УДК 517.544

О РЕШЕНИИ В КЛАССЕ ГИПЕРФУНКЦИЙ НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЬНЫХ ВАРИАНТОВ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА В ИСКЛЮЧИТЕЛЬНОМ СЛУЧАЕ

Т.М. УРБАНОВИЧ
(Полоцкий государственный университет)

Рассматривается решение в классе гиперфункций краевой задачи Римана в исключительном случае путем сведения к задаче о скачке. Получены явные формулы решения для некоторых модельных ситуаций на основе применения метода формального произведения.

Рассмотрим решение краевой задачи Римана:

$$\Phi^+(x)=\frac{\prod\limits_{j=1}^{m}\left(x-a_j\right)^{\alpha_j}}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(x-b_k\right)^{\beta_k}}G_0(x)\Phi^-(x)+g(x),\quad -\infty<x<+\infty, \tag{1}$$

где $a_1<a_2<...<a_m$, $b_1<b_2<....<b_n$, $a_j\neq b_k$, α_j, $\beta_k\in\mathbb{R}_+$ [1, с. 133] в классе гиперфункций [2].

Задача типа (1) в случае целых показателей рассматривалась многими авторами. Она носит название задачи Римана в исключительном случае. Полное описание решения этой задачи дано, например, в [1].

В случае нецелых показателей применение метода непосредственного аналитического продолжения для коэффициента задачи невозможно. Это приводит к необходимости использования других подходов, одним из которых является метод решения задачи в классе гиперфункций.

Применяемый в данной работе подход обобщает результаты работ [3, 4].

Пусть $X_0(z)$ есть каноническая функция задачи Римана с коэффициентом $G_0(x)$ [1, с. 109].

Заменяя $G_0(x)$ отношением канонических функций $\frac{X_0^+(x)}{X_0^-(x)}$, запишем краевое условие (1) в виде

$$\frac{\Phi^+(x)}{X_0^+(x)\prod\limits_{j=1}^{m}\left(x-a_j\right)^{\alpha_j}}-\frac{\Phi^-(x)}{X_0^-(x)\prod\limits_{k=1}^{n}\left(x-b_k\right)^{\beta_k}}=\frac{g(x)}{X_0^+(x)\prod\limits_{j=1}^{m}\left(x-a_j\right)^{\alpha_j}}. \tag{2}$$

Задачу (2) можно рассматривать как задачу о скачке в классе гиперфункций [3].
Обозначим:

$$\Omega^+(x)=\frac{\Phi^+(x)}{X_0^+(x)\prod\limits_{j=1}^{m}\left(x-a_j\right)^{\alpha_j}};\quad \Omega^-(x)=\frac{\Phi^-(x)}{X_0^-(x)\prod\limits_{k=1}^{n}\left(x-b_k\right)^{\beta_k}}. \tag{3}$$

Тогда краевое условие (2) примет следующий вид:

$$\Omega^+(x)-\Omega^-(x)=\frac{g(x)}{X_0^+(x)\prod\limits_{j=1}^{m}\left(x-a_j\right)^{\alpha_j}}. \tag{4}$$

В настоящей работе при решении задачи о скачке (4) возможно выделить два основных случая:

- случай I - относится к ситуации, когда правая часть (4) представляет собой обыкновенную функцию, соответствующую некоторым модельным гиперфункциям [2, с. 45 -47; 3, с. 41,43];

- случай II - рассматривается задача (4) с правой частью, совпадающей с произведением функций того типа, которые рассмотрены в [3].

Различие между этими ситуациями состоит в том, что метод формального произведения гиперфункций применяется в первом случае только лишь при построении окончательного решения задачи (1). Во втором случае такой метод применяется и для решения задачи (4).

