УДК 696.2 (075.8)

МОДЕЛИРОВАНИЕ НА ПЭВМ ТУПИКОВЫХ РАЗВЕТВЛЕННЫХ ГАЗОВЫХ СЕТЕЙ НИЗКОГО ДАВЛЕНИЯ

канд. техн. наук, доц. В.В. БУЛАХ, канд. физ.- мат. наук, доц. И.Б. СОРОГОВЕЦ
(Полоцкий государственный университет)

Приводится методика гидравлического расчета на ПЭВМ (в среде MATHCAD) тупиковых разветвленных газовых сетей низкого давления на основе углубленного применения матричных представлений графическш изображений газовых сетей.

1. **Матричные представления тупиковых разветвленных газовых сетей.** При моделировании газовых сетей широко применяется понятие графа [1,2]. *Под графом понимают множество точек плоскости, соединенных между собой отрезками прямых или кривых линий.* Формально граф G определяется парой множеств: $G = (X, U)$, где $X = \{x_ь\ x_ъ\ ...,\ x_m\}$ - множество точек, называемых вершинами графа, $U = \{щ,\ u_ъ\ ....\ u_{,,}\}$ - множество отрезков прямых или кривых линий, соединяющих некоторые вершины. Если на этих отрезках указано, какая вершина является начальной, а какая конечной, то отрезок называют *дугой.* В противном случае отрезок называют *ребром.* Говорят, что дуга (ребро) *инцидентна* своим концевым вершинам и наоборот.

Граф $G = (X, U)$ называется *ориентированным* (или *орграфом),* если все элементы множества U являются дугами. Если же все элементы множества U являются ребрами, то соответствующий граф называют неориентированным. Граф может быть смешанным.

Путь в орграфе - последовательность дуг, в которой конец каждой предыдущей совпадает с началом следующей. Путь, у которого конечная вершина совпадает с начальной, называется *контуром.*

В приложениях дугам (ребрам) графа могут приписываться одна или несколько числовых характеристик (длина, время, пропускная способность и др.).

Ниже под *орграфом* будем понимать *инженерную газовую сеть низкого давления (ГНД)* условного населенного пункта. Вершины таких графов называют *узлами,* а дуги - *участками.* Предполагается, что все узлы и участки расположены в одной плоскости. Направления участков определяются направлением движения газа. Каждый участок характеризуется своей длиной, диаметром трубы, потерей давления и др. Множество участков, ограничивающих некоторую фигуру, называют *кольцом.* Предполагается, что указанная фигура не пересекается никакими другими участками. В данной работе будут рассматриваться ГНД, *не* содержащие колец. Такие сети называются *тупиковыми разветвленными* ГНД [3].

Газовая сеть считается рассчитанной, если для каждого участка известны его длина, диаметр трубы, расход газа, и перепад давления. Исходными данными для расчета тупиковых разветвленных ГНД являются: взаимное расположение узлов и участков (граф - схема сети); длины всех участков; сосредоточенные расходы в каждом узле; общий расход газа; максимальный перепад давления между точкой питания и конечными точками газовой сети.

При производстве расчетов на ЭВМ (в данной работе предполагается, что все расчеты будут производиться в среде MATHCAD) граф-схему сети следует задать числами. В теории графов основным способом задания графа являются *матрицы инциденций (инцидентности).* Для задания граф-схем тупиковых разветвленных ГНД (при естественной ориентации участков в направлении от точки питания к концевым точкам) будем использовать следующие матрицы инцидентности: матрица A инцидентности между участками и узлами; матрица TS инцидентности между путями, идущими в конечные точки и участками.

Первым этапом определения матриц A, TS является упорядочение узлов и участков орграфа сети. Это можно сделать, например, с помощью алгоритма Форда - Фалкерсона. Суть его состоит в следующем. Узел подключения к газораспределительному пункту (ГРП) обозначаем цифрой 0. Участкам, исходящим из узла 0, произвольно присваиваем номера 0, 1, 2, ... (начиная, например, снизу и далее по ходу часовой стрелки). Вычеркивая узел 0 и пронумерованные участки (первое вычеркивание), получим группу узлов, в которые не входит ни один участок. Нумеруем полученные узлы и участки из них выходящие. Вычеркивая пронумерованные узлы и участки (второе вычеркивание), получим группу узлов, в которые не входит ни один участок и т.д. В результате все узлы и участки будут пронумерованы.

