

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Полоцкий государственный университет»

СЕРИЯ «САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА СТУДЕНТОВ»



Л. С. Турищев

КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Электронное пособие для организации самостоятельной работы
студентов строительных специальностей всех форм обучения
при изучении курса «Строительная механика»

Текстовое электронное издание

Новополоцк
Полоцкий государственный университет
2021

УДК 624.04(075.8)

Одобрено и рекомендовано к изданию методической комиссией инженерно-строительного факультета в качестве методического пособия (протокол № 3 от 28 апреля 2021)

Кафедра строительных конструкций

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

канд. техн. наук, доц., зав. кафедрой строительного производства

Л. М. ПАРФЕНОВА

канд. техн. наук, доц., доц. кафедры строительных конструкций

А. И. КОЛТУНОВ

Пособие предназначено для оказания помощи студентам при самостоятельном изучении модуля «Колебания системы с одной степенью свободы» курса строительной механики. На основе структурно-логических схем приведены рекомендации по технологии формирования междисциплинарной системы знаний, связанных с базовыми теоретическими положениями и понятиями модуля. Содержатся указания по приобретению устойчивых умений и навыков, связанных с практическим применением сформированной системы знаний для решения типовых задач модуля. Имеется банк тестовых заданий для самоконтроля ключевых знаний и умений, связанных с изучаемым модулем. Приведен список рекомендуемой учебной литературы, Интернет-источников. Составлен глоссарий модуля.

Пособие предназначено для студентов специальностей 1-70 02 01 «Промышленное и гражданское строительство», 1-70 02 02 «Экспертиза и управление недвижимостью» очной, заочной, дистанционной форм обучения. Может быть полезно начинающим преподавателям строительной и технической механики.

© Турищев Л. С., 2021

© Полоцкий государственный университет, 2021

2 – дополнительный титульный экран – производственно-технические сведения

Для создания текстового электронного издания «Колебания системы с одной степенью свободы» использованы текстовый процессор Microsoft Word и программа Adobe Acrobat XI Pro для создания и просмотра электронных публикаций в формате PDF.

Леонид Степанович ТУРИЩЕВ

**КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ
С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ**

Электронное пособие для организации самостоятельной работы
студентов строительных специальностей всех форм обучения
при изучении курса «Строительная механика»

Редактор *А. А. Прадидова*

Подписано к использованию 24.08.2021.

Объем издания: 1,14 Мб. Заказ 545.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования «Полоцкий государственный университет».

Свидетельство о государственной регистрации
издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/305 от 22.04.2014.

ЛП № 02330/278 от 08.05.2014.

211440, ул. Блохина, 29,
г. Новополоцк,
Тел. 8 (0214) 59-95-41, 59-95-44
<http://www.psu.by>

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	5
ВВЕДЕНИЕ	6
1. РЕКОМЕНДАЦИИ К ИЗУЧЕНИЮ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА МОДУЛЯ.....	7
2. УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ МОДУЛЯ.....	10
2.1 Задачи по определению количественных характеристик свободных колебаний систем с одной степенью свободы	10
2.2 Задачи по определению количественных характеристик установившегося процесса вынужденных колебаний систем с одной степенью свободы.....	13
3. МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ И УМЕНИЙ.....	20
3.1 Тестовые задания первого уровня	20
3.2 Тестовые задания второго уровня	24
3.3 Ответы на тестовые задания первого и второго уровней.....	25
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	26
Приложение 1.....	28
Приложение 2.....	30
Приложение 3.....	32
Глоссарий модуля	34

ПРЕДИСЛОВИЕ

Уважаемые студенты! Данное пособие является очередным в ряду работ, содержащих материалы для эффективной организации Вашей внеаудиторной самостоятельной работы при изучении курса строительной механики. Предлагаемые материалы включают в себя:

- рекомендации по осуществлению самостоятельной познавательной деятельности с целью формирования системы знаний, связанных с базовыми теоретическими положениями и понятиями изучаемого модуля курса и соответствующих дисциплин естественнонаучного и общепрофессионального циклов;

- указания по приобретению устойчивых умений и навыков, связанных с практическим применением сформированной системы знаний для решения задач модуля курса согласно стандартным алгоритмам;

- материалы для самоконтроля знаний, умений и навыков, связанных с изучаемым курсом.

При написании пособия использовались материалы, изложенные в соответствующих образовательных стандартах, учебных программах, учебниках, учебных пособиях, Интернет-источниках по строительной механике и связанным с ней соответствующим дисциплинам естественнонаучного и общепрофессионального циклов учебного плана. Список использованных источников приводится в конце пособия.

ВВЕДЕНИЕ

Строительная конструкция считается системой с одной степенью свободы, если ее геометрическое положение при колебаниях будет однозначно определяться изменением во времени одного параметра – некоторого линейного или углового перемещения конструкции.

При проверочном динамическом расчете любая строительная конструкция (балки, пластинки, рамы и др.), с размещенным оборудованием большого веса, по сравнению с которым собственным весом конструкции можно пренебречь, может рассматриваться как система с одной степенью свободы.

Кроме того, при таких расчетах как системы с одной степенью свободы могут рассматриваться строительные конструкции с учетом собственной распределенной массы и нескольких присоединенных масс, которые заменяются эквивалентной точечной массой, присоединенной в некотором сечении конструкции. Эквивалентная точечная масса может определяться из условия равенства потенциальной энергии деформации, равенства статических прогибов и других условий эквивалентности двух систем. Принятые условия эквивалентности влияют на степень точности динамического расчета.

В настоящем пособии рассматриваются свободные и вынужденные колебания несущих стержневых конструкций зданий и сооружений как систем с одной степенью свободы.

1. РЕКОМЕНДАЦИИ К ИЗУЧЕНИЮ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА МОДУЛЯ

Изучение теоретического материала модуля следует начинать с повторения рекомендаций по изучению курса в целом согласно [13]. Содержание изучаемого модуля связано с общими положениями и понятиями колебания системы с одной степенью свободы. Структурно-логическая схема ключевых понятий, принципов, терминов рассматриваемого модуля, которые подлежат пониманию и усвоению согласно [3], приведена на рисунке 1.