Случай I

а) Рассмотрим задачу:

$$\Phi^+(x)=\frac{\prod_{j=1}^{m}(x-a_j)^{\alpha_j}}{\prod_{k=1}^{n}(x-b_k)^{\beta_k}}\Phi^-(x)+\prod_{j=1}^{m}(x-a_j)^{\alpha_j}\cdot\prod_{i=1}^{p}(x-c_i)^{\gamma_i},\quad -\infty<x<+\infty, \tag{5}$$

где $c_1\le....\le c_p$; $\gamma_i\in\mathbb{R}_+$

В данном случае краевое условие (4) примет вид:

$$\Omega^+(x)-\Omega^-(x)=\prod_{i=1}^{p}(x-c_i)^{\gamma_i}. \tag{6}$$

Решение задачи (6) в классе гиперфункций имеет вид [3, с. 41]:

$$H.F.\left\{\prod_{i=1}^{p}\Omega^+_{c_i}(z),\prod_{i=1}^{p}\Omega^-_{c_i}(z)\right\}=\frac{i^p}{2^p\prod_{i=1}^{p}sin\,\pi\gamma_i}\times$$

$$\times\left\{\left[\prod_{i=1}^{p}\left[(c_i-z)^{\gamma_i}-(-1)^{\gamma_i}(z-c_i)^{\gamma_i}\right]\right]_+,\ \left[\prod_{i=1}^{p}\left[(c_i-z)^{\gamma_i}-(-1)^{\gamma_i}(z-c_i)^{\gamma_i}\right]\right]_-\right\}.$$

Так как

$$\Omega^+(x)=\frac{\Phi^+(x)}{\prod_{j=1}^{m}(x-a_j)^{\alpha_j}},\qquad \Omega^-(x)=\frac{\Phi^-(x)}{\prod_{k=1}^{n}(x-b_k)^{\beta_k}},$$

то решение задачи (5) в классе гиперфункций имеет вид:

$$H.F.\{\Phi^+(z),\Phi^-(z)\}=\left\{\frac{i^{m+p}}{2^{m+p}\prod_{j=1}^{m}sin\,\pi\alpha_j\prod_{i=1}^{p}sin\,\pi\gamma_i}\times\right.$$

$$\times\left[\prod_{j=1}^{m}\left[(a_j-z)^{\alpha_j}-(-1)^{\alpha_j}(z-a_j)^{\alpha_j}\right]\right]_+\cdot\left[\prod_{i=1}^{p}\left[(c_i-z)^{\gamma_i}-(-1)^{\gamma_i}(z-c_i)^{\gamma_i}\right]\right]_+,$$

$$\frac{i^{n+p}}{2^{n+p}\prod_{k=1}^{n}sin\,\pi\beta_k\prod_{i=1}^{p}sin\,\pi\gamma_i}\cdot\left[\prod_{k=1}^{n}\left[(b_k-z)^{\beta_k}-(-1)^{\beta_k}(z-b_k)^{\beta_k}\right]\right]_-\times$$

$$\left.\times\left[\prod_{i=1}^{p}\left[(c_i-z)^{\gamma_i}-(-1)^{\gamma_i}(z-c_i)^{\gamma_i}\right]\right]_-\right\}.$$

б) Рассмотрим задачу:

$$\Phi^+(x)=\frac{\prod_{j=1}^{m}(x-a_j)^{\alpha_j}}{\prod_{k=1}^{n}(x-b_k)^{\beta_k}}\Phi^-(x)+\prod_{j=1}^{m}(x-a_j)^{\alpha_j}\prod_{l=1}^{q}ln|x-d_l|,\quad -\infty<x<+\infty, \tag{7}$$

где $d_1\le...\le d_q$.

В данном случае краевое условие (4) примет вид:

$$\Omega^+(x)-\Omega^-(x)=\prod_{l=1}^{q}ln|x-d_l|. \tag{8}$$

Решение задачи (8) в классе гиперфункций имеет вид [3, с. 43]:

$$H.F.\left\{\prod_{l=1}^{q}\Omega_{d_l}^{+}(z),\prod_{l=1}^{q}\Omega_{d_l}^{-}(z)\right\}=\frac{1}{i^q\cdot 2^{2q}\cdot\pi^q}\times$$

$$\times\left\{\left[\prod_{l=1}^{q}\left[ln^2(z-d_l)-ln^2(d_l-z)\right]\right]_+,\left[\prod_{l=1}^{q}\left[ln^2(z-d_l)-ln^2(d_l-z)\right]\right]_-\right\}.$$