Замечание 1. Нумерацию узлов и участков можно производить любым другим образом, что не влияет на результаты расчета. Однако указанный выше способ имеет определенные преимущества.

Замечание 2. Для удобства расчетов в среде MATHCAD нумерацию узлов, участков и других объектов газовых сетей начинаем с цифры 0.

Рассматриваемые ниже матрицы инцидентности относятся к так называемым «разреженным» матрицам, т.е. большинство элементов этих матриц равны нулю и только некоторые из элементов отличны от нуля.

Матрица A инцидентности между участками и узлами определяется следующим образом: строки матрицы A соответствуют узлам, столбцы – участкам, т.е. размеры матрицы A равны $m \times n$, где m – количество узлов, n – количество участков; если i-тый узел является началом j-того участка ($i = 0, 1,..., m - 1$; $j = 0, 1, ..., n - 1$), то $A_{i,j} = -1$; если i-тый узел является концом j-того участка, то $A_{i,j} = 1$; все остальные элементы матрицы A равны нулю.

Строки матрицы TS соответствуют концевым точкам или точкам схода, количество которых обозначим SX. Эти точки следует пронумеровать отдельно от 0 до $SX - 1$ ($sx = 0, 1, ..., SX - 1$). Если j-тый участок является частью пути из узла 0 в точку с номером sx, то $TS_{sx,j} = 1$. Остальные элементы матрицы TS равны нулю.

При построении матриц A, TS в среде MATHCAD сначала вводим размеры матриц: m – количество узлов; n – количество участков; SX – количество точек схода. Определяем индексы элементов матриц: i, $i1 = 0, \dots, m - 1$ – индексы узлов; j, $j1 = 0, ..., n - 1$ – индексы участков; $sx = 0, ..., SX - 1$ – индексы точек схода. После этого обнуляем элементы всех матриц: $A_{i,j} = 0$, $TS_{sx,j} = 0$. Просматривая граф-схему газифицируемого населенного пункта, задаем ненулевые элементы матриц A, TS.

При расчете разветвленных тупиковых газовых сетей дополнительными исходными данными для расчета являются: $l = (l_0, l_1, ..., l_{n-1})$ – вектор длин участков; $q = (q_0, q_1, ..., q_{n-1})$ – вектор удельных путевых расходов по участкам; $VS = (VS_0, VS_1, ..., VS_{m-1})$ – вектор сосредоточенных расходов в каждом узле. Вместо вектора q могут быть заданы другие данные, с помощью которых этот вектор можно рассчитать (например, общий расход газа Q при условии равномерной раздачи газа по каждому участку). Неизвестными в задаче расчета являются расчетные расходы газа по каждому участку V_j, диаметры участков d_j, перепады давлений на участках p_j.

2. Определение расчетных расходов газа. Будем считать известными удельные путевые расходы q_j. Если известен лишь общий расход газа для данной сети, то при условии равномерной раздачи газа удельные путевые расходы вычисляем по известной формуле

$$q_j = q = \frac{Q - \sum_i VS_i}{\sum_j l_j}. \tag{1}$$

Для нахождения V_j по A и TS введем вспомогательные матрицы

$$A1_{i,j} = \frac{1}{2} \cdot \left(\left| A_{i,j} \right| + A_{i,j} \right), B1 = TS^T \cdot TS. \tag{2}$$

В (2) символом S^T обозначена транспонированная матрица. Введенные матрицы имеют следующий смысл. Так как $A1$ получена из A выбрасыванием отрицательных элементов, то ее можно назвать матрицей инцидентности между участками и их точками входа, т.е. $A1_{i,j} = 1$, если i-тый узел является точкой входа для j-того участка, и $A1_{i,j} = 0$, если нет.

Видно, что $B1$ является симметричной $n \times n$ матрицей. Анализ операции умножения показывает, что $B1_{j,j}$ дает количество путей, проходящих через j-тый участок, а $B1_{j,j1}$ указывает количество путей, в которые входит $j1$-тый участок совместно с j-тым участком. При принятой системе нумерации узлов и участков, каждый последующий участок любого пути в точку схода имеет номер больший, чем номер предшествующего участка. В связи с этим элементы матрицы $B1$, лежащие ниже диагональных, можно заменить нулями, так как они не несут никакой дополнительной информации. Если в матрице $B1$ элементы лежащие ниже главной диагонали положить равными нулю, а ненулевые элементы, лежащие на главной диагонали и выше положить равными 1, то получим некоторую матрицу AT. Смысл элементов: если $AT_{j,j1} = 1$ ($j1 > j$), то $j1$-тый участок является продолжением пути в конечную точку, на котором лежит j-тый участок. С помощью матрицы AT удобно находить расчетные расходы.

