УДК 517.37

ПРИМЕНЕНИЕ ФОРМУЛЫ ТЕЙЛОРА В ПРИБЛИЖЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ ОПРЕДЕЛЕННОГО И ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛОВ

канд. пед. наук **В.С. ВАКУЛЬЧИК, В.А. ЖАК,** *канд. физ.-мат. наук, доц.* **Н.В. ЦЫВИС**
(Полоцкий государственный университет)

Изучены возможности использования формулы Тейлора для приближенного вычисления двойного интеграла. Получены формулы приближенного вычисления определённых интегралов (прямоугольников, трапеций, Симпсона), используя формулу Тейлора и метод неопределённых коэффициентов. Произведена оценка погрешности вычислений по этим формулам.

Если функция $f(x)$ непрерывна и имеет на отрезке $[a;\ b]$ непрерывные производные до n-ного порядка включительно, а в каждой внутренней точке отрезка имеет конечную производную $(n+1)$-го порядка, то при $x \in [a;\ b]$ справедлива следующая формула Тейлора:

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!}+\ldots+f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}+f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}, \qquad (1)$$

где $\xi = a+\theta(x-a)$ и $0<\theta<1$.

Если положить в этой формуле $a = 0$, то получим формулу Маклорена:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+f''(0)\frac{x^2}{2!}+f'''(0)\frac{x^3}{3!}+\ldots+f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}+f^{(n+1)}(\xi)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!},$$

где $\xi = \theta x$, $0<\theta<1$.

Последний член в формуле Тейлора называется остаточным членом формулы Тейлора в форме Лагранжа и обозначается $R_n(x)$:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

соответственно, остаточный член в формуле Маклорена имеет вид:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Формулу (1) можно записать в виде:

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+o\left((x-a)^n\right),$$

где $o\left((x-a)^n\right)$ – бесконечно малая порядка выше n-ного по сравнению с $(x-a)$; эта форма остаточного члена была указана Пеано. В частности, при $a = 0$ имеем

$$f(x)=f(0)+f'(0)(x)+f''(0)\frac{x^2}{2!}+\ldots+f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}+o\left(x^n\right).$$

Получим формулы приближенного вычисления определённых интегралов (прямоугольников, трапеций, Симпсона), используя формулу Тейлора и метод неопределённых коэффициентов. В идейном плане эти результаты можно рассматривать как продолжение работы [1].

1. Формула прямоугольников. Рассмотрим задачу: пусть требуется вычислить $\int\limits_a^b f(x)dx$, где $f(x)$ непрерывна на $[a,\ b]$ и имеет непрерывную производную на промежутке $(a,\ b)$. (Считаем, что первообразная не выражается через элементарные функции, или этот интеграл удобнее вычислить приближенно).

Разобьём отрезок интегрирования на n равных частей: $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$,

где $x_i = x_0 + ih$; $i = 0, 1, \ldots, n$; $h=\dfrac{b-a}{n}$.

Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_o}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx .$$

Рассмотрим $\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx$. Подберём коэффициент A так, чтобы

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = Af(x_0)\cdot h + r_1 . \tag{2}$$

Первое слагаемое в (2) дает приближенное значение определённого интеграла, а второе – погрешность. Для определения коэффициента A поступаем следующим образом: $f(x)$ представляем формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, ограничившись первым порядком малости:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0 + \theta_1 \cdot h)\cdot(x - x_0), \quad 0 < \theta_1 < 1 .$$

Тогда будем иметь:

$$\int_{x_0}^{x_1} [f(x_0) + f'(x_0 + \theta_1 \cdot h)\cdot(x - x_0)]dx = f(x_0)(x - x_o)\Big|_{x_o}^{x_1} + f'(\xi_1)\frac{(x - x_o)^2}{2}\Big|_{x_o}^{x_1} = f(x_o)\cdot h + \frac{f'(\xi_1)\cdot h^2}{2} .$$

Здесь $x_o < \xi_1 < x_1$, $x_1 - x_o = h$, и мы воспользовались обобщенной теоремой о среднем:

$$\int_{x_0}^{x_1} [f'(x_o + \theta_1 h)\cdot(x - x_0)]dx = f'(\xi_1)\int_{x_o}^{x_1}(x - x_o)dx, \quad x_o < \xi_1 < x_1 ,$$