Таким образом, решение задачи (7) в классе гиперфункций имеет вид:

$$H.F.\{\Phi^+(z),\Phi^-(z)\}=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{i^{m-q}}{2^{m+2q}\cdot\pi^q\cdot\prod\limits_{j=1}^{m}sin\,\pi\alpha_j}\times\end{array}\right.$$

$$\times\left[\prod_{j=1}^{m}\left[(a_j-z)^{\alpha_j}-(-1)^{\alpha_j}(z-a_j)^{\alpha_j}\right]\right]_+\cdot\left[\prod_{l=1}^{q}\left[ln^2(z-d_l)-ln^2(d_l-z)\right]\right]_+,$$

$$\frac{i^{n-q}}{2^{n+2q}\cdot\pi^q\prod\limits_{k=1}^{n}sin\,\pi\beta_k}\cdot\left[\prod_{k=1}^{n}\left[(b_k-z)^{\beta_k}-(-1)^{\beta_k}(z-b_k)^{\beta_k}\right]\right]_-\cdot\left[\prod_{l=1}^{q}\left[ln^2(z-d_l)-ln^2(d_l-z)\right]\right]_-.$$

Случай II

а) Рассмотрим задачу:

$$\Phi^+(x)=\frac{\prod\limits_{j=1}^{m}(x-a_j)^{\alpha_j}}{\prod\limits_{k=1}^{n}(x-b_k)^{\beta_k}}\Phi^-(x)+\prod_{i=1}^{p}(x-c_i)^{\gamma_i},\quad -\infty<x<+\infty. \tag{9}$$

В данном случае краевое условие (4) примет вид:

$$\Omega^+(x)-\Omega^-(x)=\frac{\prod\limits_{i=1}^{p}(x-c_i)^{\gamma_i}}{\prod\limits_{j=1}^{m}(x-a_j)^{\alpha_j}}. \tag{10}$$

Решение задачи (10) в классе гиперфункций имеет вид [3, с. 41]:

$$H.F.\left\{\prod_{j=1}^{m}\Omega_{a_j}^{+}(z)\cdot\prod_{i=1}^{p}\Omega_{c_i}^{+}(z),\prod_{j=1}^{m}\Omega_{a_j}^{-}(z)\cdot\prod_{i=1}^{p}\Omega_{c_i}^{-}(z)\right\}=\frac{i^p(-i)^m}{2^{m+p}\prod\limits_{j=1}^{m}sin\,\pi\alpha_j\prod\limits_{i=1}^{p}sin\,\pi\gamma_i}\times$$

$$\times\left\{\left[\prod_{j=1}^{m}\left[(a_j-z)^{-\alpha_j}-(-1)^{-\alpha_j}(z-a_j)^{-\alpha_j}\right]\right]_+\cdot\left[\prod_{i=1}^{p}\left[(c_i-z)^{\gamma_i}-(-1)^{\gamma_i}(z-c_i)^{\gamma_i}\right]\right]_+,\right.$$

$$\left.\left[\prod_{j=1}^{m}\left[(a_j-z)^{-\alpha_j}-(-1)^{-\alpha_j}(z-a_j)^{-\alpha_j}\right]\right]_-\cdot\left[\prod_{i=1}^{p}\left[(c_i-z)^{\gamma_i}-(-1)^{\gamma_i}(z-c_i)^{\gamma_i}\right]\right]_-\right\}.$$