Путевые расходы находим по формуле

$$VP_j = q_j \cdot l_j. \tag{3}$$

При упрощенной схеме нахождения *узловых расходов*

$$VY_i = \frac{1}{2} \cdot \sum_j \left| A_{i,j} \right| VP_j + VS_i. \tag{4}$$

По этой схеме половина путевого расхода на участке остается в начальном узле, а вторая половина расходуется в конечном. В некоторых случаях [3] эта схема приводит к заниженным значениям расчетных расходов. В таких случаях узловые расходы рекомендуется вычислять следующим образом: 0,45 путевого расхода реализуется в начальном узле каждого участка и 0,55 – в конечном. В среде MATHCAD это можно сделать с помощью условного оператора:

$$VY_i = \sum_j if(A_{i,j} = -1,\ 0{,}45\cdot VP_j,\ 0{,}55\cdot A_{i,j}\cdot VP_j) + VS_i . \tag{5}$$

Расчетные расходы V_j можно вычислить как сумму узловых расходов во всех узлах, идущих за j-тым участком (в том числе в узле входа j-того участка) и лежащих на путях, проходящих через этот участок. В среде MATHCAD для нахождения V_j в j-той строке матрицы AT выбираем ненулевые элементы (они равны 1 и соответствуют участкам, лежащим на путях, проходящих через j-тый участок). Далее, по матрице $A1$ определяется узел входа выбранного участка и узловой расход этого узла добавляется к V_j.
В результате получаем формулу для реализации в среде MATHCAD:

$$V_j = \sum_{j1=j}^{n-1} if(AT_{j,j1} = 1,\ \sum_i A1_{i,j1}\cdot VY_i,\ 0). \tag{6}$$

Таким образом, расходы по каждому участку становятся известными.

3. Определение перепадов давлений по методу минимизации материальных вложений. Как отмечено в [1, 2, 4], материаловложения в каждый участок можно считать пропорциональными диаметру участка и его длине. Тогда целевая функция задачи минимизации материаловложений в газовую сеть имеет вид

$$F = \sum_{j=0}^{n-1} l_j\cdot d_j .$$

Из формулы гидравлических потерь диаметры можно выразить через расходы и потери давлений:

$$p_j = a\cdot\frac{V_j^{1.75}}{d_j^{4.75}}\cdot l_j \quad\Rightarrow\quad d_j = \left(\frac{a\cdot l_j}{p_j}\right)^{\alpha}\cdot V_j^{\beta}\ (\alpha = \frac{1}{4.75}, \beta = \frac{1.75}{4.75}), \tag{7}$$

где коэффициент a зависит от используемого газа (например, для метана a = 2.02, для природного газа плотностью 0.73 кг/м^3 a = 2.06). Тогда задачу минимизации металловложений можно записать в виде:

$$F(p) = \sum_j \left(\frac{l_j}{p_j}\right)^{\alpha}\cdot V_j^{\beta}\cdot l_j \quad\to \min \tag{8}$$

при условиях

$$TS\cdot p \le p0,\ p > 0. \tag{9}$$

Неизвестными в этой задаче становятся перепады давлений p_j. Первое из условий (9) – условие технологичности, означающее, что перепад давления на пути от ГРП до каждой конечной точки не должен превышать предельно допустимого перепада $p0$ (обычно $p0$ = 120 даПа).

В среде MATHCAD задача (8) – (9) решается при помощи следующей последовательности операторов:

$$F(p) := \sum_{j=0}^{n-1}\frac{(l_j)^{1+\alpha}\cdot(V_j)^{\beta}}{(p_j)^{\alpha}} \qquad p_j := 5$$

Given

$$TS\cdot p \le 120 \quad p > 0$$

$$p0 := \mathrm{Minimize}\,(F, p)$$

Оптимальным решением будет вектор po. После решения задачи (8) – (9) по второй из формул (7), которую записываем в виде

$$d_j = \left(\frac{a\cdot l_j}{po_j}\right)^{\alpha}\cdot V_j^{\beta} ,$$

находим диаметры труб d_j на каждом участке. Найденные диаметры заменяем на близкие по размерам ГОСТовские диаметры D_j. По диаметрам D_j вычисляем перепады давлений ps_j по первой из формул (7):