подставляя в (2), получим равенство:

$$f(x_o)\cdot h + \frac{f'(\xi_1)}{2}\cdot h^2 = A\cdot f(x_o)\cdot h + r_1 ,$$

отсюда $A = 1, \ |r_1| \le \frac{f'(\xi_1)}{2}\cdot h^2 .$

Аналогично имеем для произвольного интервала:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = f(x_{i-1})\cdot h + r_1^i ,$$

где $\left|r_1^i\right| \le \frac{|f'(\xi_i)|}{2}\cdot h^2, \quad i = \overline{1, n}, \quad x_{i-1} < \xi_1 < x_1 .$

Отсюда $\int_a^b f(x)dx = h[f(x_o) + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1})] + R_1$,

где $|R_1| \le \frac{h^2}{2}(|f'(\xi_1)| + |f'(\xi_2)| + \ldots + |f'(\xi_n)|)$,

т.е. $|R_1| \le \frac{h^2}{2} n\cdot \max\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)| = \frac{(a-b)^2}{2n} \max\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)| = \frac{h}{2}(b-a)\max\limits_{x\in[a,b]}|f'(x)| .$

Таким образом, мы получили формулу прямоугольников для вычисления определенного интеграла.

2. Формула трапеций. Вернёмся к исходной задаче: необходимо вычислить $\int_a^b f(x)dx$, где $f(x)$ – непрерывна на $[a, b]$, и имеет непрерывные производные до 3-го порядка на промежутке (a, b).

Разобьём отрезок интегрирования на n равных частей:

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b,$$

где $x_i = x_0 + ih$; $i = 0, 1, \ldots, n$; $h = \frac{b-a}{n}$.

Тогда $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_{x_o}^{x_1} f(x)dx + \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx + ... + \int\limits_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$.

Рассмотрим $$\int\limits_{x_o}^{x_1} f(x)dx = h[Af(x_o) + Bf(x_0 + h)] + r_2 . \quad (3)$$

Функции $f(x)$ и $f(x_0 + h)$ представим по формуле Тейлора:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0 + \theta_1 \cdot h)}{2}(x - x_0)^2 ,$$

$$f(x + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0 + \theta_2 \cdot h)}{2}h^2 ,$$

где $0 < \theta_1 < 1,\ 0 < \theta_2 < 1$.

Полученные разложения подставим в (3) и получим

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0 + \theta_1 \cdot h)}{2}(x - x_0)^2]dx =$$

$$= h[Af(x_0) + Bf(x_0) + Bf'(x_0) \cdot h + B\frac{f''(x_0 + \theta_2 h)}{2}h^2] + r_2 ,$$

или

$$f(x_0)h + f'(x_0) \cdot \frac{h^2}{2} + \frac{f''(\xi_1)}{2} \cdot \frac{h^3}{3} = A \cdot f(x_0) \cdot h + B \cdot f(x_0) \cdot h + Bf'(x_0) \cdot h^2 + B \cdot \frac{f''(x_0 + \theta_2 \cdot h)}{2}h^3 + r_2 ,$$

где $x_0 < \xi_1 < x_1,\quad 0 < \theta_2 < 1$.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях h:

$$\left.\begin{aligned} h^1 &: 1 = A + B \\ h^2 &: \frac{1}{2} = B \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{ B = \frac{1}{2},\ A = \frac{1}{2} \right. .$$

Тогда $\int\limits_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{1}{2}h[f(x_0) + f(x_1)] + r_2$,

$$|r_2| = h^3 \left| \frac{f''(\xi_1)}{6} - \frac{f''(x_0 + \theta_2 h)}{4} \right| =$$

$$= \frac{h^3}{12}\left|\left[2\left(f''(\xi_1) - f''(x_0 + \theta_2 h)\right) - f''(x_0 + \theta_2 h)\right]\right| \le \frac{h^3}{12}\left[\left|f''(x_0 + \theta_2 h)\right| + 2\left|f'''(\xi_2)(\xi_1 - x_0 - \theta_2 h)\right|\right].$$

Здесь мы воспользовались теоремой Лагранжа:

$$f''(\xi_1) - f''(x_0 + \theta_2 h) = f'''(\xi_2)(\xi_1 - x_0 - \theta_2 h),\quad \xi_1 < \xi_2 < x_0 + \theta_2 h ,$$

так как $f'''(\xi_2)(\xi_1 - x_0 - \theta_2 h) = o(h)$, то $|r_2| \le \frac{h^3}{12}|f''(c_1)|$,

где $x_0 < c_1 < x_1$.