Таким образом, решение задачи (9) в классе гиперфункций имеет вид:

$$H.F.\{\Phi^+(z),\Phi^-(z)\}=\left\{\frac{i^p}{2^{2m+p}\left(\prod\limits_{j=1}^{m}sin\,\pi\alpha_j\right)^2\prod\limits_{i=1}^{p}sin\,\pi\gamma_i}\times\left[\prod_{j=1}^{m}\left[(a_j-z)^{\alpha_j}-(-1)^{\alpha_j}(z-a_j)^{\alpha_j}\right]\right]_+\times\right.$$

$$\times\left[\prod_{j=1}^{m}\left[(a_j-z)^{-\alpha_j}-(-1)^{-\alpha_j}(z-a_j)^{-\alpha_j}\right]\right]_+\cdot\left[\prod_{i=1}^{p}\left[(c_i-z)^{\gamma_i}-(-1)^{\gamma_i}(z-c_i)^{\gamma_i}\right]\right]_+,$$

$$\frac{i^n i^p (-i)^m}{2^{m+n+p}\prod_{j=1}^{m} sin\,\pi\alpha_j \prod_{k=1}^{n} sin\,\pi\beta_k \prod_{i=1}^{p} sin\,\pi\gamma_i} \times \left[\prod_{k=1}^{n}\left[(b_k - z)^{\beta_k} - (-1)^{\beta_k}(z-b_k)^{\beta_k}\right]\right]_- \times$$

$$\times\left[\prod_{j=1}^{m}\left[(a_j - z)^{-\alpha_j} - (-1)^{-\alpha_j}(z-a_j)^{-\alpha_j}\right]\right]_- \cdot \left[\prod_{i=1}^{p}\left[(c_i - z)^{\gamma_i} - (-1)^{\gamma_i}(z-c_i)^{\gamma_i}\right]\right]_- \Bigg\}.$$

б) Рассмотрим задачу:

$$\Phi^+(x) = \frac{\prod_{j=1}^{m}(x-a_j)^{\alpha_j}}{\prod_{k=1}^{n}(x-b_k)^{\beta_k}}\Phi^-(x) + \prod_{l=1}^{q} ln|x-d_l|, \quad -\infty < x < +\infty. \tag{11}$$

В данном случае краевое условие (4) примет вид:

$$\Omega^+(x) - \Omega^-(x) = \frac{\prod_{l=1}^{q} ln|x-d_l|}{\prod_{j=1}^{m}(x-a_j)^{\alpha_j}}. \tag{12}$$

Решение задачи (12) в классе гиперфункций имеет вид (см. [3, с. 43 – 44]):

$$H.F.\left\{\prod_{j=1}^{m}\Omega^+_{a_j}(z)\cdot\prod_{l=1}^{q}\Omega^+_{d_l}(z), \prod_{j=1}^{m}\Omega^-_{a_j}(z)\cdot\prod_{l=1}^{q}\Omega^-_{d_l}(z)\right\} = \frac{(-i)^m}{i^q\cdot 2^{m+2q}\cdot\pi^q\cdot\prod_{j=1}^{m} sin\,\pi\alpha_j}\times$$

$$\times\left\{\left[\prod_{j=1}^{m}\left[(a_j - z)^{-\alpha_j} - (-1)^{-\alpha_j}(z-a_j)^{-\alpha_j}\right]\right]_+ \cdot \left[\prod_{l=1}^{q}\left[ln^2(z-d_l) - ln^2(d_l - z)\right]\right]_+,\right.$$

$$\left.\left[\prod_{j=1}^{m}\left[(a_j - z)^{-\alpha_j} - (-1)^{-\alpha_j}(z-a_j)^{-\alpha_j}\right]\right]_- \cdot \left[\prod_{l=1}^{q}\left[ln^2(z-d_l) - ln^2(d_l - z)\right]\right]_-\right\}.$$

Таким образом, решение задачи (11) в классе гиперфункций имеет вид:

$$H.F.\{\Phi^+(z), \Phi^-(z)\} = \left\{\frac{1}{i^q\cdot 2^{2m+2q}\cdot\pi^q\cdot\left(\prod_{j=1}^{m} sin\,\pi\alpha_j\right)^2}\cdot\left[\prod_{j=1}^{m}\left[(a_j - z)^{\alpha_j} - (-1)^{\alpha_j}(z-a_j)^{\alpha_j}\right]\right]_+ \times\right.$$