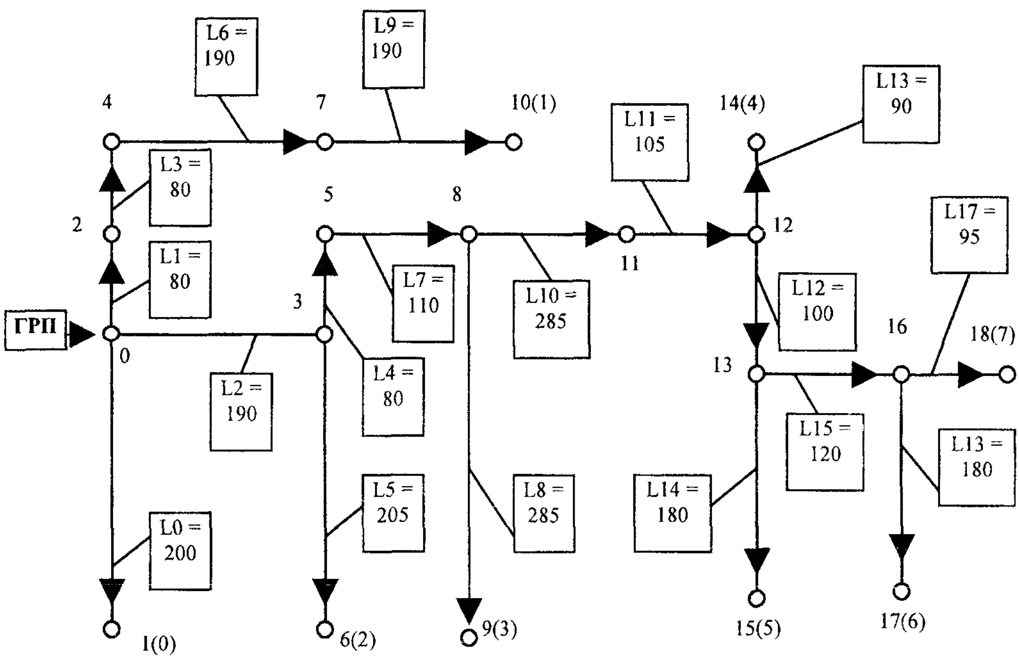
$$ps_j = a \cdot \frac{V_j^{1.75}}{D_j^{4.75}} \cdot l_j.$$

Далее производим проверку условий технологичности с помощью оператора $(TS\text{-}ps)^T$.

При невыполнении условия технологичности на каких-либо путях некоторые из стандартных диаметров на этих путях следует заменить на диаметры большего размера.

Пример. Произвести гидравлический расчет тупиковой разветвленной газовой сети низкого давления [3, с. 93 - 98], изображенной на нижеприведенной схеме.

Узлы и участки перенумерованы в соответствии с алгоритмом Форда - Фалкерсона.



На схеме указаны номера узлов цифрами 0, 1, ..., 18. Концевые точки дополнительно пронумерованы в скобках цифрами 0, 1, ..., 7. Информация об участках представлена в прямоугольных блоках (например, L14 = 180 означает, что участок имеет номер 14 и его длина равна 180 м). Всего на схеме 18 участков с номерами 0, 1, ..., 17. Другие исходные данные для расчета: максимальное часовое потребление газа, рассчитанное по количеству жителей рассматриваемого микрорайона, равно 959,8 м^3/ч; максимально допустимый перепад давления $p0$ = 100 даПа. Приведем основные этапы расчета в среде MATHCAD.

Задаем количество узлов (19), участков (18), конечных точек (8) и определяем индексы этих элементов:

$$m := 19 \quad n := 18 \quad SX := 8 \quad i := 0, \ldots, m-1 \quad j := 0, \ldots, n-1 \quad sx := 0, \ldots, SX-1$$

Вводим длины участков сначала в виде матрицы-строки L, а затем переопределяем в виде вектора-столбца l:

$$L := (200\ 80\ 190\ 80\ 80\ 205\ 190\ 110\ 285\ 170\ 140\ 105\ 100\ 90\ 180\ 120\ 180\ 95);$$

$$l_j := L_{0,j}.$$

Задаём общий часовой расход газа Q. Так как сосредоточенные расходы отсутствуют, то вектор $VS = 0$.

$$Q := 959.8; \quad VS_i = 0.$$

Определяем матрицы A и TS инцидентности между узлами и участками, а также между путями к конечным точкам и участками.

