

УДК 519.6: 532.5

Обобщенная модель открытой каверны для аневризмы кровеносных сосудов

Волосова Н.К., аспирант;
Басараб М.А., профессор, д.ф. - м.н.
Московский государственный технический университет МГТУ им. Н.Э. Баумана
Волосов К.А., профессор, д.ф. - м.н., Волосова А.К., к.ф.- м.н.
МИИТ, г. Москва
Пастухов Д.Ф., к. ф.-м. н., доц., Пастухов Ю.Ф., к. ф.-м. н., доц.
Полоцкий государственный университет

Аннотация. В работе предложена гидродинамическая задача в обобщенной открытой каверне. Симметрия задачи позволяет решать ее численно на половине модели. С точки зрения математической физики задача является некорректной, так как профиль скорости на отрезке, расположенном на оси симметрии прямоугольной каверны-аневризмы не задан и находится неявно итерационным алгоритмом. Для определения скорости на оси симметрии предложены метод симметрии профиля скорости и формула для производной функции тока по координате y . Обе формулы имеют десятый порядок погрешности. Предложенная модель обобщенной открытой каверны моделирует гидродинамические явления в аневризмах кровеносных сосудов.

Ключевые слова: уравнения в частных производных, уравнения Навье-Стокса, гидродинамика, ламинарное течение.

Generalized model of an open cavity for an aneurism of vessels

Volosova N.K., Basarab M.A., Volosov K.A., Volosova A.K.,
Pastuhov D.F., Pastuhov YU.F.

Введение. Аневризма кровеносного сосуда или капилляра представляет собой утолщенный участок, соосный с сосудом, и превышает его диаметр в два раза. Очень важно, что вся наша модель симметрична относительно горизонтальной координатной оси x . То есть, входной и выходной прямоугольный канал, соединенные с прямоугольником-аневризмой, все три тела имеют общую ось симметрии x . Обозначим полуширину канала(зазора) и полуширину аневризмы Δ, H соответственно. При малых числах Рейнольдса важны силы вязкого трения. Как показано в работе [1,стр.519], можно рассматривать давление крови в капилляре постоянным по сечению, давление меняется вдоль оси x , причем, в установившемся режиме градиент давления тоже постоянный. Координата y отсчитывается от оси x вверх:

$$\Delta F_1 = S \left(\frac{dp}{dx} b \right) = 2yab \frac{dp}{dx} = -\Delta F_2 = -\mu \frac{du}{dy} 2S_2 = -\mu \frac{du}{dy} 2ab \Leftrightarrow \frac{du}{dy} = -\frac{1}{\mu} y \frac{dp}{dx} \Leftrightarrow u(y) = -\frac{y^2}{2\mu} \frac{dp}{dx} + C$$

Где: ΔF_1 - сила нормального давления, ΔF_2 - вязкого трения, μ - коэффициент вязкого трения, $\nabla p = \frac{dp}{dx}$ - градиент давления, горизонтальная скорость $u(y)$ - функция вертикальной координаты y , C -постоянная интегрирования. На границах-стенках канала скорость равна нулю $u(\pm\Delta) = 0$.

$$u(\Delta) = -\frac{\Delta^2}{2\mu} \nabla p + C = 0 \Leftrightarrow C = \frac{\Delta^2}{2\mu} \nabla p \Rightarrow u(y) = \frac{\nabla p}{2\mu} (\Delta^2 - y^2) \quad (1)$$

Из формулы(1) следует, что максимальная скорость течения Пуазейля в прямоугольном канале (Δ -полуширина зазора) достигается на оси $u_{\max} = \frac{\nabla p}{2\mu} \Delta^2$. Градиент давления ∇p в капиллярах обеспечивает сердце. В крови для 37°C $\mu = (3 - 4)10^{-3} \text{Па} \cdot \text{с}$, что примерно в 3.5-4.5 больше вязкости воды. Нам удобно выбрать начало системы координат в нижней левой вершине прямоугольника - аневризмы, то есть опустить ось x вниз на H . Из (1) получим в новой с.к.