$$\times\left[\prod_{j=1}^{m}\left[(a_j - z)^{-\alpha_j} - (-1)^{-\alpha_j}(z-a_j)^{-\alpha_j}\right]\right]_+ \cdot \left[\prod_{l=1}^{q}\left[ln^2(z-d_l) - ln^2(d_l - z)\right]\right]_+,$$

$$\frac{i^{n-q}(-i)^m}{2^{m+n+2q}\cdot\pi^q\cdot\prod_{j=1}^{m} sin\,\pi\alpha_j\cdot\prod_{k=1}^{n} sin\,\pi\beta_k}\cdot\left[\prod_{k=1}^{n}\left[(b_k - z)^{\beta_k} - (-1)^{\beta_k}(z-b_k)^{\beta_k}\right]\right]_- \times$$

$$\left.\times\left[\prod_{j=1}^{m}\left[(a_j - z)^{-\alpha_j} - (-1)^{-\alpha_j}(z-a_j)^{-\alpha_j}\right]\right]_- \cdot \left[\prod_{l=1}^{q}\left[ln^2(z-d_l) - ln^2(d_l - z)\right]\right]_-\right\}.$$

в) Рассмотрим задачу:

$$\Phi^+(x) = \frac{\prod_{j=1}^{m}(x-a_j)^{\alpha_j}}{\prod_{k=1}^{n}(x-b_k)^{\beta_k}}\Phi^-(x) + \frac{\prod_{j=1}^{m}(x-a_j)^{\alpha_j}\cdot\prod_{l=1}^{q} ln|x-d_l|}{\prod_{i=1}^{p}(x-c_i)^{\gamma_i}}, \quad -\infty < x < +\infty. \tag{13}$$

В данном случае краевое условие (4) примет вид:

$$\Omega^+(x)-\Omega^-(x)=\frac{\prod_{l=1}^{q} ln|x-d_l|}{\prod_{i=1}^{p}(x-c_i)^{\gamma_i}}. \tag{14}$$

Решение задачи (14) в классе гиперфункций имеет вид [3, с. 43 – 44]:

$$H.F.\left\{\prod_{i=1}^{p}\Omega_{c_i}^+(z)\cdot\prod_{l=1}^{q}\Omega_{d_l}^+(z),\prod_{i=1}^{p}\Omega_{c_i}^-(z)\cdot\prod_{l=1}^{q}\Omega_{d_l}^-(z)\right\}=\frac{(-i)^p}{i^q\cdot 2^{p+2q}\cdot\pi^q\cdot\prod_{i=1}^{p}sin\,\pi\gamma_i}\times$$

$$\times\left\{\left[\prod_{i=1}^{p}\left[(c_i-z)^{-\gamma_i}-(-1)^{-\gamma_i}(z-c_i)^{-\gamma_i}\right]\right]_+\cdot\left[\prod_{l=1}^{q}\left[ln^2(z-d_l)-ln^2(d_l-z)\right]\right]_+,\right.$$

$$\left.\left[\prod_{i=1}^{p}\left[(c_i-z)^{-\gamma_i}-(-1)^{-\gamma_i}(z-c_i)^{-\gamma_i}\right]\right]_-\cdot\left[\prod_{l=1}^{q}\left[ln^2(z-d_l)-ln^2(d_l-z)\right]\right]_-\right\}.$$

Таким образом, решение задачи (13) в классе гиперфункций имеет вид:

$$H.F.\{\Phi^+(z),\Phi^-(z)\}=\left\{\frac{i^{m-q}(-i)^p}{2^{m+p+2q}\cdot\pi^q\cdot\prod_{j=1}^{m}sin\,\pi\alpha_j\cdot\prod_{i=1}^{p}sin\,\pi\gamma_i}\times\right.$$

$$\times\left[\prod_{j=1}^{m}\left[(a_j-z)^{\alpha_j}-(-1)^{\alpha_j}(z-a_j)^{\alpha_j}\right]\right]_+\times$$