Для этого сначала обнуляем эти матрицы, затем по граф-схеме сети переопределяем ненулевые элементы:

$$A_{i,j} := 0 \quad TS_{sx,j} := 0 \quad A_{0,0} := -1 \quad A_{0,1} := -1 \quad A_{0,2} := -1 \quad A_{1,0} := 1 \quad A_{2,1} := 1 \quad A_{2,3} := -1$$

$$A_{3,2} := 1 \quad A_{3,4} := -1 \quad A_{3,5} := -1 \quad A_{4,3} := 1 \quad A_{4,6} := -1 \quad A_{5,4} := 1 \quad A_{5,7} := -1 \quad A_{6,5} := 1$$

$$A_{7,6} := 1 \quad A_{7,9} := -1 \quad A_{8,7} := 1 \quad A_{8,8} := -1 \quad A_{8,10} := -1 \quad A_{10,9} := 1 \quad A_{11,10} := 1$$

$$A_{11,11} := -1 \quad A_{12,11} := 1 \quad A_{12,12} := -1 \quad A_{9,8} := 1 \quad A_{12,13} := -1 \quad A_{13,12} := 1 \quad A_{13,14} := -1$$

$$A_{13,15} := -1 \quad A_{14,13} := 1 \quad A_{15,14} := 1 \quad A_{16,15} := 1 \quad A_{16,17} := -1 \quad A_{16,16} := -1 \quad A_{17,16} := 1$$

$$A_{18,17} := 1 \quad TS_{0,0} := 1 \quad TS_{1,1} := 1 \quad TS_{1,3} := 1 \quad TS_{1,6} := 1 \quad TS_{1,9} := 1 \quad TS_{2,2} := 1$$

$$TS_{2,5} := 1 \quad TS_{3,2} := 1 \quad TS_{3,4} := 1 \quad TS_{3,7} := 1 \quad TS_{3,8} := 1 \quad TS_{4,2} := 1 \quad TS_{4,4} := 1 \quad TS_{4,7} := 1$$

$$TS_{4,10} := 1 \quad TS_{4,11} := 1 \quad TS_{4,13} := 1 \quad TS_{5,2} := 1 \quad TS_{5,4} := 1 \quad TS_{5,7} := 1 \quad TS_{5,10} := 1$$

$$TS_{5,11} := 1 \quad TS_{5,12} := 1 \quad TS_{5,14} := 1 \quad TS_{6,2} := 1 \quad TS_{6,4} := 1 \quad TS_{6,7} := 1 \quad TS_{6,10} := 1$$

$$TS_{6,11} := 1 \quad TS_{6,12} := 1 \quad TS_{6,15} := 1 \quad TS_{6,16} := 1 \quad TS_{7,2} := 1 \quad TS_{7,4} := 1 \quad TS_{7,7} := 1$$

$$TS_{7,10} := 1 \quad TS_{7,11} := 1 \quad TS_{7,12} := 1 \quad TS_{7,15} := 1 \quad TS_{7,17} := 1$$

Определяем вспомогательные матрицы $A1$, $B1$, AT, M. Матрица M служит для расчета узловых расходов:

$$j1 := 0, ..., n-1 \quad A1_{i,j} := \frac{1}{2}\left(\left|A_{i,j}\right| + A_{i,j}\right) \quad B1 := TS^T \cdot TS;$$

$$AT_{jl,j} := if(j1 > j,\ 0,\ if(B1_{jl,j} > 0,\ 1,\ 0)) \qquad M_{jl,j} := if(A_{jl,j} = -1,\ 0.45,\ A_{jl,j} \cdot 0.55).$$

Находим последовательно: удельный путевой расход на единицу длины; путевые расходы по участкам; узловые расходы; расчетные расходы по каждому участку:

$$q := \frac{Q}{\sum_j l_j} \qquad VP_j := ql_j \qquad VY_i := \sum_J M_{i,j} \cdot VP + VS_i;$$

$$V_j := \sum_{jl=j}^{n-1} if\left(AT_{j,jl} = 1,\ \sum_i Al_{i,jl} \cdot VY_i,\ 0\right).$$

