МАТЕМАТИКА

УДК 512. 542.6

О СВОЙСТВАХ ФОРМАЦИОННЫХ КОРАДИКАЛОВ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

канд. физ.-мат. наук, доц. В. И. ГОЙКО
(Белорусский государственный университет, Минск)

Исследованы основные свойства корадикала конечных групп. В конечных разрешимых группах такая задача решалась Бечтелом.

Для непустой формации конечных групп $\mathfrak{F}$ класс $\mathfrak{X}$ всех таких конечных групп H, у которых $\mathfrak{F}$-корадикал не содержит фраттиниевых H-главных факторов, есть формация [1].

Целью данной работы является установление свойств $\mathfrak{X}$-корадикала конечных групп с применением $\mathfrak{F}$-профраттиниевых подгрупп.

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Через $\mathfrak{F}$ в дальнейшем обозначаем некоторую локальную формацию, $\mathfrak{S}$ – класс всех конечных разрешимых групп, $\mathfrak{N}$ – класс всех конечных нильпотентных групп. Все необходимые определения, обозначения и утверждения, которые здесь используются можно найти в работах [2 – 5].

Теорема 1. Пусть $\mathfrak{X}$ – формация, определенная в предыдущем абзаце, $G \in \mathfrak{S}\mathfrak{F}$. Тогда $G \in \mathfrak{X}$ в том и только в том случае, когда любая нормальная подгруппа группы G, входящая в $G^{\mathfrak{F}}$, дополняема в G.

Доказательство. Допустим, что $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $G^{\mathfrak{F}} = <1>$ и утверждение выполняется. Пусть G не принадлежит $\mathfrak{F}$. Положим $G \in \mathfrak{X}$ и рассмотрим произвольный G-главный ряд, проходящий через $G^{\mathfrak{F}}$:

$$1 = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \ldots \subseteq K_n = G^{\mathfrak{F}} \subseteq \ldots \subseteq G.$$

Если $n = 0$, то $G^{\mathfrak{F}} = 1$ и $G \in \mathfrak{F}$. Противоречие. Значит, $n \geq 1$.

Пусть i – любое из промежутка $1 \leq i \leq n$. Поскольку K_i/K_{i-1} не входит в $\Phi(G/K_{i-1})$, то (так как $G^{\mathfrak{F}}$ – разрешимая группа) существует максимальная подгруппа M_i/K_{i-1} в группе G/K_{i-1}, которая дополняет подгруппу K_i/K_{i-1} в группе G/K_{i-1}, $i = 1, \ldots, n$. Отсюда следует, что $G = K_i M_i$ и $K_i \cap M_i = K_{i-1}$. Применяем тождество Дедекинда:

$$K_i(M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_i) = K_i K_1(M_1 \cap \ldots \cap M_i) = K_i(M_2 \cap \ldots \cap M_i \cap K_1 M_1) =$$

$$= K_i(M_2 \cap \ldots \cap M_i \cap G) = K_i(M_2 \cap \ldots \cap M_i) = K_i M_i = G, K_i \cap (M_1 \cap \ldots \cap M_i) =$$

$$= (K_i \cap M_i) \cap M_1 \cap \ldots \cap M_{i-1} = K_{i-1} \cap M_1 \cap \quad \cap M_{i-1} =$$

$$= (K_{i-1} M_{i-1}) \cap M_1 \cap \ldots \cap M_{i-2} = K_{i-2} \cap M_1 \cap \ldots \cap M_{i-2} = \ldots = K_1 \cap M_1 = 1, \ i = 1, \ldots, n.$$

Теперь видно, что K_i дополняема в группе G, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Обратно, пусть K_i – дополняема в G для любого i = 1, ..., n. Пусть R_i – максимальная подгруппа в G, дополняющая K_i в G. Отсюда получаем, что подгруппа (K_i/K_{i-1}) дополняется максимальной подгруппой (R_iK_{i-1}/K_{i-1}) группы G/K_{i-1}. Значит, K_i/K_{i-1} не входит в $\Phi(G/K_{i-1})$. Теорема доказана.

Из данной теоремы получаем соответствующие результаты работ [2 – 3].

Теорема 2. Справедливо утверждение: $\mathfrak{F}$-профраттиниевы подгруппы любой группы G из $\mathfrak{S}\mathfrak{F}$ имеют единичное пересечение с $\mathfrak{X}$-корадикалом этой группы тогда и только тогда, когда $G \in \mathfrak{X}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть T есть $\mathfrak{F}$-профраттиниева подгруппа группы G и $T \cap G^{\mathfrak{X}} = 1$. Допустим, что $G \in \mathfrak{F}$.