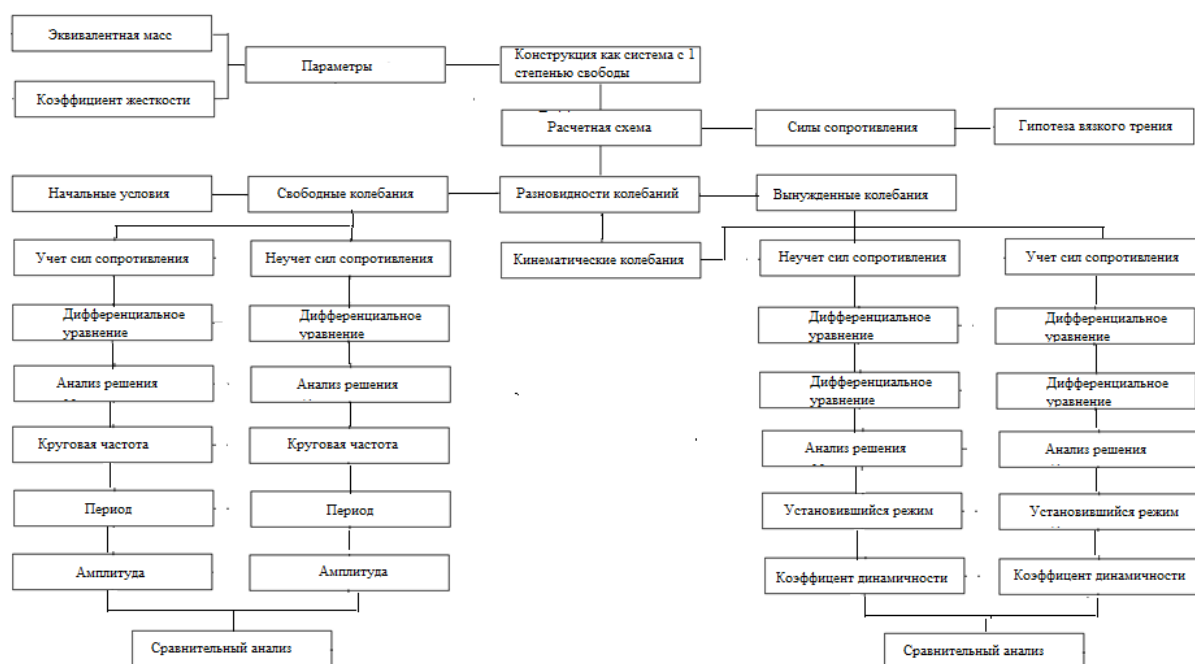


Рисунок 1. – Структурно-логическая схема ключевых понятий, принципов, терминов изучаемого модуля

Изучение материала модуля должно начинаться с ясного понимания, что собой представляет **система с одной степенью свободы** и что любая строительная конструкция при предварительных расчетах может рассматриваться как система с одной степенью свободы, а ее динамическая расчетная схема характеризуется двумя параметрами: величиной **эквивалентной массы** и **коэффициентом жесткости конструкции**.

После этого следует разобраться, что такое **коэффициент жесткости** и **коэффициент податливости** конструкции, как они взаимосвязаны и как они определяются.

Затем важно:

– выяснить, какие колебания может совершать система с одной степенью свободы, какими перемещениями может характеризоваться степень свободы системы;

- усвоить, что любые колебания системы с одной степенью свободы могут исследоваться с учетом и без учета сил сопротивления колебаниям;
- понять, что в основе получения дифференциального уравнения, описывающего любые колебания системы с одной степенью свободы, лежит второй закон Ньютона.

Изучение колебаний системы с одной степенью свободы следует начинать со **свободных колебаний**. Прежде всего, сначала важно понять:

- что собой представляют такие колебания;
- что является причиной их возникновения;
- что такое **начальные условия**;
- что собой представляют дифференциальные уравнения таких колебаний с учетом и без учета сил сопротивления;
- что является решением дифференциальных уравнения таких колебаний с учетом и без учета сил сопротивления.

Затем, опираясь на полученные решения дифференциальных уравнений, следует усвоить, что собой представляют параметры свободных колебаний (**период, частота, круговая частота и амплитуда колебаний**), и разобраться, как влияет учет сил сопротивления на числовые значения этих параметров.

После этого следует приступить к изучению **вынужденных колебаний** системы с одной степенью свободы. И здесь, прежде всего, сначала важно понять:

- что собой представляют такие колебания;
- что является причиной их возникновения;
- что собой представляют дифференциальные уравнения таких колебаний с учетом и без учета сил сопротивления;
- что является решением дифференциальных уравнения таких колебаний с учетом и без учета сил сопротивления.

Анализируя полученные решения дифференциальных уравнений, важно:

- понять, что они имеют одинаковую структуру;
- усвоить физический смысл составляющих этих решений;
- разобраться, что такое неустановившийся и установившийся процессы вынужденных колебаний;
- понять связь неустановившегося и установившегося процессов вынужденных колебаний с режимами работы оборудования, порождающего такие колебания.

Далее следует подробно изучить установившийся процесс вынужденных колебаний, разобраться с понятием **коэффициента динамичности**, влиянием учета сил сопротивления на его числовые значения и использованием этого коэффициента при динамических расчетах строительных конструкций.

И, в завершение, необходимо рассмотреть колебания системы с одной степенью, вызванные колебаниями опоры. Здесь важно понять, что такие колебания равнозначны вынужденным колебаниям этой системы, и разобраться, как параметры колебаний опоры связаны с параметрами эквивалентной динамической нагрузки.

При изучении материала модуля рекомендуется использование следующей литературы: [4, с. 571–597; 5, с. 567–572; 7, с. 19–50; 12, с. 25–40].

Для осознанного понимания и усвоения материала рассматриваемого модуля курса, прежде всего, необходимо повторить:

– *изученное в математике* – понятия функции, производной функции, дифференциального уравнения, обыкновенного дифференциального уравнения, общего и частного решения дифференциального уравнения, интегральная кривая, начальные условия, задача Коши. Краткие справочные сведения, связанные с этими понятиями, приведены в приложении 1;

– *изученное в физике* – основные понятия и законы классической механики. Краткие справочные сведения, связанные с этими понятиями, приведены в приложении 2;

– *изученное в теоретической механике* – основные понятия и уравнения динамики. Краткие справочные сведения, связанные с этими понятиями, аксиомами и уравнениями, приведены в приложении 3;

– *изученное в модуле «Методы определения внутренних усилий от неподвижной нагрузки в плоских статически определимых стержневых системах»* – внутренние силы и их числовые характеристики, виды статически определимых конструкций и их свойства, статический метод определения внутренних усилий;

– *изученное в модуле «Определение перемещений в стержневых конструкциях»* – деформация конструкции, жесткость и податливость конструкции, полные, частичные и единичные перемещения, закон Гука для конструкции, формулы для определения перемещений в статически определимых плоских стержневых конструкциях от нагрузки и осадки опор.

2. УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ МОДУЛЯ

После завершения изучения теоретического материала модуля, его понимания и усвоения можно переходить к применению полученных знаний для решения типовых задач модуля. Согласно утвержденной учебной программе курса [3] Вы должны при изучении колебаний системы с одной степенью свободы уметь определять количественные характеристики свободных и вынужденных колебаний такой системы.