$$u(y) = \frac{\nabla p}{2\mu} (\Delta^2 - y^2) = \frac{\nabla p \Delta^2}{2\mu} \left(1 - \frac{y^2}{\Delta^2} \right) = u_{\max} \left(1 - \frac{y^2}{\Delta^2} \right) \Leftrightarrow y' = y + H, u(y') = \begin{cases} u_{\max} \left(1 - \frac{(y'-H)^2}{\Delta^2} \right), & H - \Delta \leq y' \leq H \\ 0, & 0 \leq y' \leq H - \Delta \end{cases} \quad (2)$$

Из формулы(2) следует, что $u(H \pm \Delta) = 0$. Из формулы гидродинамики $\frac{\partial \psi}{\partial y} = u(y)$ интегрируем $u(y)$ от начала координат по левой стенке аневризмы вверх(2)

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u(y) \Leftrightarrow \psi(y) = \int_{H-\Delta}^y u(y) dy = u_{\max} \int_{H-\Delta}^y \left(1 - \frac{(s-H)^2}{\Delta^2} \right) ds = u_{\max} \int_{-\Delta}^{y-H} \left(1 - \frac{(s-H)^2}{\Delta^2} \right) d(s-H) = u_{\max} \int_{-\Delta}^{y-H} \left(1 - \frac{(z)^2}{\Delta^2} \right) dz = u_{\max} \left(z - \frac{z^3}{3\Delta^2} \right) \Big|_{-\Delta}^{y-H} = u_{\max} \left(y + \Delta - H - \frac{(y-H)^3 + \Delta^3}{3\Delta^2} \right) \Leftrightarrow \psi(y) = \begin{cases} u_{\max} \left(y + \Delta - H - \frac{(y-H)^3 + \Delta^3}{3\Delta^2} \right), & H - \Delta \leq y \leq H \\ 0, & 0 \leq y \leq H - \Delta \end{cases} \quad (3)$$

Профиль скорости Пуазейля (1) симметричен относительно оси симметрии $y=0$, то есть $\frac{\partial u(y)}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{-2\nabla p}{2\mu} y \Big|_{y=0} = 0$ и лучше всего подходит под симметричную модель. Симметрия позволяет рассматривать только половину модели и численно решать гидродинамическую задачу в ее нижней половине для

ускорения счета. Из(3) видно, что $\psi(H - \Delta) = 0$, $\psi(H) = \frac{2\Delta u_{\max}}{3}$, то есть, профиль функции тока (3) на левой и правой стенках аневризмы, а также профиль скорости (2) $u(H - \Delta) = 0$ являются непрерывными. Отметим, что формулы (2), (3) описывают уже профили в гидродинамической задаче для обобщенной прямоугольной каверны с произвольной высотой H . Ранее в работах использовалась квадратная каверна [2],[3],[4],[11],[12],[13] $H/L = 1$.

Постановка задачи. Прежде всего, перепишем все уравнения гидродинамики для открытой прямоугольной каверны при малых числах Рейнольдса [2]. Введем диффузионный масштаб времени $\tau = \frac{\Delta^2}{\nu} \sim \frac{H^2}{\nu}$ (согласно П.Роч [14,стр.33]), где $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ - кинематическая вязкость жидкости, ρ - плотность. Обозначим L, H - длины горизонтальной и вертикальной стороны половины прямоугольной каверны-аневризмы. Получим уравнения в безразмерном виде аналогично работе[2].

$T = \frac{L^2}{\nu}, u = \frac{L}{T} = \frac{\nu}{L} = u_{\max} \sim \frac{p_{\max} L^2}{\mu} = \frac{p_{\max} L}{\mu} \Leftrightarrow p_{\max} \sim \frac{\rho \nu^2}{L^2}, \psi_{\max} = u_{\max} L = \nu, w_{\max} = \frac{u_{\max}}{L} = \frac{\nu}{L^2}$ - характерные масштабы физических величин

$\bar{u} = \frac{u}{u_{\max}}, 0 \leq \bar{x} = \frac{x}{L} \leq 1, 0 \leq \bar{y} = \frac{y}{L} \leq \frac{H}{L}, \bar{p} = \frac{p}{p_{\max}}, \text{Re} = \frac{u_{\max} L}{\nu}$ - безразмерные переменные. Уравнения Навье-Стокса будут иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) &\Leftrightarrow \frac{1}{T} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \frac{u_{\max}}{L} \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) = -\frac{p_{\max}}{\rho L u_{\max}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\nu}{L^2} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) \Leftrightarrow \\ \frac{\nu}{L^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \frac{u_{\max}}{L} \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) = -\frac{p_{\max}}{\rho L p_{\max}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\nu}{L^2} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \right) &\Leftrightarrow \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \text{Re} \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \end{aligned} \quad (4)$$