В силу того, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$, получим: $G \in \mathfrak{X}$. Полагаем теперь, что $G \notin \mathfrak{F}$. Допустим, что $G \notin \mathfrak{X}$. Пусть G – контрпример минимального порядка, для которого теорема не выполняется и пусть N – минимальная нормальная подгруппа в G, $N \subseteq G^{\mathfrak{X}}$. Рассмотрим соотношение:

$$(TN/N) \cap (G/N)^{\mathfrak{X}} = (TN/N) \cap (G^{\mathfrak{X}}/N) = (TN \cap G^{\mathfrak{X}})/N = N/N.$$

В силу теоремы 2 из [5] TN/N – $\mathfrak{F}$-профраттиниева подгруппа в G/N, а в силу леммы 1.2 из [4] $(G/N)^{\mathfrak{X}} = G^{\mathfrak{X}}N/N$ есть $\mathfrak{F}$-корадикал в группе G/N.

В силу индуктивных соображений имеем:

$$G/N \in \mathfrak{X}. \qquad (2.1)$$

Допустим, что, либо N – фраттиниевый, либо нефраттиниевый $\mathfrak{F}$-центральный G-главный фактор. Тогда $N \subseteq T$ по теореме 1 из [5]. Пришли к противоречию с тем, что $T \cap G^{\mathfrak{X}} = 1$. Пусть теперь N является нефраттиниевым $\mathfrak{F}$-эксцентральным главным фактором. Если N не входит в $G^{\mathfrak{X}}$, то из $G^{\mathfrak{X}}N/N \cong N$ следует, что N – $\mathfrak{F}$-центральный главный фактор. Противоречие. Значит, $N \subseteq G^{\mathfrak{X}}$. Отсюда следует, что N – абелева группа. В силу теоремы 1 из [5] имеем, что

$$N \cap T = 1. \qquad (2.2)$$

Далее, в силу (2.1) и определения формации $\mathfrak{X}$ заключаем, что любой главный фактор группы G/N, входящий в $\mathfrak{F}$-корадикал $(G/N)^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}}/N$, является нефраттиниевым и, кроме того, $\mathfrak{F}$-эксцентральным (в силу [5]).

Значит, TN/N изолирует любой (G/N)-главный фактор из $G^{\mathfrak{F}}/N$. Возьмем G-главный фактор H/K из $G^{\mathfrak{F}}$. Тогда $(H/N)/(K/N)$ есть (G/N)-главный фактор и он изолируется подгруппой TN/N, т.е. $(TN/N) \cap (H/N) \subseteq K/N$. Отсюда $TN \cap H \subseteq K$. Применяя тождество Дедекинда, получим, что $T \cap H \subseteq K$. Учитывая теперь соотношение (2.2), получим, что $T \cap G^{\mathfrak{F}} = 1$. Следовательно, $G^{\mathfrak{F}}$ не содержит фраттиниевых G-главных факторов. Значит, $G \in \mathfrak{X}$.

Достаточность. Пусть $G \in \mathfrak{X}$. Тогда $G^{\mathfrak{X}} = 1$ и $T \cap G^{\mathfrak{X}} = 1$. Теорема доказана.

Теорема 3. Подгруппа $G^{\mathfrak{X}}$ группы $G \in \mathfrak{S}\mathfrak{F}$ является нормальным замыканием подгруппы $T \cap G^{\mathfrak{F}}$ в группе G, где T – любая $\mathfrak{F}$-профраттиниева подгруппа группы G.

Доказательство. Покажем сначала, что $T \cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq G^{\mathfrak{X}}$. Предположим, что $G \in \mathfrak{F}$. Тогда $T \cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq G^{\mathfrak{X}}$. Полагаем теперь, что $G \notin \mathfrak{F}$. Допустим, что $G \in \mathfrak{X}$. Тогда T изолирует G-главные факторы от 1 до $G^{\mathfrak{F}}$ и, следовательно, $T \cap G^{\mathfrak{F}} = 1$, требуемое включение очевидно.

