УДК 512.548

РАЗЛОЖЕНИЯ ОБЁРТЫВАЮЩЕЙ ГРУППЫ ПОСТА

А.М. ГАЛЬМАК
(Могилёвский государственный университет продовольствия)

Устанавливается связь между разложением n-арной группы < A, [] > по ее n-арной подгруппе < B, []> и разложением универсальной обертывающей группы Поста A по её подгруппе, изоморфной универсальной обертывающей группе Поста B*.*

Для всякой n-арной группы $< A, [\,] >$ Пост определил [1] на свободной полугруппе F_A отношение эквивалентности θ_A по правилу: $(\alpha, \beta) \in \theta_A$ тогда и только тогда, когда существуют последовательности γ и δ такие, что $[\gamma\alpha\delta] = [\gamma\beta\delta]$. Для n-арной группы $< A, [\,] >$ Пост определил также универсальную обертывающую группу $A^* = F_A/\theta_A$, выделил в ней нормальную подгруппу

$$A_o = \{\theta_A(a_1 \ldots a_{n-1}) \mid a_1, \ldots, a_{n-1} \in A\},$$

которая называется соответствующей для $< A, [\,] >$, и показал, что

$$A^*/A_o = \{\theta_A(a)A_o,\ \theta_A^2(a)A_o, \ldots,\ \theta_A^{n-1}(a)A_o = A_o\}$$

для любого $a \in A$, причем A^*/A_o – циклическая группа порядка $n-1$, а образующий смежный класс этой факторгруппы является n-арной группой, изоморфной n-арной группе $< A, [\,] >$.

Для всякого подмножества B n-арной группы $< A, [\,] >$ полагают [2]:

$$B_o(A) = \{\theta_A(\alpha) \in A_o \mid \exists\, b_1, \ldots, b_{n-1} \in B,\ \alpha\theta_A b_1 \ldots b_{n-1}\};$$

$$B^*(A) = \{\theta_A(\alpha) \in A^* \mid \exists\, b_1, \ldots, b_i \in B (i \geq 1),\ \alpha\theta_A b_1 \ldots b_i\}.$$

Ясно, что $B^*(A) \subseteq A^*$, $B_o(A) \subseteq A_o$, в частности $A^*(A) = A^*$, $A_o(A) = A_o$. Если $< B, [\,] >$ – n-арная подгруппа n-арной группы $< A, [\,] >$, то $B^*(A)$ – подгруппа группы A^*, изоморфная группе B^*, а $B_o(A)$ – подгруппа группы A_o, изоморфная группе B_o [2].

Теорема 1. Пусть $< B, [\,] >$ – n-арная подгруппа n-арной группы $< A, [\,] >$. Тогда

1) если

$$A = \bigcup_{i \in I} [x_i \underbrace{B \ldots B}_{n-1}] \qquad (1.1)$$

– разложение $< A, [\,] >$ на непересекающиеся левые смежные классы по $< B, [\,] >$, то

$$A^* = \bigcup_{i \in I} \theta_A(x_i)B^*(A) \qquad (1.2)$$

– разложение A^* на непересекающиеся левые смежные классы по $B^*(A)$, а отображение

$$[x_i \underbrace{B \ldots B}_{n-1}] \to \theta_A(x_i)B^*(A) \qquad (1.3)$$

является биекцией множества всех левых смежных классов $< A, [\,] >$ по $< B, [\,] >$ на множество всех левых смежных классов A^* по $B^*(A)$;

2) если (1.2) – разложение A^* на непересекающиеся левые смежные классы по $B^*(A)$, то (1.1) – разложение $< A, [\,] >$ на непересекающиеся левые смежные классы по $< B, [\,] >$, а отображение

$$\theta_A(x_i)B^*(A) \to [x_i \underbrace{B \ldots B}_{n-1}] \qquad (1.4)$$

является биекцией множества всех левых смежных классов A^* по $B^*(A)$ на множество всех левых смежных классов $< A, [\,] >$ по $< B, [\,] >$.