Для вертикальной компоненты скорости

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \text{Re} \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \quad (5)$$

Уравнение неразрывности, связь функции скорости и функции тока, а также формула для вихря не изменятся

$$\begin{aligned} \frac{u_{\max}}{L} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) = 0 &\Leftrightarrow \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0, \frac{\psi_{\max}}{L} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{y}} = \frac{\nu}{L} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{y}} = u_{\max} \bar{u} = \frac{\nu}{L} \bar{u} \Leftrightarrow \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{y}} = \bar{u}, \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{x}} = -\bar{v}, \\ w_{\max} \bar{w} = \frac{\nu}{L^2} \bar{w} = \frac{u_{\max}}{L} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) = \frac{\nu}{L^2} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) &\Leftrightarrow \bar{w} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Уравнение связи функции тока и вихря

$$\frac{\nu}{L^2} \left(\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{y}^2} \right) = -\frac{\nu}{L^2} \bar{w} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{y}^2} = -\bar{w}. \quad (7)$$

Обезразмерим также уравнение динамики для вихря

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} + u \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + v \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} \right) &\Leftrightarrow \frac{1}{T} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} + \frac{u_{\max}}{L} \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} \right) = \frac{\nu}{L^2} \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2} \right) \Leftrightarrow \\ \frac{\nu}{L^2} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} + \frac{u_{\max}}{L} \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} \right) = \frac{\nu}{L^2} \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2} \right) &\Leftrightarrow \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} + \text{Re} \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} \right) = \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2} \end{aligned} \quad (8)$$

Объединяя уравнения(4)-(8) в систему, опуская штрихи над переменными $\bar{x} = x/L \rightarrow x, \bar{y} = y/L \rightarrow y$, получим постановку задачи для обобщенной открытой каверны, ее нижней симметричной половины. Обозначим $\bar{H} = \frac{H}{L}, \bar{\Delta} = \frac{\Delta}{L}$

$$\left\{ \begin{aligned} \psi_{xx} + \psi_{yy} &= -w(x, y), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < H/L = \bar{H} \\ w &= v_x - u_y, \quad u_x + v_y = 0 \\ u &= \psi_y; \quad v = -\psi_x, \\ w_t + \text{Re} (u \cdot w_x + v \cdot w_y) &= w_{xx} + w_{yy}, \quad t > 0 \\ u(x, 0) &\equiv 0, \quad \frac{\partial u(x, \bar{H})}{\partial y} \equiv 0, \quad x \in (0, 1), \quad u(0, \bar{H}) = u(1, \bar{H}) = 1 \\ u(0, y) = u(1, y) &= \begin{cases} \left(1 - \frac{(y - \bar{H})^2}{\bar{\Delta}^2}\right), & \bar{H} - \bar{\Delta} = (H - \Delta)/L \leq y \leq H/L = \bar{H} - \bar{\Delta} \\ 0, & 0 \leq y \leq \bar{H} - \bar{\Delta} \end{cases} \\ \psi(0, y) = \psi(1, y) &= \begin{cases} \left(y + \bar{\Delta} - \bar{H} - \frac{(y - \bar{H})^3 + \bar{\Delta}^3}{3\bar{\Delta}^2}\right), & \bar{H} - \bar{\Delta} \leq y \leq \bar{H} \\ 0, & 0 \leq y \leq \bar{H} - \bar{\Delta} \end{cases} \\ v|_{\Gamma} &\equiv 0, \quad \psi(x, 0) \equiv 0, \quad \psi(0, \bar{H}) = \psi(1, \bar{H}) = \frac{2}{3}\bar{\Delta}, \quad x \in [0, 1] \end{aligned} \right. \quad (9)$$

В отличие от модели открытой каверны с заданным значением скорости $u(x, 1) \equiv 1, x, y \in [0, 1]$ на верхнем отрезке в работах [2],[3],[4],[5],[11],[12],[13],[16], в данной работе верхним отрезком в каверне служит отрезок симметрии системы, на котором, как видно из (9) $\frac{\partial u(x, \bar{H})}{\partial y} \equiv 0, x \in (0, 1), u(0, \bar{H}) = u(1, \bar{H}) = 1$.