Аналогично $\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \frac{1}{2}h[f(x_{i-1}) + f(x_i)] + r_2^{\,i}$,

где $\left|r_2^{\,i}\right| \le \frac{h^3}{12}\left|f''(c_i)\right|$.

Поэтому

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}h\left[f(x_0)+2\cdot(f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+\ldots+f(x_{n-1}))+f(x_n)\right]+R_2 =$$
$$= h\left[\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2}+f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+\ldots+f(x_{n-1})\right]+R_2,$$

где $|R_2| \le \frac{h^3}{12}\left|f''(c_1)+f''(c_2)+\ldots+f''(c_n)\right|$, или $|R_2| \le \frac{h^3}{12}\cdot n\cdot \max_{x\in[a,b]}|f''(x)| = \frac{(b-a)^3}{12n^2}\max_{x\in[a,b]}|f''(x)|$.

3. Формула Симпсона. Вернёмся к исходной задаче: необходимо вычислить $\int_a^b f(x)dx$, где $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и имеет непрерывные производные до 5-го порядка на промежутке (a, b).

Как и в предыдущих примерах, разобьём отрезок интегрирования на m равных частей, но предположим, что m – чётное число, $m = 2n$: $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, где $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, 1, \ldots, 2n$, $h = \frac{b-a}{2n}$.

Тогда $\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)dx$.

Заменим дугу линии $y = f(x)$, соответствующую $[x_0, x_2]$, дугой параболы, которая проходит через точки:

$$(x_0, f(x_0));\quad ((x_0+h), f(x_0+h));\quad ((x_0+2h), f(x_0+2h)).$$

Подберём A, B, C так, чтобы $\int_{x_0}^{x_0+2h} f(x)dx = h\left[Af(x_0)+Bf(x_0+h)+Cf(x_0+2h)\right]+r_4$.

Представляя $f(x)$, $f(x_0+h)$, $f(x_0+2h)$ по формуле Тейлора:

$$f(x) = f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\frac{f^{(4)}(x_0+\theta\cdot h)}{4!}(x-x_0)^4;$$

$$f(x_0+h) = f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}h+\frac{f''(x_0)}{2!}h^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}h^3+\frac{f^{(4)}(x_0+\theta_1\cdot h)}{4!}h^4;$$

$$f(x_0+2h) = f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}2h+\frac{f''(x_0)}{2!}(2h)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(2h)^3+\frac{f^{(4)}(x_0+\theta_2\cdot h)}{4!}(2h)^4,$$

где $0 < \theta < 1$, $0 < \theta_1 < 1$, получим

$$\int_{x_0}^{x_0+2h}\left[f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\frac{f^{(4)}(x_0+\theta\cdot h)}{4!}(x-x_0)^4\right]dx =$$
$$= f(x_0)2h+f'(x_0)\frac{(2h)^2}{2}+\frac{f''(x_0)}{2}\frac{(2h)^3}{3}+\frac{f'''(x_0)}{3!}\frac{(2h)^4}{4}+\frac{f^{(4)}(\xi_1)}{4!}\frac{(2h)^5}{5},$$

где $x_0 < \xi_1 < x_0+2h$.

Тогда

$$f(x_0)2h+f'(x_0)\frac{(2h)^2}{2}+\frac{f''(x_0)}{2}\frac{(2h)^3}{3}+\frac{f'''(x_0)}{3!}\frac{(2h)^4}{4}+\frac{f^{(4)}(\xi_1)}{4!}\frac{(2h)^5}{5} =$$
$$= h[Af(x_0)+Bf(x_0)+Bf'(x_0)h+\frac{Bf''(x_0)}{2!}h^2+B\frac{f'''(x_0)}{3!}h^3+B\frac{f^{(4)}(x_0+\theta_1 h)}{4!}h^4+$$
$$+Cf(x_0)+Cf'(x_0)2h+C\frac{f''(x_0)}{2!}(2h)^2+C\frac{f'''(x_0)}{3!}(2h)^3+B\frac{f^{(4)}(x_0+\theta_2 h)}{4!}(2h)^4]+r_4.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях
$$\left.\begin{aligned} 2h: 1 &= \frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2} \\ h:(2h)^2: \frac{1}{2} &= \frac{B}{4}+\frac{C}{2} \\ (2h)^3: \frac{1}{6} &= \frac{B}{16}+\frac{C}{4} \end{aligned}\right\}$$