Для приобретения умений решения задач рекомендуется сначала внимательно прочитать указания к решению задач, разобраться с приводимыми примерами их решения. После этого рекомендуется к перейти к решению задач, приведенных в [9; 12; 16; 17; 18].

2.1 Задачи по определению количественных характеристик свободных колебаний систем с одной степенью свободы

Основными количественными характеристиками свободных колебаний строительных конструкций, рассматриваемых как системы с одной степенью свободы, являются круговая частота, частота и период колебаний. При их определении не учитываются силы сопротивления колебаниям ввиду малости их влияния. Поэтому для определения этих числовых характеристик применяются следующие формулы:

- круговая частота свободных колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{M}},$$

где c – коэффициент жесткости конструкции в месте присоединения массы по направлению ее перемещения при колебаниях конструкции;

M – величина присоединенной массы;

- частота свободных колебаний

$$n = \frac{\omega}{2\pi};$$

- период свободных колебаний

$$T = \frac{1}{n}.$$

Так как круговая частота и, следовательно, частота и период свободных колебаний конструкции зависят от коэффициента жесткости конструк-

ции, то их определение должно начинаться с определения требуемого коэффициента жесткости конструкции по формуле

$$c = \frac{1}{\delta},$$

где δ – коэффициент податливости конструкции. Для определения коэффициента податливости используется формула Максвелла-Мора.

Пример. Для консольной стальной балки с присоединенной на конце массой (рисунок 2).

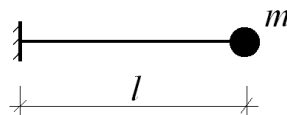


Рисунок 2. – Консольная балка с присоединенной массой

определить круговую частоту, частоту и период колебаний балки. Длина консоли балки $l = 1$ м, момент инерции поперечного сечения $I_z = 2500$ см⁴, модуль упругости материала балки $E = 2.1 \cdot 10^5$ МПа, вес присоединенной массы $P = 12$ кН.

Для определения коэффициента податливости конструкции образуем в балке единичное состояние, прикладывая на конце консоли безразмерную вертикальную единичную силу (рисунок 3).

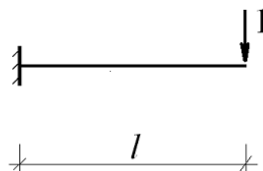


Рисунок 3. – Единичное состояние балки

Возникающий единичный прогиб на свободном конце балки и характеризует искомый коэффициент податливости (рисунок 4).

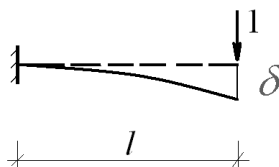


Рисунок 4. – Единичный прогиб на свободном конце балки

Для определения единичного прогиба используем формулу Максвелла-Мора, которая для рассматриваемой балки имеет вид

$$\delta = \delta_{11} = \int_0^l \frac{m_1^2}{EI_z} ds.$$

Строим в единичном состоянии эпюру изгибающих моментов (рисунок 5).

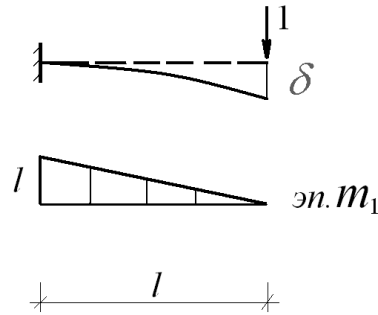


Рисунок 5. – Эпюра изгибающих моментов в единичном состоянии

Применим для вычисления интеграла, входящего в формулу Максвелла-Мора, правило Верещагина и получим аналитическое выражение для вычисления коэффициента податливости

$$\delta = \delta_{11} = \frac{l^3}{3EI_z}$$

Подставляя в полученное выражение числовые значения входящих в него величин, найдем, что коэффициент податливости равняется

$$\delta = \delta_{11} = \frac{1^3}{3 \cdot 2.1 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 2500 \cdot 10^{-8}} = 6.349 \cdot 10^{-8} \frac{\text{М}}{\text{Н}}$$

Вычисляя величину обратную найденному коэффициенту податливости, получим, что искомый коэффициент жесткости равняется

$$c = \frac{1}{\delta} = 1.575 \cdot 10^7 \frac{\text{Н}}{\text{М}}$$

Для вычисления круговой частоты колебаний балки применим формулу

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{M}}$$

и найдем

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{M}} = \sqrt{\frac{c \cdot g}{P}} = \sqrt{\frac{1.575 \cdot 10^7 \cdot 9.8}{12 \cdot 10^3}} = 19.854 \text{ сек}^{-1}$$

Для вычисления частоты колебаний балки применим формулу

$$n = \frac{\omega}{2\pi}$$

и найдем

$$n = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{19.854}{2 \cdot 3.14} = 3.16 \text{ Гц.}$$

Для вычисления периода колебаний балки применим формулу

$$T = \frac{1}{n}$$

и найдем

$$T = \frac{1}{n} = \frac{1}{3.16} = 0.316 \text{ сек.}$$

2.2 Задачи по определению количественных характеристик установившегося процесса вынужденных колебаний систем с одной степенью свободы

Основными количественными характеристиками установившегося процесса вынужденных колебаний строительных конструкций, рассматриваемых как системы с одной степенью свободы, при действии гармонической нагрузки являются амплитудные значения следующих параметров напряженно-деформированного состояния колеблющейся конструкции – перемещения, внутренние усилия, нормальные напряжения. Для их определения используются следующие формулы:

– амплитудное значение динамического перемещения (линейного или углового), возникающего в опасном сечении конструкции

$$a = a_{cm} \eta,$$

где a_{cm} – перемещение, которое вызывается в системе амплитудой динамической нагрузки, приложенной статически;

η – коэффициент динамичности, который учитывает динамический характер действующей нагрузки;

– амплитудное значение динамического внутреннего усилия $S_{вк}$ (изгибающий момент, поперечная и продольная силы), возникающего в опасном сечении конструкции

$$S_{вк} = S_{cm} \eta,$$

где S_{cm} – внутреннее усилие, которое вызывается в системе амплитудой динамической нагрузки, приложенной статически;

– амплитудное значение динамического нормального напряжения $\sigma_{вк}$, возникающего в наиболее нагруженной точке опасного сечения конструкции

$$\sigma_{вк} = \sigma_{cm} \eta,$$

где σ_{cm} – нормальное напряжение, которое вызывается в системе амплитудой динамической нагрузки, приложенной статически.