Условие $\frac{\partial u(x, \bar{H})}{\partial y} \equiv 0, x \in (0, 1)$ и геометрическое условие $\bar{H} = H/L \neq 1, \bar{\Delta} = \Delta/L \neq 0$ являются главными особенностями обобщенной модели аневризмы. В работах[34],[35] получена аппроксимация первых производных с 10-м порядком погрешности на симметричных шаблонах. В этой работе нужна несимметричная формула для первой производной, узлы шаблона которого находятся по одну сторону от оси симметрии. Для степенных функций $\psi_i = i^k, i, k = \overline{0, 11}$ и чисел $C_i, i = \overline{0, 11}$

$$\psi_y(0) = \frac{1}{n_2} \sum_{i=0}^{11} C_i \psi_i + O(h_2^{10}) \quad (10)$$

$$\begin{cases} \psi(y) \equiv 1: \psi'(0) = 0 \Leftrightarrow C_0 + C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5 + C_6 + C_7 + C_8 + C_9 + C_{10} + C_{11} = 0 \\ \psi(y) \equiv y: \psi'(0) = 1 \Leftrightarrow C_1 + 2C_2 + 3C_3 + 4C_4 + 5C_5 + 6C_6 + 7C_7 + 8C_8 + 9C_9 + 10C_{10} + 11C_{11} = 1 \\ \psi(y) \equiv y^2: \psi''(0) = 0 \Leftrightarrow C_1 + 4C_2 + 9C_3 + 16C_4 + 25C_5 + 36C_6 + 49C_7 + 64C_8 + 81C_9 + 100C_{10} + 121C_{11} = 0 \\ \psi(y) \equiv y^k: \psi^{(k)}(0) = 0 \Leftrightarrow C_1 + 2^k C_2 + 3^k C_3 + 4^k C_4 + 5^k C_5 + 6^k C_6 + 7^k C_7 + 8^k C_8 + 9^k C_9 + 10^k C_{10} + 11^k C_{11} = 0 \\ \forall k = \overline{3,11} \end{cases} \quad (11)$$

Решением неоднородной системы(11) СЛАУ из 12 уравнений относительно 12 неизвестных коэффициентов $C_i, i = \overline{0,11}$

$$C_0 = -\frac{83711}{27720}, C_1 = 11, C_2 = -\frac{55}{2}, C_3 = 55, C_4 = -\frac{165}{2}, C_5 = \frac{462}{5}, C_6 = -77, C_7 = \frac{330}{7}, C_8 = -\frac{165}{8}, C_9 = \frac{55}{9}, C_{10} = -\frac{11}{10}, C_{11} = \frac{1}{11} \quad (12)$$

Подставим (12) в формулу (10), изменим знак для $h_2 \rightarrow -h_2$, заменим индексы узлов шаблона $\psi_i \rightarrow \psi_{n_2-i}$, так как, например, $\psi' = \frac{\psi_2 - \psi_1}{y_2 - y_1} = \frac{\psi_2 - \psi_1}{h_2} = \frac{\psi_1 - \psi_2}{-(y_1 - y_2)} = \frac{\psi_1 - \psi_2}{(-h_2)}$ получим с учетом $u(x, \bar{H}) = \psi_y(x, \bar{H})$

$$\psi_y(n_2) = \frac{1}{(-h_2)} \left(-\frac{83711}{27720} \psi_{n_2} + 11 \psi_{n_2-1} - \frac{55}{2} \psi_{n_2-2} + 55 \psi_{n_2-3} - \frac{165}{2} \psi_{n_2-4} + \frac{462}{5} \psi_{n_2-5} - 77 \psi_{n_2-6} + \frac{330}{7} \psi_{n_2-7} - \frac{165}{8} \psi_{n_2-8} + \frac{55}{9} \psi_{n_2-9} - \frac{11}{10} \psi_{n_2-10} + \frac{1}{11} \psi_{n_2-11} \right) + O(h^{10}) \quad (13)$$