Пусть теперь $G \notin \mathfrak{X}$. Возьмем минимальную нормальную подгруппу N в G такую, что $N \subseteq G^{\mathfrak{X}}$. Далее, так как $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$, то $G^{\mathfrak{F}} \supseteq G^{\mathfrak{X}}$. Значит, $N \subseteq G^{\mathfrak{F}}$. Если допустить, что $G/N \in \mathfrak{F}$, то $G^{\mathfrak{F}} = N$. Значит, $N \not\subset \Phi(G)$ и по определению формации $\mathfrak{X}$ получим, что $G \in \mathfrak{X}$. Противоречие. Значит, G/N не принадлежит $\mathfrak{F}$. Предположим, что $G/N \in \mathfrak{X}$. Тогда $G^{\mathfrak{F}}/N = (G/N)^{\mathfrak{F}}$ не содержит фраттиниевых (G/N)-главных факторов. Отсюда получаем, что в G между N и $G^{\mathfrak{F}}$ нет фраттиниевых G-главных факторов, т.е. все они нефраттиниевы $\mathfrak{F}$-эксцентральные. Группа T изолирует все эти факторы. Тогда $T \cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq N$. Так как $N \subseteq G^{\mathfrak{X}}$, то требуемое включение выполняется. Теперь полагаем, что G/N не принадлежит $\mathfrak{X}$. Тогда в силу индуктивных соображений имеем, что $(TN/N) \cap (G/N)^{\mathfrak{F}} \subseteq (G/N)^{\mathfrak{X}}$. Отсюда получим, что $TN \cap G^{\mathfrak{F}}N \subseteq G^{\mathfrak{X}}N$, $TN \cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq G^{\mathfrak{X}}$, $N(T \cap G^{\mathfrak{F}}) \subseteq G^{\mathfrak{X}}$, $T \cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq G^{\mathfrak{X}}$.

Предположим теперь, что существует нормальная подгруппа A в G такая, что $T \cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq A \subset G^{\mathfrak{X}}$. Тогда $(TA/A) \cap (G/A)^{\mathfrak{F}} = (TA/A) \cap (G^{\mathfrak{F}}A/A) = (TA/A) \cap (G^{\mathfrak{F}}A/A) = (TA/A) \cap (G^{\mathfrak{F}}/A) = (TA \cap G^{\mathfrak{F}})/A =$ $= A(T \cap G^{\mathfrak{F}})/A = A/A$. Таким образом, TN/N изолирует все (G/A)-главные факторы из $(G/N)^{\mathfrak{F}}$. Значит, все они нефраттиниевы $\mathfrak{F}$-эксцентральные. Следовательно, $G/A \in \mathfrak{X}$ и $G^{\mathfrak{X}} \subseteq A$, а это противоречит с $A \subset G^{\mathfrak{X}}$. Следовательно, $G^{\mathfrak{X}}$ есть нормальное замыкание подгруппы $T \cap G^{\mathfrak{F}}$ в группе G. Теорема доказана.

Теорема 4. Пусть $G \notin \mathfrak{F}$, $G \notin \mathfrak{X}$, $G \in \mathfrak{S}\mathfrak{F}$. Тогда верно $\Phi(G) \subseteq G^{\mathfrak{X}}$.

Доказательство. Возьмем минимальную нормальную подгруппу N в G такую, что $N \subseteq G^{\mathfrak{X}}$. Так как $G^{\mathfrak{X}} \subseteq G^{\mathfrak{F}}$, то N – абелева. В силу $(G/N)^{\mathfrak{F}} \cong G^{\mathfrak{F}}/G^{\mathfrak{F}} \cap N$ получим, что $G/N \in \mathfrak{S}\mathfrak{F}$. Если допустить, что $G/N \in \mathfrak{F}$, то $G/N \in \mathfrak{X}$. Отсюда: $N = G^{\mathfrak{X}} = G^{\mathfrak{F}}$ и, значит, $G^{\mathfrak{F}}$ не содержит фраттиниевых G-главных факторов. Следовательно, $G \in \mathfrak{X}$. Последнее противоречит условию теоремы. Полагаем поэтому, что $G/N \notin \mathfrak{F}$.

Рассмотрим следующие возможные случаи.

1. $G/N \notin \mathfrak{X}$. По индукции: $\Phi(G/N) \subseteq (G/N)^{\mathfrak{X}}$, $\Phi(G)N/N \subseteq G^{\mathfrak{X}}N/N = G^{\mathfrak{X}}/N$. Отсюда и получаем, что $\Phi(G) \subseteq G^{\mathfrak{X}}$.