Коэффициент динамичности вычисляется по формулам:

– при неучете сил сопротивления колебаниям

$$\eta = \left| \frac{1}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2} \right|,$$

где θ – круговая частота изменения величины динамической нагрузки;

ω – круговая частота свободных колебаний конструкции;

– при учете сил сопротивления колебаниям

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2\right)^2 + \frac{4\lambda^2\theta^2}{\omega^4}}}$$

где λ – коэффициент, характеризующий темп затухания свободных колебаний конструкции, образно говоря ее коэффициент вязкости.

Из приведенных формул для вычисления коэффициента динамичности следует, что его величина зависит от отношения $\frac{\theta}{\omega}$. Графики, описывающие изменение коэффициента динамичности, представлены на рисунке 6. Графики, показанные пунктирными линиями, соответствуют изменениям коэффициента динамичности без учета сил сопротивления, а графики, показанные сплошными линиями, соответствуют изменениям коэффициента динамичности с учетом сил сопротивления при различных значениях коэффициента вязкости системы λ .

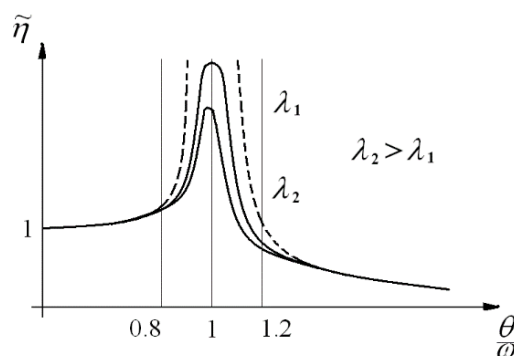


Рисунок 6. – График коэффициента динамичности

Из приведенных графиков вытекают следующие выводы.

Во-первых, если круговая частота изменения динамической нагрузки мала по сравнению с собственной частотой свободных колебаний системы, то коэффициент динамичности близок к единице. Амплитудные значения параметров напряженно-деформированного состояния вынужденных колебаний в этом случае мало отличаются от их статических значений.

А учет сил сопротивления при отношениях $\frac{\theta}{\omega} < 0.8$ практически не влияет на величину коэффициента динамичности.

Во-вторых, в случае, когда отношение $\frac{\theta}{\omega}$ приближается к единице, то коэффициент динамичности и амплитудные значения параметров напряженно-деформированного состояния вынужденных колебаний быстро возрастают. Наиболее заметные изменения этих величин соответствуют области отношений $0.8 \leq \frac{\theta}{\omega} \leq 1.2$, а при $\theta = \omega$ они обращаются в бесконечность (в случае неучета сил сопротивления), или принимают большие, но конечные значения (в случае учета сил сопротивления). Явление резкого увеличения амплитуды вынужденных колебаний при совпадении круговой частоты динамической нагрузки с собственной частотой свободных колебаний системы носит название резонанса. Учет сил сопротивления в области отношений $0.8 \leq \frac{\theta}{\omega} \leq 1.2$ существенно влияет на величину коэффициента динамичности.

В-третьих, в случае, когда частота изменения динамической нагрузки θ становится большей, чем собственная частота свободных колебаний системы, и удовлетворяет отношению $\frac{\theta}{\omega} > 1.2$, коэффициент динамичности может принимать значения как больше, так и меньше единицы. Учет сил сопротивления в этом случае практически не влияет на величину коэффициента динамичности.

Таким образом, рассматривая установившийся процесс вынужденных колебаний системы с одной степенью свободы, в зависимости от отношения $\frac{\theta}{\omega}$, можно выделить следующие его разновидности:

– $0 < \frac{\theta}{\omega} < 0.8$ – дорезонансный режим установившегося процесса колебаний;

- $0.8 \leq \frac{\theta}{\omega} \leq 1.2$ – околорезонансный режим установившегося процесса колебаний, включая явление резонанса при $\theta = \omega$;
- $1.2 < \frac{\theta}{\omega} < \infty$ – зарезонансный режим установившегося процесса колебаний.

Пример. На стальной балке пролетом $l=6$ м расположен электродвигатель весом $Q=30$ кН ($a=1.5$ м, $b=4.5$ м) (рисунок 7). Двигатель совершает 350 об/мин и порождает динамическую нагрузку $H(t)=H \sin \vartheta t$. Амплитудное значение $H=8$ кН.

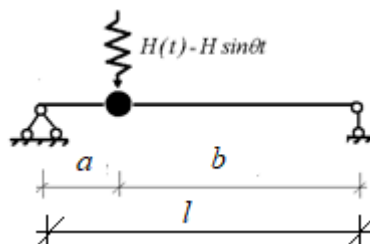


Рисунок 7. – Схема балки с электродвигателем

Поперечное сечение балки двутавр №30 а – $I=8950$ см⁴, $W=597$ см³. Параметры материала балки – модуль упругости $E=2.1 \cdot 10^5$ МПа, расчетное сопротивление $R=210$ МПа.

Требуется определить режим установившегося процесса вынужденных колебаний, амплитуду вынужденных колебаний и проверить прочность балки при работающем электродвигателе.

Для определения коэффициента податливости конструкции образуем в балке единичное состояние, прикладывая безразмерную вертикальную единичную силу в сечении, где расположена масса (рисунок 8).

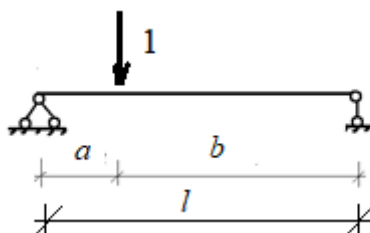


Рисунок 8. – Единичное состояние балки

Возникающий единичный прогиб в этом сечении балки характеризует искомый ее коэффициент податливости. Для определения единичного прогиба используем формулу Максвелла-Мора, которая имеет вид

$$\delta = \delta_{11} = \int_0^l \frac{m_1^2}{EI_z} ds.$$

Строим в единичном состоянии эпюру изгибающих моментов (рисунок 9).