Откуда $A=\frac{1}{3}, B=\frac{4}{3}, C=\frac{1}{3}$ и, следовательно, $\int\limits_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\right]+r_4$, где

$$|r_4| = \frac{(2h)^5}{4!}\cdot\left|\frac{f^{(4)}(\xi_1)}{5}-\frac{f^{(4)}(x_0+\theta_1 h)}{3\cdot 8}-\frac{f^{(4)}(x_0+\theta_2 h)}{6}\right| =$$

$$= \frac{(2h)^5}{4!}\cdot\frac{1}{120}\left|24f^{(4)}(\xi_1)-5f^{(4)}(x_0+\theta_1 h)-20f^{(4)}(x_0+\theta_2 h)\right| =$$

$$= \frac{(2h)^5}{4!\cdot 120}\cdot\left|24(f^{(4)}(\xi_1)-f^{(4)}(x_0+\theta_2 h))-5(f^{(4)}(x_0+\theta_1 h)-f^{(4)}(x_0+\theta_2 h))-f^{(4)}(x_0+\theta_2 h)\right| \le$$

$$\le \frac{(2h)^5}{4!\cdot 120}\cdot\left(\left|f^{(4)}(x_0+\theta_2 h)\right|+\left|24f^{(4)}(\xi_1)(\xi_1-x_0-\theta_2 h)-5f^{(5)}(\xi_3)(\theta_1-\theta_2)h\right|\right), x_0<\xi_i<x_2, i=1,2,3.$$

Так как $24f^{(4)}(\xi_1)(\xi_1-x_0-\theta_2 h)-5f^{(5)}(\xi_3)(\theta_1-\theta_2)h = o(h)$, то $|r_4| \le \frac{(2h)^5}{4!\cdot 120}\left|f^{(4)}(x_0+\theta_2 h)\right|$.

Для произвольного интервала:

$$\int\limits_{x_{i-2}}^{x_i} f(x)dx = \frac{h}{3}[f(x_{i-2})+4f(x_{i-1})+f(x_{i-2}+2h)]+r^i{}_4,$$

где $\left|r^i{}_4\right| \le \frac{(2h)^5}{90}\left|f^{(4)}(c_i)\right|, \quad x_{i-2}<c_i<x_i$.

Суммируя, получим:

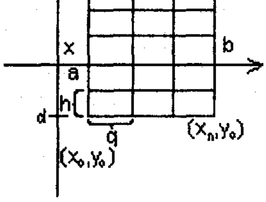
$$\int\limits_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}[f(x_0)+f(x_{2n})+2(f(x_2)+f(x_4)+\ldots+f(x_{2n-2})+4(f(x_1)+f(x_3)+\ldots+f(x_{2n-1}))]+R_4 -$$

формула Симпсона с остаточным членом:

$$|R_4| \le \frac{h^5}{90}\cdot n\cdot \max_{x\in[a,b]}\left|f^{(4)}(x)\right| = \frac{(b-a)^5}{2\cdot 90\cdot 2^4\cdot n^4}\max_{x\in[a,b]}\left|f^{(4)}(x)\right| = \frac{h^4}{180}(b-a)\max_{x\in[a,b]}\left|f^{(4)}(x)\right|.$$

Считаем целесообразным отметить, что в отличие от вывода формул приближённого вычисления определённого интеграла, например, в [2], предлагаемый нами метод менее громоздок и позволяет достаточно быстро и просто получить оценку погрешности.

4. Обобщение для случая двойного интеграла



Рассмотрим задачу: пусть требуется вычислить $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, где $f(x, y)$ непрерывна в области D и имеет непрерывные частные производные внутри области; D – прямоугольная область.

Разобьём прямоугольник на $m{\cdot}n$ прямоугольников шириной q и высотой h:

$$h=\frac{c-d}{m},\ q=\frac{b-a}{n},\ \begin{matrix} x_i = x_0+iq, i=\overline{0,n} \\ y_j = y_0+jh, j=\overline{0,m} \end{matrix}.$$

Тогда

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\Pi_{00}} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{\Pi_{01}} f(x,y)dxdy + \ldots + \iint\limits_{\Pi_{0\,m-1}} f(x,y)dxdy + \ldots$$

$$\ldots + \iint\limits_{\Pi_{10}} f(x,y)dxdy + \ldots + \iint\limits_{\Pi_{1\cdot m-1}} f(x,y)dxdy + \ldots + \iint\limits_{\Pi_{n-1\,m-1}} f(x,y)dxdy.$$

Рассмотрим $\iint\limits_{\Pi_{i,j}} f(x,y)\,dx\,dy$.