2. $G/N \in \mathfrak{X}$. Отсюда получим, что $N = G^{\mathfrak{X}}$ и $(G/N)^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}}/N$ не содержит фраттиниевых G/N-главных факторов. Значит, между N и $G^{\mathfrak{F}}$ в группе G нет фраттиниевых G-главных факторов. Если $N \not\subseteq \Phi(G)$, то $G \in \mathfrak{X}$. Противоречие. Пусть $N \subseteq \Phi(G)$. Допустим, что $N \subset \Phi(G)$.

Тогда существует такой G-главный фактор $\Phi(G)/H$, что $N \subseteq H$, и в силу вышедоказанного получим, что $\Phi(G)/H$ есть нефраттиниев. С другой стороны, $\Phi(G)/H = \Phi(G)H/H \subseteq \Phi(G/H)$. Противоречие. Полагаем теперь, что $N = \Phi(G)$. Но так как $N = G^{\mathfrak{X}}$, то верно, что $\Phi(G) \subseteq G^{\mathfrak{X}}$. Теорема доказана.

Теорема 5. Пусть $G \in \mathfrak{S}\mathfrak{F}$. Справедливо утверждение:

$$G^{\mathfrak{X}} = (G^{\mathfrak{X}})^{\mathfrak{N}}(T \cap G^{\mathfrak{F}}).$$

Доказательство. Если $G \in \mathfrak{F}$, то в силу $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$ имеем, что $G \in \mathfrak{X}$. Тогда $G^{\mathfrak{X}} = 1$, $G^{\mathfrak{F}} = 1$, $(G^{\mathfrak{X}})^{\mathfrak{N}} = 1$ и утверждение очевидно. Пусть $G \notin \mathfrak{F}$. Если при этом $G \in \mathfrak{X}$, то в силу определения формации $\mathfrak{X}$ получим, что $T \cap G^{\mathfrak{F}} = 1$ и утверждение выполняется. Полагаем, что G не принадлежит $\mathfrak{X}$. Значит, $G^{\mathfrak{X}} \neq 1$. Допустим, что $\Phi(G) \neq 1$. В силу теоремы 4 имеем, что $\Phi(G) \subseteq G^{\mathfrak{X}}$. В силу индуктивных соображений имеем:

$$(G/\Phi(G))^{\mathfrak{X}} = ((G/\Phi(G))^{\mathfrak{X}})^{\mathfrak{N}}(T\Phi(G)/\Phi(G) \cap (G/\Phi(G))^{\mathfrak{F}}).$$

Отсюда: $G^{\mathfrak{X}}/\Phi(G) = (G^{\mathfrak{X}}/\Phi(G))^{\mathfrak{N}}((T/\Phi(G)) \cap (G^{\mathfrak{F}}/\Phi(G))) = ((G^{\mathfrak{X}})^{\mathfrak{N}}\Phi(G)/\Phi(G))((T/\Phi(G)) \cap (G^{\mathfrak{F}}/\Phi(G)))$.

Следовательно, $G^{\mathfrak{X}} = (G^{\mathfrak{X}})^{\mathfrak{N}}\Phi(G(T \cap G^{\mathfrak{F}}) = (G^{\mathfrak{X}})^{\mathfrak{N}}(T \cap G^{\mathfrak{F}})$.

Полагаем теперь, что $\Phi(G) = 1$.

Рассмотрим следующие возможные случаи.

1. $(G^{\mathfrak{X}})^{\mathfrak{N}} \neq 1$. Поскольку $(G^{\mathfrak{X}})^{\mathfrak{N}}$ – характеристическая в $G^{\mathfrak{X}}$, а $G^{\mathfrak{X}}$ – нормальная в G, то $(G^{\mathfrak{X}})^{\mathfrak{N}}$ – нормальная в G. Возьмем подгруппу K нормальную в G и $K \subseteq (G^{\mathfrak{X}})^{\mathfrak{N}}$. В силу индуктивных соображений имеем: $(G/K)^{\mathfrak{X}} = ((G/K)^{\mathfrak{X}})^{\mathfrak{N}}((TK/K) \cap (G/K)^{\mathfrak{F}})$. Очевидно, что $K \subseteq G^{\mathfrak{X}} \subseteq G^{\mathfrak{F}}$. Следовательно, имеем равенство:

$$G^{\mathfrak{X}} = (G^{\mathfrak{X}})^{\mathfrak{N}}(TK \cap G^{\mathfrak{F}}). \tag{5.1}$$

Применяем тождество Дедекинда:

$$TK \cap G^{\mathfrak{F}} = K(T \cap G^{\mathfrak{F}}).$$

Из (5.1) теперь получаем требуемое равенство.