$$\times\left[\prod_{i=1}^{p}\left[(c_i-z)^{-\gamma_i}-(-1)^{-\gamma_i}(z-c_i)^{-\gamma_i}\right]\right]_+\cdot\left[\prod_{l=1}^{q}\left[ln^2(z-d_l)-ln^2(d_l-z)\right]\right]_+,$$

$$\frac{i^{n-q}(-i)^p}{2^{n+p+2q}\cdot\pi^q\cdot\prod_{k=1}^{n}sin\,\pi\beta_k\prod_{i=1}^{p}sin\,\pi\gamma_i}\cdot\left[\prod_{k=1}^{n}\left[(b_k-z)^{\beta_k}-(-1)^{\beta_k}(z-b_k)^{\beta_k}\right]\right]_-\times$$

$$\left.\times\left[\prod_{i=1}^{p}\left[(c_i-z)^{-\gamma_i}-(-1)^{-\gamma_i}(z-c_i)^{-\gamma_i}\right]\right]_-\cdot\left[\prod_{l=1}^{q}\left[ln^2(z-d_l)-ln^2(d_l-z)\right]\right]_-\right\}.$$

г) Рассмотрим задачу:

$$\Phi^+(x)=\frac{\prod_{j=1}^{m}(x-a_j)^{\alpha_j}}{\prod_{k=1}^{n}(x-b_k)^{\beta_k}}\Phi^-(x)+\prod_{j=1}^{m}(x-a_j)^{\alpha_j}\prod_{i=1}^{p}(x-c_i)^{\gamma_i}\prod_{l=1}^{q}ln|x-d_l|,\quad -\infty<x<+\infty. \tag{15}$$

В данном случае краевое условие (4) примет вид:

$$\Omega^+(x)-\Omega^-(x)=\prod_{i=1}^{p}(x-c_i)^{\gamma_i}\prod_{l=1}^{q}ln|x-d_l|. \tag{16}$$

Решение задачи (16) в классе гиперфункций имеет вид [3, с. 41 – 43]:

$$H.F.\left\{\prod_{i=1}^{p}\Omega_{c_i}^+(z)\cdot\prod_{l=1}^{q}\Omega_{d_l}^+(z),\prod_{i=1}^{p}\Omega_{c_i}^-(z)\cdot\prod_{l=1}^{q}\Omega_{d_l}^-(z)\right\}=\frac{i^{p-q}}{2^{p+2q}\cdot\pi^q\prod_{i=1}^{p}sin\,\pi\gamma_i}\times$$

$$\times\left\{\left[\prod_{i=1}^{p}\left[(c_i-z)^{\gamma_i}-(-1)^{\gamma_i}(z-c_i)^{\gamma_i}\right]\right]_+\cdot\left[\prod_{l=1}^{q}\left[ln^2(z-d_l)-ln^2(d_l-z)\right]\right]_+,\right.$$

$$\left.\left[\prod_{i=1}^{p}\left[(c_i-z)^{\gamma_i}-(-1)^{\gamma_i}(z-c_i)^{\gamma_i}\right]\right]_-\cdot\left[\prod_{l=1}^{q}\left[ln^2(z-d_l)-ln^2(d_l-z)\right]\right]_-\right\}.$$

Таким образом, решение задачи (15) в классе гиперфункций имеет вид:

$$H.F.\left\{\Phi^+(z),\Phi^-(z)\right\}=\left\{\frac{i^{m+p-q}}{2^{m+p+2q}\cdot\pi^q\cdot\prod_{j=1}^{m}\sin\pi\alpha_j\prod_{i=1}^{p}\sin\pi\gamma_i}\times\left[\prod_{j=1}^{m}\left[(a_j-z)^{\alpha_j}-(-1)^{\alpha_j}(z-a_j)^{\alpha_j}\right]\right]_+\times\right.$$

$$\times\left[\prod_{i=1}^{p}\left[(c_i-z)^{\gamma_i}-(-1)^{\gamma_i}(z-c_i)^{\gamma_i}\right]\right]_+\cdot\left[\prod_{l=1}^{q}\left[\ln^2(z-d_l)-\ln^2(d_l-z)\right]\right]_+,$$