В силу симметрии задачи(9) на оси симметрии модели (верхнем отрезке каверны-аневризмы) $\frac{\partial u}{\partial v}(x, \bar{H}) = 0, \forall x \in (0,1)$. Используем и для этого условия формулу (13), заменяя функцию $\psi(x, y)$ на $u(x, y)$, выражая $u(x, \bar{H})$, получим

$$u_{n_2, n} = \left(\sum_{i=1}^{11} C_i u_{n_2-i, n} \right) / C_0 = \frac{27720}{83711} \left(11 u_{n_2-1, n} - \frac{55}{2} u_{n_2-2, n} + 55 u_{n_2-3, n} - \frac{165}{2} u_{n_2-4, n} + \frac{462}{5} u_{n_2-5, n} - 77 u_{n_2-6, n} + \frac{330}{7} u_{n_2-7, n} - \frac{165}{8} u_{n_2-8, n} + \frac{55}{9} u_{n_2-9, n} - \frac{11}{10} u_{n_2-10, n} + \frac{1}{11} u_{n_2-11, n} \right) + O(h^{10}), n = \overline{1, n_1 - 1}, u_{n_2, 0} = u_{n_2, n_1} = 1 \quad (14)$$

Запишем обобщенное краевое условие вихря А. Salih[3] (условие на случай обобщенной открытой каверны) со вторым порядком погрешности из работы [2], учтем из (3) $-\frac{\psi_{yy}}{w_{\max}} = \frac{2L}{\Delta^2}(y - H) = 2 \frac{(y - \bar{H})}{\Delta^2}$.

$$\begin{aligned} w(x, y) &= -\psi_{xx} - \psi_{yy} = \frac{1}{2h_1^2} (7\psi_0 - 8\psi_1 + \psi_2) + \frac{3\psi_x(0)}{h_1} - \psi_{yy} = \frac{1}{2h_1^2} (7\psi_0 - 8\psi_1 + \psi_2) - \frac{3v(0, y)}{h_1} - \psi_{yy}, v = -\psi_x \\ w_{m,0} &= \begin{cases} \frac{1}{2h_1^2} (7\psi_{m,0} - 8\psi_{m,1} + \psi_{m,2}) - \frac{3v_{m,0}}{h_1} + 2 \frac{(y_m - \bar{H})}{\Delta^2}, m = \overline{n_3, n_2}, y_m = mh_2, \bar{\Delta} = h_2(n_2 - n_3) & \text{left} \\ \frac{1}{2h_1^2} (7\psi_0 - 8\psi_1 + \psi_2) - \frac{3v_{m,0}}{h_1}, m = \overline{0, n_3}, \bar{H} - \bar{\Delta} = h_2 n_3, & \end{cases} \\ w_{m, n_1} &= \begin{cases} \frac{1}{2h_1^2} (7\psi_{m, n_1} - 8\psi_{m, n_1-1} + \psi_{m, n_1-2}) + \frac{3v_{m, n_1}}{h_1} + 2 \frac{(y_m - \bar{H})}{\Delta^2}, m = \overline{n_3, n_2} & \text{right} \\ \frac{1}{2h_1^2} (7\psi_{m, n_1} - 8\psi_{m, n_1-1} + \psi_{m, n_1-2}) + \frac{3v_{m, n_1}}{h_1}, m = \overline{0, n_3} & \end{cases} \\ w_{0, n} &= \begin{cases} \frac{1}{2h_2^2} (7\psi_{0, n} - 8\psi_{1, n} + \psi_{2, n}) + \frac{3u_{0, n}}{h_2}, n = \overline{0, n_1}, u = \psi_y & \text{bottom} \\ \frac{1}{2h_2^2} (7\psi_{n_2, n} - 8\psi_{n_2-1, n} + \psi_{n_2-2, n}) - \frac{3u_{n_2, n}}{h_2}, n = \overline{0, n_1}, & \text{top} \end{cases} \end{aligned} \quad (15)$$

Из той же работы[2] можно использовать обобщенное краевое условие для функции вихря в открытой каверне с четвертым порядком погрешности(16).