2. $(G^{\mathfrak{X}})^{\mathfrak{N}} = 1$. Отсюда следует, что $G^{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{N}$. Поскольку $\Phi(G) = 1$, то $F(G) = N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_n$, где N_i – минимальная нормальная подгруппа группы G, $i = 1, 2, \ldots, n$. Если $N_i \not\subset G^{\mathfrak{F}}$, то $N_i \cap G^{\mathfrak{F}} = 1$ и $T \cap G^{\mathfrak{F}} \cap N_i = 1$. Если $N_i \subseteq G^{\mathfrak{F}}$, то в силу того, что все N_i нефраттиниевы $\mathfrak{F}$-эксцентральные и в силу теоремы 1 из [5] получим, что $N_i \cap T = 1$ и $T \cap G^{\mathfrak{F}} \cap N_i = 1$. Теперь ясно, что $T \cap G^{\mathfrak{F}} \cap F(G) = 1$. Поскольку $G^{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{N}$, то $G^{\mathfrak{X}} \subseteq F(G)$ и $T \cap G^{\mathfrak{F}} \cap G^{\mathfrak{X}} = 1$.

Учитывая $G^{\mathfrak{X}} \subseteq G^{\mathfrak{F}}$, теперь получаем, что $T \cap G^{\mathfrak{X}} = 1$.

По теореме 1 получаем, что $G \in \mathfrak{X}$. Противоречие.

Теорема доказана.

Теорема 6. Пусть $G \notin \mathfrak{F}$, $G \notin \mathfrak{X}$, $G \in \mathfrak{S}\mathfrak{F}$. Тогда справедливо: $G^{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{N}$ тогда и только тогда, когда $\Phi(G) = G^{\mathfrak{X}}$.

Доказательство. Пусть $G^{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{N}$. Из условия теоремы имеем, что $G^{\mathfrak{X}} \neq 1$. Предположим, что $\Phi(G) \neq 1$. Возьмем нормальную подгруппу N в G такую, что $N \subseteq \Phi(G)$. По теореме 4 имеем, что $\Phi(G) \subseteq G^{\mathfrak{X}}$.

По индукции $\Phi(G/N) = (G/N)^{\mathfrak{X}} = G^{\mathfrak{X}}N/N = G^{\mathfrak{X}}/N$. Далее, в силу включения $N \subseteq \Phi(G)$ получим, что $\Phi(G/N) = \Phi(G)/N$. Следовательно, $\Phi(G) = G^{\mathfrak{X}}$. Полагаем теперь, что $\Phi(G) = 1$. Тогда $F(G) = N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_n$, где все N_i являются минимальными нормальными подгруппами в G и, кроме того, нефраттиниевыми. Если $N_i \subseteq G^{\mathfrak{F}}$, то N_i является $\mathfrak{F}$-эксцентральным главным фактором в G и, следовательно, $T \cap N_i = 1$. Отсюда получаем, что $T \cap G^{\mathfrak{F}} \cap N_i = 1$. Если же N_i не входит в $G^{\mathfrak{F}}$, то $N_i \cap G^{\mathfrak{F}} = 1$. В этом случае опять получаем, что $T \cap G^{\mathfrak{F}} \cap N_i = 1$. Следовательно, $T \cap G^{\mathfrak{F}} \cap F(G) = 1$. Далее, из $G^{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{N}$ следует, что $G^{\mathfrak{X}} \subseteq F(G)$. Теперь получаем, что $T \cap G^{\mathfrak{F}} \cap G^{\mathfrak{X}} = 1$. Отсюда имеем, что $T \cap G^{\mathfrak{X}} = 1$. По теореме 2 получаем, что $G \in \mathfrak{X}$. Однако последнее противоречит условию теоремы.

Обратно, пусть $\Phi(G) = G^{\mathfrak{X}}$. Отсюда следует, что $G^{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{N}$. Теорема доказана.

Теорема 7. Формация $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{S}\mathfrak{F}$ является S_n-замкнутой.