Подберём коэффициент A так, чтобы

$$\iint\limits_{\Pi_{i,j}} f(x,y)dxdy = A\cdot f(x_i,y_j)hq + r_i^j\,; \qquad \begin{matrix} x_i = x_0 + iq, i = \overline{0,n-1} \\ y_j = y_0 + jh, j = \overline{0,m-1} \end{matrix}.$$

Для определения коэффициента A поступаем следующим образом: $f(x,y)$ представляем формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, ограничившись первым порядком малости:

$$f(x,y) = f(x_i,y_j) + f_x'(x_i+\theta_i q, y_j+\theta_j h)(x-x_i) + f_y'(x_i+\theta_i q, y_j+\theta_j h)(y-y_j).$$

Будем иметь:

$$\iint\limits_{\Pi_{i,j}} \Big[f(x_i,y_j) + f_x'(x_i+\theta_i q, y_j+\theta_j h)(x-x_i) +$$

$$+ f_y'(x_i+\theta_i q, y_j+\theta_j h)\cdot(y-y_j)dxdy \Big] = f(x_i,y_j)\times$$

$$\times \iint\limits_{\Pi_{i,j}} dxdy + f'_x(\xi_{i,j})\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} dx \int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} (x-x_i)dy + f'_y(c_{i,j})\int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} dx \int\limits_{y_j}^{y_{j+1}} (y-y_j)dy =$$

$$= f(x_i,y_j)\cdot h\cdot q + f'_x(\xi_{i,j})\cdot h\cdot \frac{(x-x_i)^2}{2}\Big|_{x_i}^{x_{i+1}} + f'_y(c_{i,j})\cdot q\cdot \frac{(y-y_j)^2}{2}\Big|_{y_i}^{y_{i+1}} =$$

$$= f(x_i,y_j)\cdot h\cdot q + f'_x(\xi_{i,j})\cdot h\cdot \frac{q^2}{2} + f'_y(c_{i,j})\cdot q\cdot \frac{h^2}{2}.$$

Получим равенство:

$$f(x_i,y_j)\cdot h\cdot q + f'_x(\xi_{i,j})\cdot h\cdot \frac{q^2}{2} + f'_y(c_{i,j})\cdot q\cdot \frac{h^2}{2} = A\cdot f(x_i,y_j)hq + r_i^j.$$

Значит, $A = 1$, $\left|r_i^j\right| = \left|f'_x(\xi_{i,j})\cdot h\cdot \frac{q^2}{2} + f'_y(c_{i,j})\cdot q\cdot \frac{h^2}{2}\right| \le \frac{hq}{2}\left(\left|f_x'(\xi_{i,j})\right|q + \left|f_y'(c_{i,j})\right|h\right)$.

Тогда

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = h\cdot q\left[f(x_0,y_0) + f(x_1,y_0) + .. + f(x_{n-1},y_0) + f(x_0,y_1) + f(x_1,y_1) + \ldots + f(x_{n-1},y_{m-1})\right] + R_2,$$

где

$$R_2 = \frac{hq}{2}\left(\left|f_x'(\xi_{0,0})\right|q + \left|f_y'(c_{0,0})\right|h\right) + \ldots + \left(\left|f_x'(\xi_{1,1})\right|q + \left|f_y'(c_{1,1})\right|h\right) + \ldots +$$

$$+ \left(\left|f_x'(\xi_{n-1,m-1})\right|q + \left|f_y'(c_{n-1,m-1})\right|h\right) \le \frac{hq\cdot mn}{2}\cdot\left(\max_D\left|f_x'(x,y)\right|q + \max_D\left|f_y'(x,y)\right|h\right) =$$

$$= \frac{s}{2}\cdot\left(\max_D\left|f_x'(x,y)\right|q + \max_D\left|f_y'(x,y)\right|h\right).$$

Полученные формулы могут быть использованы при изучении специальных разделов теплопроводности, диффузии, теории колебаний и др.

ЛИТЕРАТУРА

1. Назаров А.М., Сухарев Л.Н. Приближённые методы вычисления определённых интегралов // Сб. науч. ст. по математике. Вып. 11. - М.: Высшая школа, 1983.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 1. - М.: Наука, 1970.