Доказательство

1. Пусть $\theta_A(a_1 \ldots a_k)$ – произвольный элемент из A^*, $k = 1, \ldots, n-1$. Если зафиксировать $b_1, \ldots, b_{k-1} \in B$, то найдется $y \in A$ такой, что

$$\theta_A(a_1 \ldots a_k) = \theta_A(yb_1 \ldots b_{k-1}). \qquad (1.5)$$

Если $b_k, \ldots, b_{n-1} \in B$, то

$$[yb_1 \ldots b_{k-1}b_k \ldots b_{n-1}] \in [x_i \underbrace{B \ldots B}_{n-1}]$$

для некоторого $i \in I$, откуда

$$[yb_1 \ldots b_{k-1}b_k \ldots b_{n-1}] = [x_ib_1 \ldots b_{k-1}b_k \ldots b_{n-2}b]$$

для некоторого $b \in B$, тогда

$$\theta_A(yb_1 \ldots b_{k-1}b_k \ldots b_{n-1}) = \theta_A(x_ib_1 \ldots b_{n-2}b),$$

$$\theta_A(yb_1 \ldots b_{k-1})\theta_A(b_k \ldots b_{n-1}) = \theta_A(x_i)\theta_A(b_1 \ldots b_{n-2}b),$$

$$\theta_A(yb_1 \ldots b_{k-1}) = \theta_A(x_i)\, \theta_A\, (b_1 \ldots b_{n-2}b)\, \theta_A^{-1}\, (b_k \ldots b_{n-1}),$$

$$\theta_A(yb_1 \ldots b_{k-1}) \in \theta_A(x_i)B^*(A),$$

откуда и из (1.5) следует $\theta_A(a_1 \ldots a_k) \in \theta_A(x_i)B^*(A)$. Следовательно,

$$A^* \subseteq \bigcup_{i \in I} \theta_A(x_i)B^*(A).$$

Обратное включение $\bigcup\limits_{i \in I} \theta_A(x_i)B^*(A) \subseteq A^*$очевидно.

Таким образом, доказано равенство (1.2).

Предположим, что

$$\theta_A(x_i)B^*(A) \cap \theta_A(x_j)B^*(A) \neq \varnothing,\ i \neq j,$$

т.е.

$$\theta_A(x_i)\theta_A(c_1 \ldots c_k) = \theta_A(x_j)\theta_A(d_1 \ldots d_m)$$

для $c_1, \ldots, c_k, d_1, \ldots, d_m \in B$, где $k, m \in \{1, \ldots, n-1\}$. Ясно, что $k = m$.

Если $k = n-1$, то из последнего равенства следует

$$[x_ic_1 \ldots c_{n-1}] = [x_jd_1 \ldots d_{n-1}].$$

Последнее равенство противоречит тому, что (1.1) – разложение $< A, [\,] >$ на непересекающиеся левые смежные классы по $< B, [\,] >$.

Если $k < n-1$, то

$$\theta_A(x_i)\theta_A(c_1 \ldots c_k)\theta_A(c_{k+1} \ldots c_{n-1}) = \theta_A(x_j)\theta_A(d_1 \ldots d_k)\theta_A(c_{k+1} \ldots c_{n-1})$$

для любых $c_{k+1}, \ldots, c_{n-1} \in B$, откуда

$$[x_ic_1 \ldots c_{n-1}] = [x_jd_1 \ldots d_kc_{k+1} \ldots c_{n-1}].$$

Последнее равенство противоречит тому, что (1.1) – разложение $< A, [\,] >$ на непересекающиеся левые смежные классы по $< B, [\,] >$. Следовательно, равенство (1.2) является разложением A^* на непересекающиеся левые смежные классы по $B^*(A)$.

Из доказанного следует, что (1.3) – биекция.