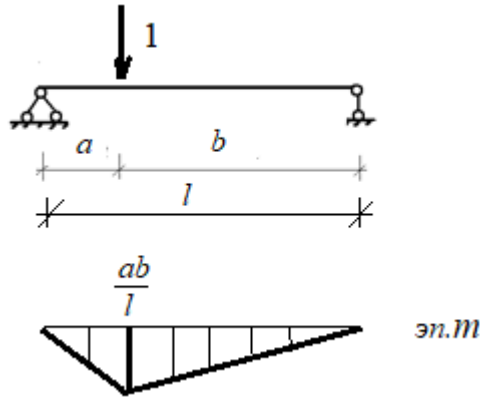


Рисунок 9. – Эпюра изгибающих моментов в единичном состоянии

Применим для вычисления интеграла, входящего в формулу Максвелла-Мора, правило Верещагина и получим аналитическое выражение для вычисления коэффициента податливости

$$\delta = \delta_{11} = \frac{1}{EI_z} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{ab}{l} \cdot a \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{ab}{l} + \frac{1}{2} \cdot \frac{ab}{l} \cdot b \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{ab}{l} \right).$$

Подставляя в полученное выражение числовые значения входящих в него величин, найдем, что коэффициент податливости равняется

$$\delta = \delta_{11} = 1.437 \cdot 10^{-7} \frac{\text{М}}{\text{Н}}.$$

Вычисляя величину обратную найденному коэффициенту податливости, получим, что искомый коэффициент жесткости равняется

$$c = \frac{1}{\delta} = 7.425 \cdot 10^6 \frac{\text{Н}}{\text{м}}.$$

Для вычисления круговой частоты колебаний балки применим формулу

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{M}}$$

и найдем

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{M}} = \sqrt{\frac{c \cdot g}{P}} = 49.267 \text{ сек}^{-1}.$$

Для определения режима установившегося процесса вынужденных колебаний найдем круговую частоту изменения величины динамической нагрузки

$$\theta = 350 \cdot \frac{2\pi}{60} = 36.633 \text{ сек}^{-1}.$$

Тогда

$$\frac{\theta}{\omega} = \frac{36.633}{49.267} = 0.744$$

и, следовательно, установившемся процессу вынужденных колебаний балки соответствует дорезонансный режим.

Для определения амплитуды вынужденных колебаний по формуле

$$a = a_{cm} \eta$$

найдем величину перемещения, которое вызывается в системе амплитудой динамической нагрузки H , приложенной статически, по формуле Максвелла-Мора

$$a_{cm} = \frac{H}{EI_z} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{ab}{l} \cdot a \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{ab}{l} + \frac{1}{2} \cdot \frac{ab}{l} \cdot b \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{ab}{l} \right) = 0.00404 \text{ м}$$

и величину коэффициента динамичности

$$\eta = \frac{1}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega} \right)^2} = 2.241$$

Тогда амплитуда вынужденных колебаний балки равняется

$$a = 0.00404 \cdot 2.241 = 0.009054 \text{ м.}$$

Для проверки прочности балки при работающем электродвигателе найдем в опасном сечении:

– амплитуду динамического изгибающего момента по формуле

$$M_{вк} = M_{ст} \eta,$$

где

$$M_{ст} = H \cdot \frac{ab}{l} = 8 \cdot \frac{1.5 \cdot 4.5}{6} = 9 \text{ кНм}$$

и, следовательно,

$$M_{вк} = 9 \cdot 2.241 = 20.169 \text{ кНм.}$$

– величину максимального изгибающего момента, который вызывается весом неработающего электродвигателя

$$M_Q = Q \cdot \frac{ab}{l} = 30 \cdot \frac{1.5 \cdot 4.5}{6} = 33.75 \text{ кНм.}$$

– величину суммарного максимального изгибающего момента

$$M_{\max} = M_{\text{вк}} + M_Q = 9 + 33.75 = 42.75 \text{ кНм.}$$

– величину нормального напряжения

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{110.8 \cdot 10^5}{597 \cdot 10^{-6}} \cdot 10^{-6} = 66.568 \text{ МПа.}$$

– проверяем условие прочности

$$\sigma_{\max} = 66.568 \text{ МПа} < R = 210 \text{ МПа.}$$

Таким образом, условие прочности балки при работающем электродвигателе соблюдается.

3. МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ И УМЕНИЙ

При изучении строительной механики важную роль играет адекватная самостоятельная оценка приобретенных знаний и умений. Наиболее рационально это можно осуществлять с помощью самотестирования. Для его проведения в пособии содержатся:

- тестовые задания первого уровня, позволяющие проверить понимание и усвоение основных понятий, принципов, терминов изученного модуля;
- тестовые задания второго уровня, позволяющие проверить умение решать типовые задачи модуля.

В представленных тестовых заданиях первого уровня использованы следующие их виды:

- задания закрытой формы;
- задания на установление соответствия;
- задания на установление правильной последовательности;
- задания открытой формы.

В тестовых заданиях закрытой формы необходимо выбрать правильный ответ из представленных вариантов ответов. Возможны две разновидности таких заданий: с выбором одного правильного ответа, с выбором нескольких правильных ответов.

В тестовых заданиях на установление соответствия нужно указать связь между элементами двух столбцов – задающего столбца и столбца выбора. Элементы задающего столбца располагаются слева, а элементы столбца выбора – справа. Правый столбец содержит элементов больше, чем левый, и все его элементы являются истинными высказываниями.

В тестовых заданиях на установление последовательности нужно восстановить правильную последовательность некоторых действий, приведенных произвольным образом.

В тестовых заданиях открытой формы требуется дописать правильный ответ, связанный с определенным понятием, принципом или термином.

В тестовых заданиях второго уровня необходимо показать умение решать стандартные задачи, связанные с определением степени статической неопределимости плоских стержневых конструкций.

3.1 Тестовые задания первого уровня

1.1. *Продолжительность одного цикла колебаний системы с одной степенью свободы называется?*

1. периодом колебаний;
2. частотой колебаний;

3. круговой частотой колебаний;
4. технической частотой колебаний;
5. начальной фазой колебаний.

1.2. Число циклов колебаний системы с одной степенью свободы, происходящих в 1 сек, называется?

1. периодом колебаний;
2. частотой колебаний;
3. круговой частотой колебаний;
4. технической частотой колебаний;
5. начальной фазой колебаний.

1.3. Число циклов колебаний системы с одной степенью свободы, происходящих за время 2π сек, называется?

1. периодом колебаний;
2. частотой колебаний;
3. круговой частотой колебаний;
4. технической частотой колебаний;
5. начальной фазой колебаний.

1.4. Число циклов колебаний системы с одной степенью свободы, происходящих в 1 мин, называется?

1. периодом колебаний;
2. частотой колебаний;
3. круговой частотой колебаний;
4. технической частотой колебаний;
5. начальной фазой колебаний.

1.5. Колебания системы с одной степенью свободы, которые вызваны начальным возмущением и совершаются за счет энергии деформации при отсутствии постоянного внешнего воздействия, называются?

1. свободными колебаниями;
2. периодическими колебаниями;
3. вынужденными колебаниями;
4. параметрическими колебаниями;
5. автоколебаниями.

1.6. *Колебания системы с одной степенью свободы, которые вызваны действием переменных во времени нагрузок, называются?*

1. свободными колебаниями;
2. периодическими колебаниями;
3. вынужденными колебаниями;
4. параметрическими колебаниями;
5. автоколебаниями.

