УДК 528. 063

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАВИСИМОСТИ ВЕЛИЧИНЫ ЧИСЕЛ ОБУСЛОВЛЕННОСТИ ОТ КОЛИЧЕСТВА ПУНКТОВ СПЛОШНЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ ПРИ УРАВНИВАНИИ ИХ КОРРЕЛАТНЫМ И ПАРАМЕТРИЧЕСКИМ СПОСОБАМИ

П.Ф. ПАРАДНЯ, канд. техн. наук Л. А. ЧЕРКАС
(Полоцкий государственный университет)

Рассмотрена зависимость величины чисел обусловленности от количества пунктов сплошных геодезических сетей при уравнивании их коррелатным и параметрическим способами.

С увеличением порядка нормальных уравнений возникает проблема их обусловленности [1]. Система нормальных уравнений считается хорошо обусловленной, если небольшие изменения в ее коэффициентах и свободных членах существенно не влияют на результаты решения. Это условие равносильно тому, что, во-первых, малые изменения элементов исходной матрицы коэффициентов нормальных уравнений R незначительно изменяют элементы ее обратной матрицы R^{-1} и, во-вторых, элементы обратной матрицы оказываются достаточно малыми по величине.

Явным признаком плохой обусловленности системы нормальных уравнений является чувствительность элементов ее обратной матрицы к малым изменениям элементов ее исходной матрицы. На практике, решая плохо обусловленные системы, можно получить такие значения искомых неизвестных, которые не будут соответствовать реальным значениям.

Как известно, метод Гаусса, широко применяемый для решения систем нормальных уравнений, реализует алгоритм разложения матрицы нормальных уравнений на две треугольных матрицы. При этом определитель исходной матрицы равен произведению диагональных элементов верхней треугольной матрицы преобразованных уравнений. Отсюда первым признаком для оценки обусловленности системы нормальных уравнений служат значения диагональных коэффициентов преобразованной системы. Если же среди этих диагональных элементов найдется один или несколько элементов малых по величине, то это явный признак плохой обусловленности уравнений с такой матрицей.

Одним из признаков плохой обусловленности матрицы нормальных уравнений является малая величина определителя этой матрицы. Такой определитель может быть мал либо потому, что длины отдельных векторов, порождаемых матрицей, малы, либо потому, что углы между ними невелики., т.е. при большой косоугольности матрицы системы нормальных уравнений.

Для характеристики матрицы с точки зрения ее обусловленности существуют различные качественные показатели, называемые числами обусловленности.

В зависимости от принятой нормы числа обусловленности могут быть определены различными способами. Наиболее часто используются способы представленные в [1,2]:

- *два числа Тюринга:*

$$N = \frac{1}{t} N(R) N(R^{-1}) = \nu(R);$$

$$M = \frac{1}{t} M(R) M(R^{-1}) = \mu(R),$$

где нормы матриц равны

$$N(R) = \sqrt{SpR^T R};$$

$$M(R) = t \cdot max|r_{ij}|.$$

Число M обычно дает относительную характеристику обусловленности матрицы R по отношению к другой матрице.

- *число Тодда*:

$$\rho(R) = \frac{max|\lambda_i|}{min|\lambda_i|},$$

где λ_i – собственные числа матрицы R.

Число ρ является критической величиной, определяющей надежность решения системы с матрицей R. Оценка этой критической величины ρ связана с проблемой поиска собственных значений λ_i матрицы R.

- *Н-число*:

$$\|R\|_3 \|R^{-1}\|_3 = \sqrt{\frac{\mu_{max}}{\mu_{min}}} = \eta(R),$$

где μ_{max} и μ_{min} – наибольшее и наименьшее собственные значения матрицы $R^T R$, при этом $\eta(R) = \sqrt{\rho(R^T R)}$. Для симметричных матриц числа ρ и *Н*-число совпадают $\rho(R) = \eta(R)$ и выражают критическую величину, характеризующую надежность решения нормальных уравнений [41]. *Н*-число называют спектральным числом обусловленности:

$$\eta(R) = \|R\|_3 \|R^{-1}\|_3 = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}},$$

где σ_{max} и σ_{min} – максимальное и минимальное сингулярные числа.

Часто под числом обусловленности понимается величина

$$\nu_i = \|R\|_i \|R^{-1}\|_i,$$

где $\|R\|_i$ – одна из трех норм матриц, причем $\nu_3 \le \nu_1$, $\nu_3 \le \nu_2$ и $\nu_i \le 1$.

Чем больше число обусловленности, тем менее устойчива матрица R.

Целью данной работы является не только поиск эмпирических формул предрасчета числа обусловленности (C_K) по числу избыточных измерений r, но и сравнение чисел C_K с числами обусловленности для системы нормальных параметрических уравнений (C_P), вычисленных по формулам:

$$C_P = \|R\| \cdot \|Q\|; \tag{1}$$

$$C_K = \|N\| \cdot \|N^{-1}\|, \tag{2}$$

где $\|R\|$ – корень квадратный из суммы квадратов всех элементов матрицы нормальных параметрических уравнений; $\|N\|$ – корень квадратный из суммы квадратов всех элементов матрицы нормальных уравнений коррелат.