2. Пусть a – произвольный элемент из A. В силу условия $\theta_A(a) \in \theta_A(x_i)B^*(A)$ для некоторого $i \in I$, откуда $a = [x_ib_1 \ldots b_{n-1}]$ для некоторых $b_1, \ldots, b_{n-1} \in B$, т.е. в действительности $\theta_A(a) \in \theta_A(x_i)B_o(A)$. Следовательно,

$$A \subseteq \bigcup_{i \in I} [x_i \underbrace{B \ldots B}_{n-1}].$$

Обратное включение очевидно:

$$\bigcup_{i \in I} [x_i \underbrace{B \ldots B}_{n-1}] \subseteq A.$$

Таким образом, доказано равенство (1.1).

Если

$$[x_i \underbrace{B \ldots B}_{n-1}] \cap [x_j \underbrace{B \ldots B}_{n-1}] \neq \varnothing,\ i \neq j,$$

то

$$\theta_A(x_i)B_o(A) \cap \theta_A(x_j)B_o(A) \neq \varnothing,$$

откуда, учитывая

$$\theta_A(x_i)B_o(A) \subseteq \theta_A(x_i)B^*(A),\ \theta_A(x_j)B_o(A) \subseteq \theta_A(x_j)B^*(A),$$

получаем

$$\theta_A(x_i)B^*(A)\cap\theta_A(x_j)B^*(A) \neq \varnothing,$$

что противоречит тому, что (1.2) – разложение A^* на непересекающиеся левые смежные классы по $B^*(A)$.

Ясно, что (1.4) – биекция. Теорема доказана.

Аналогично теореме 1 доказывается «правая» теорема.

Теорема 2. Пусть $< B, [\ ] >$ – n-арная подгруппа n-арной группы $< A, [\ ] >$. Тогда:

1) если

$$A = \bigcup_{i\in I} [\underbrace{B \dots B}_{n-1} x_i] \tag{2.1}$$

– разложение $< A, [\ ] >$ на непересекающиеся правые смежные классы по $< B, [\ ] >$, то

$$A^* = \bigcup_{i\in I} B^*(A)\theta_A(x_i) \tag{2.2}$$

– разложение A^* на непересекающиеся правые смежные классы по $B^*(A)$, а отображение

$$[\underbrace{B \dots B}_{n-1} x_i] \to B^*(A)\theta_A(x_i) \tag{2.3}$$

является биекцией множества всех правых смежных классов $< A, [\ ] >$ по $< B, [\ ] >$ на множество всех правых смежных классов A^* по $B^*(A)$;

2) если (2.2) – разложение A^* на непересекающиеся правые смежные классы по $B^*(A)$, то (2.1) – разложение $< A, [\ ] >$ на непересекающиеся правые смежные классы по $< B, [\ ] >$, а отображение

$$B^*(A)\theta_A(x_i) \to [\underbrace{B \dots B}_{n-1} x_i] \tag{2.4}$$

является биекцией множества всех правых смежных классов A^* по $B^*(A)$ на множество всех правых смежных классов $< A, [\ ] >$ по $< B, [\ ] >$.

Замечание. Ясно, что отображения (1.3) и (1.4) являются взаимно обратными. То же самое можно сказать об отображениях (2.3) и (2.4).

Из теоремы 1 или 2 вытекает

Следствие 1. Индекс n-арной подгруппы $< B, [\ ] >$ в n-арной группе $< A, [\ ] >$ совпадает с индексом подгруппы $B^*(A)$ в группе A^*: $|A : B| = |A^* : B^*(A)|$.

Если $< B, [\ ] >$ – инвариантная n-арная подгруппа n-арной группы $< A, [\ ] >$, то по предложению 5.3.14 [2] подгруппа $B^*(A)$ инвариантна в группе A^*, а по предложению 5.3.15 [2] в A^*, а значит и в A_o, инвариантна подгруппа $B_o(A)$.

Таким образом, в случае инвариантности $< B, [\ ] >$ в $< A, [\ ] >$ можно рассматривать факторгруппы $A^*/B^*(A)$ и $A_o/B_o(A)$.

Теорема 3. Если $< B, [\ ] >$ – инвариантная n-арная подгруппа n-арной группы $< A, [\ ] >$, то факторгруппы $A^*/B^*(A)$ и $A_o/B_o(A)$ изоморфны.

