cdot VP_{iv} \quad VT_{iv} := 0 \quad VT_3 := VP_{19} + VP_{20} \quad VT_{10} := VP_{23} \quad VT_{12} := VP_{24}$$

$$VT_{14} := VP_{15} + VP_{27} \quad VT_{15} := VP_{27} \quad k3 := 0.5 \quad k10 := 0.5 \quad k12 := 0.5 \quad k14 := 0.5 \quad k15 := 0.5$$

Given

$$AV \cdot V1 = BV - AVS \cdot V2 \quad V1 \geq 0.5 \cdot V1P \quad V1_3 = 0.5 \cdot VP_3 + k3 \cdot VT_3$$

$$V1_{10} = 0.5 \cdot VP_{10} + k10 \cdot VT_{10} \quad V1_{12} = 0.5 \cdot VP_{12} + k12 \cdot VT_{12} \quad V1_{14} = 0.5 \cdot VP_{14} + k14 \cdot VT_{14}$$

$$V1_{15} = 0.5 \cdot VP_{15} + k15 \cdot VT_{15}$$

$$V0 := \mathrm{Find}(V1) \quad V_{iv} := V0_{iv}$$

Решаем задачу минимизации:

$$\alpha := \frac{1}{4.75} \qquad \beta := \frac{1.75}{4.75} \qquad a := 2.06 \qquad \alpha = 0.2 \qquad \beta = 0.4$$

$$Fi(p) := \sum_j \frac{\left(l_j\right)^{1+\alpha} \cdot \left(V_j\right)^{\beta}}{\left(p_j\right)^{\alpha}} \qquad p_j := 5 \quad Fi(p) = 9.2 \cdot 10^4$$

Given

$$C \cdot p = 0 \quad p > 0 \quad TS \cdot p \le 120$$

$$po := \mathrm{Minimize}(Fi, p) \quad Fi(po) = 60272.194293$$

Определяем оптимальные диаметры и подбираем стандартные:

$$d_j := \left(\frac{a \cdot l_j}{po_j}\right)^{\alpha} \cdot \left(V_j\right)^{\beta}$$

$d^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	19	25.8	13.4	7.4	14.3	13.7	16.3	8.6	7.4	7.6

$m1 := 0..9$

$D1 := (21.3 \;\; 26.5 \;\; 15.3 \;\; 7.0 \;\; 15.3 \;\; 15.3 \;\; 15.3 \;\; 8.30 \;\; 7.0 \;\; 8.3)$

$d^T =$

	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0	5.7	8.9	6.5	6.2	9.1	9.1	8.2	9.3	7.8	5.3

$m0 := 10..19$

$D2 := (7.0 \;\; 8.3 \;\; 7.0 \;\; 7.0 \;\; 8.3 \;\; 8.3 \;\; 8.3 \;\; 10.2 \;\; 8.3 \;\; 5.1)$

$d^T =$

	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
0	7.8	5.3	4.5	4.1	4.1	5.1	5.6	4.4	4.8	7

$m3 := 20..27$

$D3 := (5.1 \;\; 3.9 \;\; 3.9 \;\; 5.1 \;\; 5.1 \;\; 5.1 \;\; 5.1 \;\; 7.0)$

$$D_{m1} := D1_{0,m1}; \quad D_{m1+10} := D2_{0,m1}; \quad D_{m3} := D3_{0,m3-20}.$$

Производим корректировку свободных расходов.

$$ps_j := a \cdot \frac{\left(V_j\right)^{1.75}}{\left(D_j\right)^{4.75}} \cdot l_j; \qquad KIR_k := \frac{(C \cdot ps)_k}{\sum_j \left| C_{k,j} \cdot ps_j \right|} \cdot 100.$$

$KIR^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	25.8	-36.1	-15.5	12.3	18.1	-31.1	-29.9	32.9	20.9	-34.4

$(TS \cdot ps)^T = (77.9 \;\; 117.5 \;\; 75.3 \;\; 100.7 \;\; 109.9)$

Все свободные участки направлены в своих кольцах (0 - 4) по часовой стрелке. Если значение KIR < 0, свободный расход увеличиваем, а при KIR > 0 уменьшаем. Проделывая эту процедуру несколько раз, добиваемся 10-процентного выполнения 2-го закона Кирхгофа в кольцах 0 - 4.

$$k3 := 0.3 \quad k10 := 1 \quad k12 := 0.6 \quad k14 := 0.4 \quad k15 := 0.3$$

Given

$$AV \cdot V1 = BV - AVS \cdot V2 \quad V1 \ge 0.5 \cdot V1P \quad V1_3 = 0.5 \cdot VP_3 + k3 \cdot VT_3 \quad V1_{10} = 0.5 \cdot VP_{10} + k10 \cdot VT_{10}$$

$$V1_{12} = 0.5 \cdot VP_{12} + k12 \cdot VT_{12} \quad V1_{14} = 0.5 \cdot VP_{14} + k14 \cdot VT_{14} \quad V1_{15} = 0.5 \cdot VP_{15} + k15 \cdot VT_{15}$$

$$V0 := \mathrm{Find}(V1) \quad V_{iv} := V0_{iv}$$

$$ps_j := a \cdot \frac{(V_j)^{1.75}}{(D_j)^{4.75}} \cdot l_j \quad KIR_k := \frac{(C \cdot ps)_k}{\sum_j |C_{k,j} \cdot ps_j|} \cdot 100$$

$KIR^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	-0.9	-9.3	-6.2	0.5	5.6	-19.9	-20.9	17.9	17.9	-24.3

$$(TS \cdot ps)^T = (79.4 \;\; 91.4 \;\; 96.4 \;\; 96.7 \;\; 106)$$

Для выполнения 2-го закона Кирхгофа в кольцах 5 – 9 корректируем диаметры в этих кольцах.

$$D_{19} := 7 \quad D_{21} := 5.1 \quad D_{22} := 5.1 \quad D_{24} := 7 \quad D_{27} := 8.3 \quad D_{25} := 7 \quad D_{15} := 10.2$$

$$ps_j := a \cdot \frac{(V_j)^{1.75}}{(D_j)^{4.75}} \cdot l_j \qquad KIR_k := \frac{(C \cdot ps)_k}{\sum_j |C_{k,j} \cdot ps_j|} \cdot 100$$

$KIR^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	-0.9	-9.3	-6.2	0.5	-3.7	0	3.4	-6.5	2.1	-6

$$(TS \cdot ps)^T = (79.4 \;\; 91.4 \;\; 96.4 \;\; 85 \;\; 106) \qquad \frac{Fi(ps)}{Fi(po)} \cdot 100 = 107.5$$

Из последних значений KIR и TS-ps видно, что 10-процентное выполнение 2-го закона Кирхгофа достигнуто во всех кольцах. Значение целевой функции увеличилось по сравнению с оптимальным на 7,5 %.

ЛИТЕРАТУРА

1. Евдокимов А.А., Дубровский В.В. Потокораспределение в инженерных сетях. - М.: Стройиздат, 1979.-200 с.
2. Евдокимов А.А., Тевяшев А.Д. Моделирование и оптимизация потокораспределения в инженерных сетях. - М.: Стройиздат, 1990. - 368 с.
3. Ионин А.А. Газоснабжение. - М.: Стройиздат, 1989. - 440 с.
4. Левин А.М. Проектирование газовых сетей городов и населенных пунктов. - Новополоцк: ПГУ, 1996. - 48 с.