$$\frac{i^{n+p-q}}{2^{n+p+2q}\cdot\pi^q\prod_{k=1}^{n}\sin\pi\beta_k\prod_{i=1}^{p}\sin\pi\gamma_i}\times\left[\prod_{k=1}^{n}\left[(b_k-z)^{\beta_k}-(-1)^{\beta_k}(z-b_k)^{\beta_k}\right]\right]_-\times$$

$$\left.\times\left[\prod_{i=1}^{p}\left[(c_i-z)^{\gamma_i}-(-1)^{\gamma_i}(z-c_i)^{\gamma_i}\right]\right]_-\cdot\left[\prod_{l=1}^{q}\left[\ln^2(z-d_l)-\ln^2(d_l-z)\right]\right]_-\right\}.$$

д) Рассмотрим задачу:

$$\Phi^+(x)=\frac{\prod_{j=1}^{m}(x-a_j)^{\alpha_j}}{\prod_{k=1}^{n}(x-b_k)^{\beta_k}}\Phi^-(x)+\frac{\prod_{l=1}^{q}\ln|x-d_l|}{\prod_{i=1}^{p}(x-c_i)^{\gamma_i}},\quad -\infty<x<+\infty. \tag{17}$$

В данном случае краевое условие (4) примет вид:

$$\Omega^+(x)-\Omega^-(x)=\frac{\prod_{l=1}^{q}\ln|x-d_l|}{\prod_{j=1}^{m}(x-a_j)^{\alpha_j}\prod_{i=1}^{p}(x-c_i)^{\gamma_i}}. \tag{18}$$

Решение задачи (18) представляет собой формальное произведение гиперфункций

$$\ln|x-d_l|=\frac{1}{4\pi i}H.F.\left\{\ln^2(z-d_l)-\ln^2(d_l-z)\right\},\qquad l=\overline{1,q},$$

$$(x-a_j)^{-\alpha_j}=H.F.\left\{-\frac{i}{2\sin\pi\alpha_j}\left[(a_j-z)^{-\alpha_j}-(-1)^{-\alpha_j}(z-a_j)^{-\alpha_j}\right]\right\},\quad j=\overline{1,m}$$

и

$$(x-c_i)^{-\gamma_i}=H.F.\left\{-\frac{i}{2\sin\pi\gamma_i}\left[(c_i-z)^{-\gamma_i}-(-1)^{-\gamma_i}(z-c_i)^{-\gamma_i}\right]\right\},\quad i=\overline{1,p},$$

которые представляют собой однозначные ветви многозначных функций.

Решение задачи (18) в классе гиперфункций имеет вид:

$$H.F.\left\{\prod_{j=1}^{m}\Omega^+_{a_j}(z)\prod_{i=1}^{p}\Omega^+_{c_i}(z)\cdot\prod_{l=1}^{q}\Omega^+_{d_l}(z),\prod_{j=1}^{m}\Omega^-_{a_j}(z)\prod_{i=1}^{p}\Omega^-_{c_i}(z)\cdot\prod_{l=1}^{q}\Omega^-_{d_l}(z)\right\}=\frac{(-i)^{m+p}}{i^q\cdot 2^{m+p+2q}\cdot\pi^q\prod_{j=1}^{m}\sin\pi\alpha_j\prod_{i=1}^{p}\sin\pi\gamma_i}\times$$

$$\times\left\{\left[\prod_{j=1}^{m}\left[(a_j-z)^{-\alpha_j}-(-1)^{-\alpha_j}(z-a_j)^{-\alpha_j}\right]\right]_+\cdot\left[\prod_{i=1}^{p}\left[(c_i-z)^{-\gamma_i}-(-1)^{-\gamma_i}(z-c_i)^{-\gamma_i}\right]\right]_+\times\right.$$

$$\times\left[\prod_{l=1}^{q}\left[\ln^2(z-d_l)-\ln^2(d_l-z)\right]\right]_+,\left[\prod_{j=1}^{m}\left[(a_j-z)^{-\alpha_j}-(-1)^{-\alpha_j}(z-a_j)^{-\alpha_j}\right]\right]_-\times$$

$$\left.\times\left[\prod_{i=1}^{p}\left[(c_i-z)^{-\gamma_i}-(-1)^{-\gamma_i}(z-c_i)^{-\gamma_i}\right]\right]_-\cdot\left[\prod_{l=1}^{q}\left[\ln^2(z-d_l)-\ln^2(d_l-z)\right]\right]_-\right\}.$$