1.7. *Колебания системы с одной степенью свободы, характеризующиеся повторяемостью закона движения, называются?*

1. свободными колебаниями;
2. периодическими колебаниями;
3. вынужденными колебаниями;
4. параметрическими колебаниями;
5. автоколебаниями.

1.8. *На какую числовую характеристику гармонических свободных колебаний системы с одной степенью свободы влияет учет сил сопротивления?*

1. период колебаний;
2. частота колебаний;
3. круговая частота колебаний;
4. амплитуда колебаний;
5. начальная фаза колебаний.

1.9. *Как влияет увеличение жесткости конструкции на ее круговую частоту свободных колебаний как системы с одной степенью свободы?*

1. увеличивает;
2. уменьшает;
3. не изменяет.

1.10. *Как влияет уменьшение жесткости конструкции на ее круговую частоту свободных колебаний как системы с одной степенью свободы?*

1. увеличивает;
2. уменьшает;
3. не изменяет.

1.11. Как влияет увеличение массы конструкции на ее круговую частоту свободных колебаний как системы с одной степенью свободы?

1. увеличивает;
2. уменьшает;
3. не изменяет.

1.12. Как влияет уменьшение массы конструкции на ее круговую частоту свободных колебаний как системы с одной степенью свободы?

1. увеличивает;
2. уменьшает;
3. не изменяет.

1.13. При каких условиях возникает резонанс в конструкции как системы с одной степенью свободы?

1. круговая частота свободных колебаний меньше круговой частоты изменения динамической нагрузки;
2. круговая частота свободных колебаний больше круговой частоты изменения динамической нагрузки;
3. круговая частота свободных колебаний равняется круговой частоте изменения динамической нагрузки.

1.14. При каких соотношениях круговой частоты изменения динамической нагрузки и круговой частоты свободных колебаний конструкции как системы с одной степенью свободы реализуется дорезонансный режим установившегося процесса вынужденных колебаний?

1. $0 < \frac{\theta}{\omega} < 0.8$;
2. $0.8 \leq \frac{\theta}{\omega} \leq 1.2$;
3. $1.2 < \frac{\theta}{\omega} < \infty$;
4. $\theta = \omega$.

1.15. При каких соотношениях круговой частоты изменения динамической нагрузки и круговой частоты свободных колебаний конструкции как системы с одной степенью свободы реализуется околорезонансный режим установившегося процесса вынужденных колебаний?

1. $0 < \frac{\theta}{\omega} < 0.8$;

$$2. 0.8 \leq \frac{\theta}{\omega} \leq 1.2;$$

$$3. 1.2 < \frac{\theta}{\omega} < \infty.$$

1.16. При каких соотношениях круговой частоты изменения динамической нагрузки и круговой частоты свободных колебаний конструкции как системы с одной степенью свободы реализуется зарезонансный режим установившегося процесса вынужденных колебаний?

$$1. 0 < \frac{\theta}{\omega} < 0.8;$$

$$2. 0.8 \leq \frac{\theta}{\omega} \leq 1.2;$$

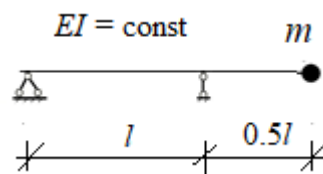
$$3. 1.2 < \frac{\theta}{\omega} < \infty;$$

$$4. \theta = \omega.$$

3.2 Тестовые задания второго уровня

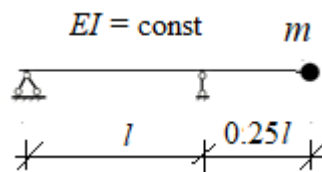
2.1. Определите коэффициент жесткости конструкции

2.1.1



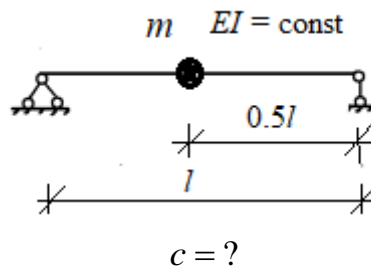
$$c = ?$$

2.1.2

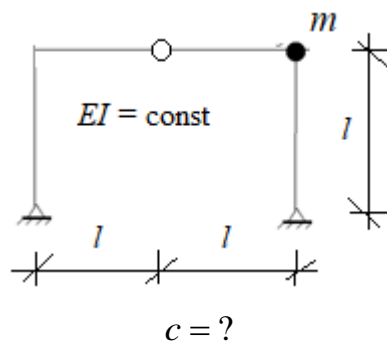


$$c = ?$$

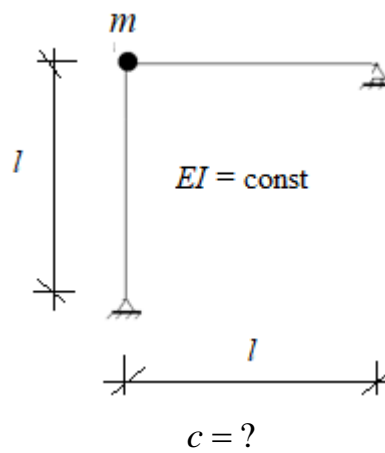
2.1.3



2.1.4



2.1.5



3.3 Ответы на тестовые задания первого и второго уровней

1.1 – 1; 1.2 – 2; 1.3 – 3; 1.4 – 4; 1.5 – 1; 1.6 – 3; 1.7 – 2; 1.8 – 4; 1.9 – 1;
1.10 – 2; 1.11 – 2; 1.12 – 1; 1.13 – 3; 1.14 – 1; 1.15 – 2; 1.16 – 3.

$$2.1.1 - c = \frac{24 EI}{5 l^3}; 2.1.2 - c = \frac{192 EI}{5 l^3}; 2.1.3 - c = 48 \frac{EI}{l^3}; 2.1.4 - c = 3 \frac{EI}{l^3};$$

$$2.1.5 - c = \frac{3 EI}{2 l^3}.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Учебно-нормативные документы

1. Образовательный стандарт высшего образования первой ступени специальности Промышленное и гражданское строительство ОСВО 1-70 02 01-2013 ; утв. 30.08.2013. – Минск, 2013.

2. Типовая учебная программа дисциплины «Строительная механика», регистрационный № ТД-Ј.066/тип ; утв. 30.06.2010. – Минск, 2010.

3. Учебная программа дисциплины «Строительная механика», регистрационный № 03/15/уч. ; утв. 01.07.2015.

Учебная литература основная

4. Борисевич, А. А. Строительная механика : учеб. пособие для вузов / А. А. Борисевич, Е. М. Сидорович, В. И. Игнатюк. – Минск : БНТУ, 2009. – 756 с.