Решаем задачу минимизации материальных вложений в сеть:

$$\alpha := \frac{1}{4.75} \quad \beta := \frac{1.75}{4.75} \quad a := 2.06 \quad Fi(p) := \sum_j \frac{\left(l_j\right)^{1+\alpha} \cdot \left(V_j\right)^\beta}{\left(p_j\right)^\alpha} \quad p_j := 5;$$

Given

$$p > 0 \quad TS \cdot p \le 100 \qquad p0 := \text{Minimize}\,(Fi, p)$$

Определяем оптимальные диаметры участков и подбираем близкие стандартные диаметры:

$$d_j := \left(\frac{al_j}{po_j}\right)^\alpha \cdot \left(V_j\right)^\beta$$

$d^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	5.3	10.7	20.7	10.1	19.2	5.6	8.9	18.8	7.1	6.4

$dst := (5.1\ \ 10.2\ \ 21.3\ \ 10.2\ \ 21.3\ \ 7.0\ \ 8.3\ \ 21.3\ \ 7.0\ \ 7.0)$

$d^T =$

	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
0	7.1	6.4	16.3	15.6	14.2	4.1	6.5	11.2	7.3	5

$dst := (15.3\ \ 15.3\ \ 15.3\ \ 3.9\ \ 7.0\ \ 10.2\ \ 7.0\ \ 5.1)$

$jd1 := 0..9 \qquad jd2 := 10..17 \qquad D_{jd1} := dst1_{0,jd1} \qquad D_{jd2} := dst2_{0,jd2-10}$

Проверяем выполнение условий технологичности при выбранных стандартных диаметрах. Для этого определяем перепады давлений ps при этих диаметрах и вычисляем $TS \cdot ps$:

$$ps_j := a \cdot \frac{(V_j)^{1.75}}{(D_j)^{4.75}} \cdot l_j;$$

$$(TS \cdot ps)^T = (117.217\ \ 111.512\ \ 44.465\ \ 96.252\ \ 104.411\ \ 83.999\ \ 102.928\ \ 98.566).$$

Как видно, условие технологичности не выполнено для 0-й, 1-й, 4-й и 6-й конечных точек. Увеличиваем некоторые из диаметров:

$$D_0 := 7 \qquad D_6 := 10.2 \qquad D_{13} := 5.1 \qquad D_{16} := 8.3;$$

$$ps_j := a \cdot \frac{(V_j)^{1.75}}{(D_j)^{4.75}} \cdot l_j;$$

$$(TS \cdot ps)^T = 77.432\ \ 44.465\ \ 96.252\ \ 70.816\ \ 83.999\ \ 92.114\ \ 98.566).$$

Теперь условие технологичности выполнено для всех крайних точек. Сравним значения целевой функции на векторах *po* и *ps*:

$$Fi(po) = 2.253 \cdot 10^4; \qquad Fi(ps) = 2.395 \cdot 10^4; \qquad \frac{Fi(ps)}{Fi(po)} \cdot 100 = 106.313.$$

При замене оптимальных диаметров на стандартные значение целевой функции увеличилось на 6.3 %.

Составляем окончательную расчетную таблицу по участкам: 1-я строка – № участка; 2-я строка – расчетные расходы; 3-я строка – перепады давлений; 4-я строка – стандартные диаметры.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 \\ 41 & 179 & 662 & 149 & 535 & 42 & 101 & 500 & 58 & 35 & 350 & 304 & 233 & 18 & 37 & 126 & 37 & 19 \\ 26 & 23 & 17 & 17 & 5 & 28 & 21 & 6 & 69 & 17 & 19 & 11 & 7 & 13 & 19 & 19 & 9 & 15 \\ 7 & 10.2 & 21.3 & 10.2 & 21.3 & 7 & 10.2 & 21.3 & 7 & 7 & 15.3 & 15.3 & 15.3 & 5.1 & 7 & 10.2 & 8.3 & 5.1 \end{bmatrix}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Евдокимов А.А., Дубровский В.В. Потокораспределение в инженерных сетях. - М.: Стройиздат, 1979.-200 с.
2. Евдокимов А.А., Тевяшев А.Д. Моделирование и оптимизация потокораспределения в инженерных сетях. - М.: Стройиздат, 1990. - 368 с.
3. Ионин А.А. Газоснабжение. - М.: Стройиздат, 1989. - 440 с.
4. Левин А.М. Проектирование газовых сетей городов и населенных пунктов. - Новополоцк: ПГУ, 1996. - 48 с.