Эта теорема анонсирована в [3], при этом явный вид изоморфизма факторгрупп $A^*/B^*(A)$ и $A_o/B_o(A)$ не указан. Для нахождения явного вида изоморфизма из теоремы 3 нам понадобится несколько вспомогательных результатов.

Лемма 1. Пусть $< B, [\ ] >$ – n-арная подгруппа n-арной группы $< A, [\ ] >$, $b_1, \dots, b_{n-2}$ – фиксированные элементы из B, $x, y \in A$. Тогда следующие равенства равносильны:

1) $[x \underbrace{B \dots B}_{n-1}] = [y \underbrace{B \dots B}_{n-1}]$;

2) $\theta_A(x)B^*(A) = \theta_A(y)B^*(A)$;

3) $\theta_A(xb_1 \dots b_{n-2})B_o(A) = \theta_A(yb_1 \dots b_{n-2})B_o(A)$.

Доказательство

1) $\Rightarrow$ 2)

Так как $x = [x\bar{b}\underbrace{b \dots b}_{n-2}] \in [x \underbrace{B \dots B}_{n-1}]$ для любого $b \in B$, то из 1) следует $x = [yc_1 \dots c_{n-1}]$ для некоторых $c_1, \dots, c_{n-1} \in B$.

Тогда

$$\theta_A(x)B^*(A) = \theta([yc_1 \dots c_{n-1}])B^*(A) = \theta_A(y)\theta_A(c_1 \dots c_{n-1})B^*(A) = \theta_A(y)B^*(A).$$

2) $\Rightarrow$ 3)

Так как $\theta_A(x) \in \theta_A(x)B^*(A)$, то из 2) следует $\theta_A(x) = \theta_A(y)\theta_A(d_1 \ldots d_i)$ для некоторых $d_1, \ldots, d_i \in B$. А так как $x, y \in A$, то в последнем равенстве можно считать $i = n - 1$, т.е.

$$x = [yd_1 \ldots d_{n-1}].$$

В B всегда найдется элемент d такой, что $d_1 \ldots d_{n-1}\theta_A b_1 \ldots b_{n-2}d$, откуда

$$x = [yd_1 \ldots d_{n-1}] = [yb_1 \ldots b_{n-2}d].$$

Тогда

$$\theta_A(xb_1 \ldots b_{n-2})B_o(A) = \theta_A([yb_1 \ldots b_{n-2}d]b_1 \ldots b_{n-2})B_o(A) =$$

$$= \theta_A(yb_1 \ldots b_{n-2})\theta_A(db_1 \ldots b_{n-2})B_o(A) = \theta_A(yb_1 \ldots b_{n-2})B_o(A).$$

3) $\Rightarrow$ 1)

Так как $\theta_A(xb_1 \ldots b_{n-2}) \in \theta_A(xb_1 \ldots b_{n-2})B_o(A)$, то из 3) следует $\theta_A(xb_1 \ldots b_{n-2}) = \theta_A(yb_1 \ldots b_{n-2})\theta_A(g_1 \ldots g_{n-1})$ для некоторых $g_1, \ldots, g_{n-1} \in B$, откуда

$$\theta_A(x) = \theta_A(yb_1 \ldots b_{n-2})\theta_A(g_1 \ldots g_{n-1})\,\theta_A^{-1}(b_1 \ldots b_{n-2}),$$

$$x = [yb_1 \ldots b_{n-2}g_1 \ldots g_{n-1}b],$$

где b – обратный элемент для последовательности $b_1 \ldots b_{n-2}$. Ясно, что $b \in B$. Тогда

$$[x\underbrace{B \ldots B}_{n-1}] = [[yb_1 \ldots b_{n-2}g_1 \ldots g_{n-1}b]\underbrace{B \ldots B}_{n-1}] = [y\underbrace{B \ldots B}_{n-1}].$$

Лемма доказана.

Аналогично лемме 1 доказывается «правая» лемма.