Таким образом, решение задачи (17) в классе гиперфункций имеет вид:

$$H.F.\left\{\Phi^{+}(z),\Phi^{-}(z)\right\}=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{(-i)^{p}}{i^{q}\cdot 2^{2m+p+2q}\cdot\pi^{q}\cdot\left(\prod\limits_{j=1}^{m}\sin\pi\alpha_{j}\right)^{2}\cdot\prod\limits_{i=1}^{p}\sin\pi\gamma_{i}}\times \\ \times\left[\prod\limits_{j=1}^{m}\left[(a_{j}-z)^{\alpha_{j}}-(-1)^{\alpha_{j}}(z-a_{j})^{\alpha_{j}}\right]\right]_{+}\cdot\left[\prod\limits_{j=1}^{m}\left[(a_{j}-z)^{-\alpha_{j}}-(-1)^{-\alpha_{j}}(z-a_{j})^{-\alpha_{j}}\right]\right]_{+}\times \\ \times\left[\prod\limits_{i=1}^{p}\left[(c_{i}-z)^{-\gamma_{i}}-(-1)^{-\gamma_{i}}(z-c_{i})^{-\gamma_{i}}\right]\right]_{+}\cdot\left[\prod\limits_{l=1}^{q}\left[\ln^{2}(z-d_{l})-\ln^{2}(d_{l}-z)\right]\right]_{+}, \\ \dfrac{(-i)^{m+p}\,i^{n-q}}{2^{m+n+p+2q}\cdot\pi^{q}\cdot\prod\limits_{j=1}^{m}\sin\pi\alpha_{j}\cdot\prod\limits_{k=1}^{n}\sin\pi\beta_{k}\cdot\prod\limits_{i=1}^{p}\sin\pi\gamma_{i}}\times \\ \times\left[\prod\limits_{k=1}^{n}\left[(b_{k}-z)^{\beta_{k}}-(-1)^{\beta_{k}}(z-b_{k})^{\beta_{k}}\right]\right]_{-}\cdot\left[\prod\limits_{j=1}^{m}\left[(a_{j}-z)^{-\alpha_{j}}-(-1)^{-\alpha_{j}}(z-a_{j})^{-\alpha_{j}}\right]\right]_{-}\times \\ \times\left[\prod\limits_{i=1}^{p}\left[(c_{i}-z)^{-\gamma_{i}}-(-1)^{-\gamma_{i}}(z-c_{i})^{-\gamma_{i}}\right]\right]_{-}\cdot\left[\prod\limits_{l=1}^{q}\left[\ln^{2}(z-d_{l})-\ln^{2}(d_{l}-z)\right]\right]_{-}\end{array}\right\}.$$

В настоящей работе рассмотрены лишь некоторые модельные случаи задачи (1). Однако данный подход может быть применён и в других ситуациях. Более того, на основе рассмотренных выше случаев могут быть построены явные формулы решения для задач с более сложными коэффициентами и правыми частями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. - М., 1977.
2. Imai I. Applied hyperfimction theory. - Dordrecht, 1981.
3. Урбанович Т.М. О решении в классе гиперфункций задачи о скачке // Вестник Полоцкого государственного университета. Сер. С. Фундаментальные науки. - 2005. - № 4. - С. 38 - 44.
4. Урбанович Т.М. О решении в классе гиперфункций краевой задачи Римана в исключительном случае // Дифференциальные уравнения и системы компьютерной алгебры: Материалы междунар. конф., Брест, 5-8 октября 2005 г. - Брест, 2005. Ч 1. - С. 343 - 346.