$$\begin{aligned} w(x, y) &= -\psi_{xx} - \psi_{yy} = \frac{1}{h_1^2} \left(\frac{415}{72} \psi_0 - 8\psi_1 + 3\psi_2 - \frac{8}{9} \psi_3 + \frac{1}{8} \psi_4 \right) - \frac{25 v(0, y)}{6 h_1} - \psi_{yy}, v = -\psi_x \\ & \quad m = \overline{0, n_2}, y_m = mh_2, \bar{\Delta} = h_2(n_2 - n_3), \bar{H} - \bar{\Delta} = h_2 n_3 \\ w_{m,0} &= \begin{cases} \frac{1}{h_1^2} \left(\frac{415}{72} \psi_{m,0} - 8\psi_{m,1} + 3\psi_{m,2} - \frac{8}{9} \psi_{m,3} + \frac{1}{8} \psi_{m,4} \right) - \frac{25 v_{m,0}}{6 h_1} + 2 \frac{(y_m - \bar{H})}{\Delta^2}, m = \overline{n_3, n_2} & \text{left} \\ \frac{1}{h_1^2} \left(\frac{415}{72} \psi_{m,0} - 8\psi_{m,1} + 3\psi_{m,2} - \frac{8}{9} \psi_{m,3} + \frac{1}{8} \psi_{m,4} \right) - \frac{25 v_{m,0}}{6 h_1}, m = \overline{0, n_3} & \end{cases} \\ w_{m, n_1} &= \begin{cases} \frac{1}{h_1^2} \left(\frac{415}{72} \psi_{m, n_1} - 8\psi_{m, n_1-1} + 3\psi_{m, n_1-2} - \frac{8}{9} \psi_{m, n_1-3} + \frac{1}{8} \psi_{m, n_1-4} \right) + \frac{25 v_{m, n_1}}{6 h_1} + 2 \frac{(y_m - \bar{H})}{\Delta^2}, m = \overline{n_3, n_2} & \text{right} \\ \frac{1}{h_1^2} \left(\frac{415}{72} \psi_{m, n_1} - 8\psi_{m, n_1-1} + 3\psi_{m, n_1-2} - \frac{8}{9} \psi_{m, n_1-3} + \frac{1}{8} \psi_{m, n_1-4} \right) + \frac{25 v_{m, n_1}}{6 h_1}, m = \overline{0, n_3} & \end{cases} \\ w_{0, n} &= \begin{cases} \frac{1}{h_2^2} \left(\frac{415}{72} \psi_{0, n} - 8\psi_{1, n} + 3\psi_{2, n} - \frac{8}{9} \psi_{3, n} + \frac{1}{8} \psi_{4, n} \right) + \frac{25 u_{0, n}}{6 h_2}, n = \overline{0, n_1}, u = \psi_y & \text{bottom} \\ \frac{1}{h_2^2} \left(\frac{415}{72} \psi_{n_2, n} - 8\psi_{n_2-1, n} + 3\psi_{n_2-2, n} - \frac{8}{9} \psi_{n_2-3, n} + \frac{1}{8} \psi_{n_2-4, n} \right) - \frac{25 v_{n_2, n}}{6 h_2}, n = \overline{0, n_1}, & \text{top} \end{cases} \end{aligned} \quad (16)$$

Инициализация задачи(9).

Аналогично работе[2], с учетом профиля Пуазейля (2) определим начальное поле безразмерной горизонтальной скорости $u(x, y) \equiv u_0(y)$

$$u(x_n, y_m) = u_0(y_m) = \begin{cases} 1 - \frac{(y_m - \bar{H})^2}{\Delta^2}, \bar{H} - \bar{\Delta} \leq y_m \leq \bar{H}, m = \overline{n_2 - n_3, n_2}, x_n = nh_1, y_m = mh_2, n = \overline{0, n_1} \\ 0, 0 \leq y_m \leq \bar{H} - \bar{\Delta}, m = \overline{0, n_2 - n_3}, (n_2 - n_3)h_2 = \bar{H} - \bar{\Delta}, n_2 h_2 = \bar{H} \end{cases} \quad (17)$$