Лемма 2. Пусть $< B, [\,] >$ – n-арная подгруппа n-арной группы $< A, [\,] >$, $b_1, \ldots, b_{n-2}$ – фиксированные элементы из B, $x, y \in A$. Тогда следующие равенства равносильны:

1) $[\underbrace{B \ldots B}_{n-1}x] = [\underbrace{B \ldots B}_{n-1}y]$;

2) $B^*(A)\theta_A(x) = B^*(A)\theta_A(y)$;

3) $B_o(A)\theta_A(b_1 \ldots b_{n-2}x) = B_o(A)\theta_A(b_1 \ldots b_{n-2}y)$.

Следующие две леммы доказываются аналогично теоремам 1 и 2.

Лемма 3. Пусть $< B, [\,] >$ – n-арная подгруппа n-арной группы $< A, [\,] >$, $b_1, \ldots, b_{n-2}$ – фиксированные элементы из B. Тогда:

1) если (1.1) – разложение $< A, [\,] >$ на непересекающиеся левые смежные классы по $< B, [\,] >$, то

$$A_o = \bigcup_{i \in I} \theta_A(x_ib_1 \ldots b_{n-2})B_o(A)$$

– разложение A_o на непересекающиеся левые смежные классы по $B_o(A)$, а отображение

$$[x_i\underbrace{B \ldots B}_{n-1}] \to \theta_A(x_ib_1 \ldots b_{n-2})B_o(A)$$

является биекцией множества всех левых смежных классов $< A, [\,] >$ по $< B, [\,] >$ на множество всех левых смежных классов A_o по $B_o(A)$.

Лемма 4. Пусть $< B, [\,] >$ – n-арная подгруппа n-арной группы $< A, [\,] >$, $b_1, \ldots, b_{n-2}$ – фиксированные элементы из B. Тогда:

1) если (2.1) – разложение $< A, [\,] >$ на непересекающиеся правые смежные классы по $< B, [\,] >$, то

$$A_o = \bigcup_{i \in I} B_o(A)\theta_A(b_1 \ldots b_{n-2}x_i)$$

– разложение A_o на непересекающиеся правые смежные классы по $B_o(A)$, а отображение

$$[\underbrace{B \ldots B}_{n-1}x_i] \to B_o(A)\theta_A(b_1 \ldots b_{n-2}x_i)$$

является биекцией множества всех правых смежных классов $< A, [\,] >$ по $< B, [\,] >$ на множество всех правых смежных классов A_o по $B_o(A)$.

Теорема 4. Пусть $< B, [\,] >$ – инвариантная n-арная подгруппа n-арной группы $< A, [\,] >$, $b_1, \ldots, b_{n-2} \in B$,

$$A/B = \{[x_i \underbrace{B \ldots B}_{n-1}] \mid i \in I\}.$$

Тогда отображение

$$\varphi : \theta_A(x_i)B^*(A) \to \theta_A(x_i b_1 \ldots b_{n-2})B_o(A)$$

является изоморфизмом группы $A^*/B^*(A)$ на группу $A_o/B_o(A)$.

Доказательство

По теореме 1

$$A^*/B^* = \{\theta_A(x_i)B^*(A) \mid i \in I\},$$

и

$$\varphi_1 : \theta_A(x_i)B^*(A) \to [x_i \underbrace{B \ldots B}_{n-1}]$$

– биекция A^*/B^* на A/B, а по лемме 3

$$A_o/B_o = \{\theta_A(x_i b_1 \ldots b_{n-2})B_o(A) \mid i \in I\}$$

и

$$\varphi_2 : [x_i \underbrace{B \ldots B}_{n-1}] \to \theta_A(x_i b_1 \ldots b_{n-2})B_o(A)$$

– биекция A/B на A_o/B_o.