Доказательство. Допустим, что теорема не выполняется. Из всех групп, принадлежащих формации $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{S}\mathfrak{F}$ и для которых теорема не выполняется, выберем группу G наименьшего порядка. Тогда в G существует нормальная подгруппа H такая, что $H \notin \mathfrak{X}$. Ясно, что $H \notin \mathfrak{F}$. Значит, $H^{\mathfrak{F}} \neq 1$. Поскольку $H^{\mathfrak{F}}$ характеристическая в H и H-нормальная в G подгруппа, то $H^{\mathfrak{F}}$ есть нормальная подгруппа в G. Возьмем минимальную нормальную подгруппу N в группе G такую, что $N \subseteq H^{\mathfrak{F}}$. Поскольку $|G/N| < |G|$, то ясно, что

$$H/N \in \mathfrak{X}. \tag{7.1}$$

Отсюда получаем, что подгруппа $(H/N)^{\mathfrak{F}} = H^{\mathfrak{F}}/N$ не содержит фраттиниевых (H/N)-главных факторов. Значит, в группе H между N и $H^{\mathfrak{F}}$ нет фраттиниевых H-главных факторов. Так как $\Phi(H)$ характеристическая в H и H-нормальная G, то $\Phi(H)$ нормальная в G. Далее, по теореме 4: $\Phi(H) \subseteq H^{\mathfrak{X}}$, а в силу (7.1) получим, что $H^{\mathfrak{X}} \subseteq N$. Но N – минимальная нормальная в G. Значит, либо $\Phi(H) = 1$, либо $\Phi(H) = N$. Допустим, что $\Phi(H) = 1$. Тогда с учетом (1) получим, что между 1 и N в группе H все H-главные факторы нефраттиниевы. Отсюда имеем, что $H \in \mathfrak{X}$. Противоречие. Пусть теперь $\Phi(H) = N$. Поскольку H – нормальная подгруппа в G, то $\Phi(H) \subseteq \Phi(G)$. Далее, из $G \in \mathfrak{X}$ получим, что $G^{\mathfrak{X}} = 1$, и поэтому $G^{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{N}$. По теореме 6 имеем, что $\Phi(G) = G^{\mathfrak{X}} = 1$. Теперь ясно, что $\Phi(H) = 1$. Противоречие. Теорема доказана.

Теорема 8. Пусть H – нормальная подгруппа группы $G \in \mathfrak{S}\mathfrak{F}$. Тогда справедливо: $H^{\mathfrak{X}} \subseteq G^{\mathfrak{X}}$.

Доказательство. Допустим, что $G \in \mathfrak{X}$. Тогда по теореме 4 получим, что $H \in \mathfrak{X}$ и теорема, очевидно, выполняется. Пусть теперь $G \notin \mathfrak{X}$.

Рассмотрим два возможных случая.

1. $H \cap G^{\mathfrak{X}} \neq 1$. Возьмем минимальную нормальную подгруппу N в G такую, что $N \subseteq H \cap G^{\mathfrak{X}}$. В силу индуктивных соображений имеем: $(H/N)^{\mathfrak{X}} \subseteq (G/N)^{\mathfrak{X}}$; $H^{\mathfrak{X}}N/N = (H/N)^{\mathfrak{X}} \subseteq (G/N)^{\mathfrak{X}} = G^{\mathfrak{X}}/N$. Теперь видно, что требуемое включение выполняется.

2. $H \cap G^{\mathfrak{X}} = 1$. В силу того, что $G/G^{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{X}$, то по теореме 7 имеем: $HG^{\mathfrak{X}}/G^{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{X}$. Далее, в силу изоморфизма $HG^{\mathfrak{X}}/G^{\mathfrak{X}} \cong H/H \cap G^{\mathfrak{X}} \cong H$ теперь получим, что $H \in \mathfrak{X}$, а значит, $H^{\mathfrak{X}} = 1$ и требуемое очевидно. Теорема доказана.

Следствие. Пусть M – субнормальная подгруппа группы G и $G \in \mathfrak{S}\mathfrak{F}$. Тогда $M^{\mathfrak{X}} \subseteq G^{\mathfrak{X}}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Скиба А.Н. О локальных формациях конечных групп с S_n-замкнутыми подформациями // Доклады АН БССР. - 1979. - № 8, Т. 23. - С. 677 - 680.
2. Gashutz W. Praefrattinigruppen // Arch. Math. - 1962. - Vol. 13. - P. 418 - 426.
3. Bechtell H. The Prefrattini residual // Proc. Amer. Math. Soc. - 1976. - № 2. - Vol. 55. - P. 267 - 270.
4. Шеметков Л.А. Формации конечных групп. - М.: Наука, 1978.
5. Гойко В.И. Исследование свойств Зг-профраттиниевых подгрупп конечных групп // Веснік Віцебскага дзяржаўнага універсітэта. - 2005. - № 4(38). - С. 92 - 98.