5. Дарков, А. В. Строительная механика : учеб. для вузов. / А. В. Дарков, Н. Н. Шапошников. – СПб. : Лань, 2010. – 656 с.

6. Строительная механика. Стержневые системы : учеб. для вузов / А. Ф. Смирнов [и др.] ; под ред. А. Ф. Смирнова. – М. : Стройиздат, 1981. – 512 с.

7. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений : учеб. для вузов / А. Ф. Смирнов [и др.] ; под ред. А. Ф. Смирнова. – М. : Стройиздат, 1984. – 416 с.

8. Клейн, Г. К. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики / Г. К. Клейн, В. Г. Рекач, Г. И. Розенблат. – М.: Высш. шк., 1972. – 320 с.

9. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики. Статика стержневых систем / Под ред. Г. К.Клейна. – М. : Высш. шк., 1980. – 384 с.

10. Турищев Л. С. Строительная механика : учеб.-метод. комплекс : в 3 ч. / Л. С. Турищев. – Новополоцк : ПГУ, 2010. – Ч. 1 : Статически определимые системы. – 224 с.

11. Турищев Л. С. Строительная механика : учеб.-метод. комплекс : в 3 ч. / Л. С. Турищев. – Новополоцк : ПГУ, 2009. – Ч. 2 : Статически неопределимые системы. – 200 с.

12. Турищев Л. С. Строительная механика : учеб.-метод. комплекс : в 3 ч. / Л. С. Турищев. – Новополоцк : ПГУ, 2010. – Ч. 3 : Основы динамики и устойчивости сооружений. – 136 с.

13. Турищев Л. С. Введение в строительную механику / Л. С. Турищев. – Новополоцк : ПГУ, 2016. – 56 с.

Учебная литература дополнительная

14. Рабинович, И. М. Основы строительной механики стержневых систем / И. М. Рабинович. – М. : Госстройиздат, 1960. – 520 с.

15. Строительная механика. Основы теории с примерами расчетов : учеб. для вузов / А. Е. Саргсян [и др.] ; под ред. А. Е. Саргсяна. – М. : Высш. шк., 2000. – 416 с.

16. Безухов, Н. И. Устойчивость и динамика сооружений в примерах и задачах / Н. И. Безухов, О. В. Лужин, Н. В. Колкунов. – М. : Высш. шк., 1987. – 264 с.

17. Кузьмин В. А. Сборник задач по курсу строительной механики / В. А. Кузьмин, В. Г. Рекач, Г. И. Розенблат ; под ред. И. М. Рабиновича. – М. : Госстройиздат, 1963. – 331 с.

18. Строительная механика в примерах и задачах / Под ред. В. А. Киселева. – М. : Стройиздат, 1986. – 387 с.

Интернет-ресурсы

19. Учебные курсы для студентов по сопротивлению материалов и строительной механике [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://mysopro mat.ru/uchebnye_kursu/.

20. Сайт кафедры строительной механики СПбГПУ с учебными материалами по строительной механике [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://smitu.cef.spbstu.ru/index.htm>.

21. Сайт кафедры строительной механики БелГУТ с учебными материалами по строительной механике [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.mechanika.org.ru/index>.

Краткие справочные сведения по математике,
связанные с содержанием изучаемого модуля¹

Функция – закон (правило), по которому значениям одних переменных величин (независимая переменная x) соответствуют значения других переменных величин (зависимая переменная y). Независимая переменная называется аргументом функции, а зависимая переменная – значением функции.

Область определения функции – совокупность значений независимой переменной x , при которых эта функция определена.

Способы задания функции – аналитический, табличный, графический, компьютерной программой.

Производная функции – предел отношения приращения функции к приращению аргумента, вычисленный в процессе, когда приращение аргумента стремится к нулю.

Дифференциальное уравнение – уравнение, связывающее аргумент (или аргументы), неизвестную функцию (или функции) и ее производные, описывающие определенный физический процесс.

Обыкновенное дифференциальное уравнение – дифференциальное уравнение, в котором искомая функция, зависит от одного аргумента.

Порядок дифференциального уравнения – наивысший порядок производной от искомой функции, входящий в уравнение.

Решение дифференциального уравнения – функция, которая при подстановке в это уравнение обращает его в тождество. Дифференциальное уравнение имеет бесконечное количество решений.

Общее решение обыкновенного дифференциального уравнения n -го порядка – запись всего многообразия решений, содержащая n произвольных постоянных C_1, \dots, C_n и имеющая вид

$$y = y(x; C_1, \dots, C_n).$$

Частные решения обыкновенного дифференциального уравнения n -го порядка – решение, получаемое из общего решения при конкретных численных значениях каждой произвольной постоянной.

Интегральная линия – график каждого частного решения.

¹ Составлены с использованием: Мышкис А. Д. Лекции по высшей математике : учеб. пособие / А. Д. Мышкис. – СПб. : Лань, 2007.

Начальные условия – математические величины, характеризующие начальное состояние изучаемого процесса. Позволяют выделить соответствующее ему частное решение.

Задача Коши – задача о нахождении частного решения обыкновенного дифференциального уравнения при заданных начальных условиях.

Краткие справочные сведения по физике,
связанные с содержанием изучаемого модуля²

Механическое движение – процесс изменения взаимного расположения материальных тел или их частей в пространстве с течением времени.

Механическое воздействие – воздействие одного тела на другое, вызывающее деформацию тела или его ускорение при механическом движении или одновременно и то и другое.

Сила (внешняя сила) – векторная величина, которая является мерой механического воздействия на тело со стороны другого тела.

Деформация тела – изменение размеров и формы материального тела под действием внешних сил.

Упругая деформация – деформация тела, исчезающая после снятия внешних сил.

Пластическая (остаточная) деформация – деформация, сохраняющаяся в теле после прекращения действия внешних сил.

Внутренние силы – силы взаимодействия между атомами тела, возникающие при его деформации вследствие смещения атомов из равновесных положений в узлах кристаллической решетки. Эти силы носят дискретный характер (являются дискретными переменными величинами) и имеют электромагнитную природу.

Силы упругости – внутренние силы, возникающие в теле при его упругой деформации.

Тело отсчета – тело, по отношению к которому рассматривается механическое движение прочих тел.

Система отсчета – тело отсчета вместе со связанной с ним системой координат.

Инерциальная система отсчета – система отсчета, которая может покоиться или двигаться только равномерно и прямолинейно.

Первый закон Ньютона (закон инерции³) – существуют системы отсчета, в которых всякое материальное тело сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока при воздействии со стороны других тел это состояние не изменится.

² Составлены с использованием: Макаренко Г. М. Курс общей физики : учеб. пособие / Г. М. Макаренко. – Минск: Дизайн ПРО, 2003.