Так как $\varphi = \varphi_1\varphi_2$, то φ – биекция. Кроме того, если $\theta_A(x_i)B^*(A)$, $\theta_A(x_j)B^*(A)$ – произвольные элементы из $A^*/B^*(A)$, то, учитывая инвариантность $B^*(A)$ в A^*, а также то, что $b_1, \ldots, b_{n-2} \in B$, получим

$$\varphi(\theta_A(x_i)B^*(A)\theta_A(x_j)B^*(A)) = \varphi(\theta_A(x_i)\theta_A(x_j)B^*(A)B^*(A)) = \varphi(\theta_A(x_i)\theta_A(x_j)B^*(A)) =$$

$$= \varphi(\theta_A(x_i)\theta_A(x_j)\theta_A(b_1 \ldots b_{n-2})B^*(A)) = \varphi(\theta_A([x_i x_j b_1 \ldots b_{n-2}])B^*(A)),$$

т.е.

$$\varphi(\theta_A(x_i)B^*(A)\theta_A(x_j)B^*(A)) = \varphi(\theta_A([x_i x_j b_1 \ldots b_{n-2}])B^*(A)).$$

Так как

$$\theta_A([x_i x_j b_1 \ldots b_{n-2}])B^*(A)) = \theta_A(x_k)B^*(A)$$

для некоторого $k \in I$, то, используя лемму 1, инвариантность $< B, [\,] >$ в $< A, [\,] >$ и инвариантность $B_o(A)$ в A_o, получим

$$\varphi(\theta_A(x_i)B^*(A)\theta_A(x_j)B^*(A)) = \varphi(\theta_A(x_k)B^*(A)) = \theta_A(x_k b_1 \ldots b_{n-2})B_o(A) = \theta_A([x_i x_j b_1 \ldots b_{n-2}]b_1 \ldots b_{n-2})B_o(A) =$$

$$= \theta_A(x_i b'_1 \ldots b'_{n-2} x_j b_1 \ldots b_{n-2})B_o(A) = \theta_A(x_i b'_1 \ldots b'_{n-2})\theta_A(x_j b_1 \ldots b_{n-2})B_o(A)B_o(A) =$$

$$= \theta_A(x_i b'_1 \ldots b'_{n-2})B_o(A)\theta_A(x_j b_1 \ldots b_{n-2})B_o(A) = \theta_A(x_i)\theta_A(b_1 \ldots b_{n-2})\theta_A(b\, b'_1 \ldots b'_{n-2})B_o(A)\theta_A(x_j b_1 \ldots b_{n-2})B_o(A) =$$

$$\theta_A(x_i b_1 \ldots b_{n-2})B_o(A)\theta_A(x_j b_1 \ldots b_{n-2})B_o(A) = \varphi(\theta_A(x_i)B^*(A))\varphi(\theta_A(x_j)B^*(A)),$$

где $b'_1, \ldots, b'_{n-2} \in B$, b – обратный элемент для последовательности $b_1 \ldots b_{n-2}$. Следовательно, φ – изоморфизм группы $A^*/B^*(A)$ на группу $A_o/B_o(A)$. Теорема доказана.

Следующая теорема получается с использованием теоремы 2, леммы 2 и леммы 4.

Теорема 5. Пусть $< B, [\,] >$ – инвариантная n-арная подгруппа n-арной группы $<$ A, $[\,] >$, $b_1, \ldots, b_{n-2} \in B$,

$$A/B = \{[x_i \underbrace{B \ldots B}_{n-1}] \mid i \in I\}.$$

Тогда отображение

$$\psi : B^*(A)\theta_A(x_i) \to B_o(A)\theta_A(b_1 \ldots b_{n-2}x_i)$$

является изоморфизмом группы $A^*/B^*(A)$ на группу $A_o/B_o(A)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Post E.L. Polyadic groups // Trans. Amer. Math. Soc. - 1940. - Vol. 48, № 2. - P. 208 - 350.
2. Гальмак А.М. n-Арные группы. - Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2003. - 196 с.
3. Гальмак А.М. Об одном изоморфизме в n-арных группах // Классы групп и алгебр: Междунар. алгебраическая конф.: Тез. докл. - Гомель, 2005. - С. 56 - 57.