В работах [3, 4] для любых симметричных, свободных геодезических сетей при параметрическом способе их уравнивания получена следующая эмпирическая формула

$$C_P = 0.7K_P^{2.5}, \tag{3}$$

где K – количество определяемых пунктов, $(K+2)$ – количество всех пунктов).

Для аналогичных геодезических сетей при их уравнивании коррелатным способом получены следующие эмпирические формулы:

- *трилатерация*

$$C_K = r^2; \tag{4}$$

- *триангуляция*

$$C_K = 0.010r^4; \tag{5}$$

- *линейно-угловая триангуляция*

$$C_K = 700r^2, \tag{6}$$

где r – число избыточных измерений.

Отметим, что формула (4) более универсальная, чем (5) или (6), так как при $r = 1$, $C_K = 1$ для любых геодезических сетей.

Установлено, что для исследуемых сплошных геодезических сетей связь между C и количеством определяемых пунктов K_K следующая:

- *трилатерация*

$$K_K = 2.82r^{0.83}; \tag{7}$$

- *триангуляция*

$$K_K = 0.333r; \tag{8}$$

- *линейно-угловая триангуляция*

$$K_K = 0.26r^{0.928}. \tag{9}$$

Из формулы (3) следует

$$K_P = 1.43 C_P^{0.4}. \tag{10}$$

В таблице приведены расчеты по формулам (3) – (10), позволяющие сделать следующие выводы:

1) параметрическим способом выгодно уравнивать триангуляцию и линейно-угловую триангуляцию, так как при $C_K = C_P$, $K_P > K_K$;

2) коррелатным способом целесообразно уравнивать трилатерацию, так как при $C_K = C_P$, $K_K > K_P$;

3) дополнительные исследования показали, что при уравнивании сплошных сетей полигонометрии при $K_P = K_K > 10$, $C_K >> C_P$ несмотря на то, что число уравнений r в несколько раз меньше числа параметров, следовательно, сплошные сети полигонометрии следует уравнивать параметрическим способом, так как система нормальных уравнений коррелат, как правило, хуже обусловлена.

Значения чисел обусловленности для сплошных геодезических сетей

Число условных уравнений r	Триангуляция			Трилатерация			Линейно-угловая триангуляция		
	C_K; C_P	K_K	K_P	C_K; C_P	K_K	K_P	C_K; C_P	K_K	K_P
10	100	3	7	100	20	7	$7{,}00 \cdot 10^4$	2	100
100	$1{,}00 \cdot 10^6$	30	290	$1{,}00 \cdot 10^4$	137	46	$7{,}00 \cdot 10^6$	19	631
200	$16{,}0 \cdot 10^6$	60	878	$4{,}00 \cdot 10^4$	243	80	$28{,}0 \cdot 10^6$	36	1098
300	$81{,}0 \cdot 10^6$	90	1680	$9{,}00 \cdot 10^4$	341	110	$63{,}0 \cdot 10^6$	52	1519
400	$2{,}56 \cdot 10^8$	120	2662	$16{,}0 \cdot 10^4$	433	139	$1{,}12 \cdot 10^8$	68	1913
500	$6{,}25 \cdot 10^8$	150	3805	$25{,}0 \cdot 10^4$	521	166	$1{,}75 \cdot 10^8$	83	2286
600	$13{,}0 \cdot 10^8$	180	5100	$36{,}0 \cdot 10^4$	607	192	$2{,}52 \cdot 10^8$	98	2646
700	$24{,}0 \cdot 10^8$	210	6517	$49{,}0 \cdot 10^4$	690	218	$3{,}43 \cdot 10^8$	114	2993
800	$41{,}0 \cdot 10^8$	240	8074	$64{,}0 \cdot 10^4$	770	242	$4{,}48 \cdot 10^8$	128	3330
900	$65{,}6 \cdot 10^8$	270	9743	$81{,}0 \cdot 10^4$	849	266	$5{,}67 \cdot 10^8$	143	3659
1000	$100 \cdot 10^8$	300	11533	$1{,}00 \cdot 10^6$	927	290	$7{,}00 \cdot 10^8$	158	3981

ЛИТЕРАТУРА

1. Мазмишвили А.И. Способ наименьших квадратов. - М.: Недра, 1968.
2. Герасименко М.Д. Проектирование и обработка измерений с применением собственных значений матриц. - Владивосток, 1983.
3. Черкас Л.А. Сравнительный анализ чисел обусловленности для различных по методу развития симметричных геодезических сетей // Полоцкий гос. ун-т. - Новополоцк, 2002. - 4 с. - Деп. в ОНТИ ЦНИИГАиК 8.04.2002, - № 756-ГД.02.
4. Мицкевич В.И., Черкас Л.А. Анализ качества построения плановых геодезических сетей, характеризующихся плохо обусловленной матрицей нормальных уравнений // Землеустройство: прошлое, настоящее и будущее: Материалы науч.-производств. конф., Горки, 7-9 октября 1999 года. - Горки: Белорусская сельскохозяйственная академия, 1999. - С. 242 - 244.