³ Впервые был сформулирован Галилеем.

Инертность – свойство материальных тел сохранять состояние покоя или равномерного прямолинейного движения.

Второй закон Ньютона – ускорение, которое материальное тело приобретает в инерциальной системе отсчета, пропорционально действующей на тело силе, обратно пропорционально массе тела и по направлению совпадает с силой.

Масса – физическая величина, характеризующая инерционные и гравитационные свойства материальных тел.

Плотность – физическая величина, характеризующая для однородного тела отношение массы тела к его объему.

Третий закон Ньютона – всякое действие материальных тел друг на друга носит характер взаимодействия; силы, с которыми действуют друг на друга материальные тела, всегда равны по модулю, противоположно направлены, действуют вдоль прямой, соединяющей точки их приложения, и приложены к разным телам.

Сила тяжести – сила, с которой материальное тело притягивается к Земле.

Вес тела – сила, с которой тело, притягиваясь к Земле, действует на горизонтальную опору или натягивает нить вертикального подвеса. Вес тела равен силе тяжести, когда ускорение тела относительно Земли равно нулю.

Ускорение свободного падения – ускорение, с которым все тела падают в определенном месте под действием силы притяжения к Земле. Оно не зависит от массы тела, но зависит от высоты тела над поверхностью Земли. Вблизи поверхности Земли ускорение свободного падения примерно одинаково и равно 9.81 м/с^2 .

Механические колебания – механическое движение тела или системы тел, которое обладает повторяемостью во времени и происходит в окрестности положения равновесия.

Амплитуда колебаний тела – величина его наибольшего отклонения от положения равновесия.

Период колебаний тела – время одного полного колебания.

Частота колебаний тела – число полных колебаний, которые совершаются за одну секунду.

Краткие справочные сведения по теоретической механике,
связанные с содержанием изучаемого модуля

Абсолютно твердое тело⁴ – материальное тело, у которого под действием приложенных к нему сил не возникают деформации.

Материальная точка – частный случай тела, размеры которого малы или ими можно пренебречь по сравнению с размерами других тел или расстояниями между ними.

Кинематические состояния тела – два состояния тела: равновесие или движение определенного характера.

Равновесие тела – неподвижность (покой) тела относительно Земли.

Свободное тело – тело, которое может перемещаться в пространстве в любом направлении.

Связи тела – другие тела, с которыми соприкасается или на которые опирается рассматриваемое тело и которые ограничивают свободу его движения. Принято говорить, что связи наложены на тело.

Несвободное тело – тело, движение которого ограничено наложенными связями.

Активные силы (внешние силы) – все приложенные к телу силы, кроме сил, действующих со стороны связей.

Реактивные силы (реакции связей) – силы, с которыми связи действуют на тело. Направлены реакции всегда в сторону, противоположную той, куда связь не дает телу перемещаться.

Принцип освобожденности тел от связей – несвободное тело можно рассматривать как свободное, на которое, кроме задаваемых внешних сил, действуют реакции связей.

Динамика – раздел теоретической механики, в котором изучаются законы движения материальных тел в зависимости от действующих на них сил.

Дифференциальные уравнения движения материальной точки в декартовых осях координат – система обыкновенных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка. В декартовой системе координат такие уравнения имеют вид

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \sum F_{ix}; \\ m\ddot{y} = \sum F_{iy}; \\ m\ddot{z} = \sum F_{iz}. \end{cases}$$

⁴ В дальнейшем для краткости называемое просто тело.

Первая задача динамики материальной точки – зная массу материальной точки и уравнения ее движения, например, в декартовой системе координат

$$\begin{cases} x = f_1(t), \\ y = f_2(t), \\ z = f_3(t), \end{cases}$$

найти модуль и направление равнодействующей сил, приложенных к точке.

Вторая задача динамики материальной точки – зная силы, действующие на материальную точку, ее массу, а также начальное положение точки и ее начальную скорость, найти уравнения движения точки.

Свободные колебания материальной точки – колебания материальной точки, совершающиеся под действием восстанавливающей силы с учетом или без учета сил сопротивления движению.

Вынужденные колебания материальной точки – колебания материальной точки, совершающиеся под действием восстанавливающей силы и возмущающей силы с учетом или без учета сил сопротивления движению.

Гармонические колебания материальной точки – свободные колебания материальной точки, совершающиеся под действием линейной восстанавливающей силы.

Механическая система материальных точек (тел) – совокупность точек (тел), в которой положение или движение каждой точки (тела) зависят от положения и движения всех остальных.

Свободная механическая система материальных точек (тел) – система, в которой движение точек (тел) не ограничено никакими связями, а определяется лишь действующими на эти точки (тела) силами.

Момент инерции механической системы относительно оси – скалярная величина, равная сумме произведений масс всех точек системы на квадраты их расстояний до этой оси.

Глоссарий модуля

Система с одной степенью свободы – система, геометрическое положение которой в пространстве в любой момент времени однозначно определяется одним параметром, а движение системы под действием приложенных сил – изменением этого параметра во времени.

Эквивалентная масса – сосредоточенная масса, заменяющая распределенную массу конструкции и расположенные на ней сосредоточенные массы, связанные с размещенным на ней оборудованием, которая определяется из равенства потенциальной энергии деформации или статических прогибов.

Коэффициент жесткости – характеризует способность конструкции сопротивляться перемещениям в месте присоединения массы. Численно равен величине силы, которую нужно приложить к конструкции по направлению перемещения эквивалентной массы при колебаниях, чтобы получить перемещение равное 1.

Коэффициент податливости – характеризует способность конструкции получать перемещения. Численно равен единичному перемещению, которое возникает в конструкции по направлению перемещения эквивалентной массы при колебаниях.

Свободные колебания – колебания, совершающиеся за при отсутствии постоянного внешнего воздействия и вызванные некоторым первоначальным возмущением исходного состояния равновесия системы с одной степенью, которое характеризуется начальным смещением и начальной скоростью.

Начальные условия – параметры первоначального возмущения (начальное смещение и начальная скорость), являющиеся причиной возникновения свободных колебаний.

Период колебаний – наименьший отрезок времени, по истечении которого закон колебания повторяется.

Частота колебаний – количество полных колебаний, происходящих в единицу времени.

Круговая частота колебаний – число полных колебаний за отрезок времени, равный 2π сек.

Амплитуда колебаний – наибольшее отклонение массы от первоначального положения.

Вынужденные колебания – колебания конструкции, вызываемые и поддерживаемые некоторыми возмущающими внешними силами.

Коэффициент динамичности – коэффициент, учитывающий влияние динамического действия нагрузки на амплитудные значения параметров напряженно-деформированного состояния конструкции.