Таким образом, во всех точках нижней части каверны ($0 \leq y \leq \bar{H} - \bar{\Delta}$) жидкость в начальный момент времени неподвижна. В слое $\bar{H} - \bar{\Delta} \leq y \leq \bar{H}$, поле горизонтальной скорости квадратично, непрерывно, сравним (17) с инициализацией в работе[16], где вся начальная жидкость неподвижна. Для построения поля линий тока[2] по полю скорости использовалась линейная аппроксимация его значений в любой точке по значениям скорости в 4 узловых точках окружающих данную точку $(x_n, y_m), (x_{n+1}, y_m), (x_n, y_{m+1}), (x_{n+1}, y_{m+1})$, $x_n \leq x \leq x_{n+1}, y_m \leq y \leq y_{m+1}$:

$$\begin{cases} u(x, y) = \left(u_{m, n} \frac{(x_{n+1} - x)}{h_1} + u_{m, n+1} \frac{(x - x_n)}{h_1} \right) \frac{(y_{m+1} - y)}{h_2} + \left(u_{m+1, n} \frac{(x_{n+1} - x)}{h_1} + u_{m+1, n+1} \frac{(x - x_n)}{h_1} \right) \frac{(y - y_m)}{h_2} \\ v(x, y) = \left(v_{m, n} \frac{(x_{n+1} - x)}{h_1} + v_{m, n+1} \frac{(x - x_n)}{h_1} \right) \frac{(y_{m+1} - y)}{h_2} + \left(v_{m+1, n} \frac{(x_{n+1} - x)}{h_1} + v_{m+1, n+1} \frac{(x - x_n)}{h_1} \right) \frac{(y - y_m)}{h_2} \end{cases} \quad (18)$$

Дифференциал дуги линии тока определяется по найденному полю скоростей $u^{n_0}(x_n, y_m) \equiv u_{m,n}^{n_0}, v_{m,n}^{n_0}$, $m = \overline{1, n_2 - 1}, n = \overline{1, n_1 - 1}$ на конечном временном слое n_0 дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{u(x,y)} = \frac{dy}{v(x,y)} \quad (19)$$

Используя(18),(19), получим связь соседних точек линии тока (h_3 - дифференциал дуги линии тока ограничен шагом основной равномерной сетки $h_3 < h_1, h_3 < h_2$) по формуле

$$x^{l+1} = x^l + h_3 \frac{u(x,y)}{\sqrt{u(x,y)^2 + v(x,y)^2}}, y^{l+1} = y^l + h_3 \frac{v(x,y)}{\sqrt{u(x,y)^2 + v(x,y)^2}}, l = 1, 2, \dots \quad (20)$$

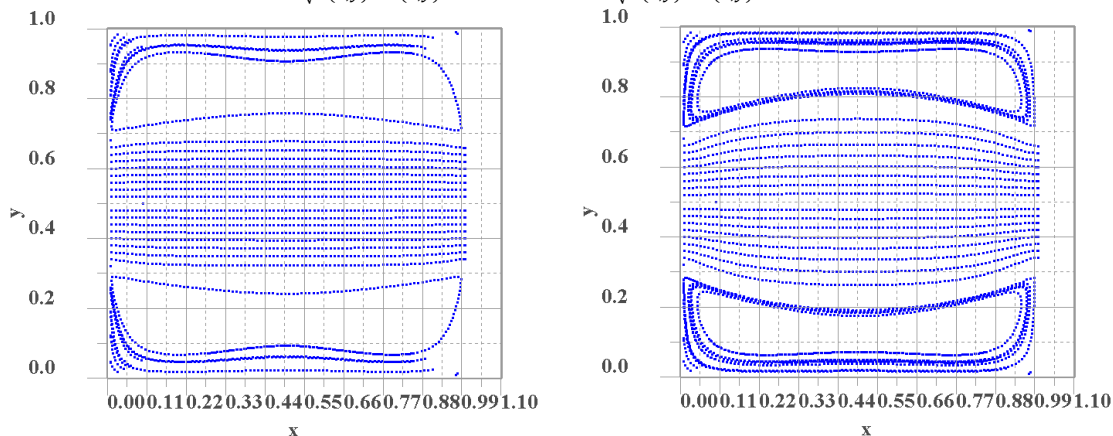


Рис. 1. Поле линий тока, $Re=0.1, \Delta/H = 2/5$. а) 500 итераций, б) 4500 итераций по формуле (13)

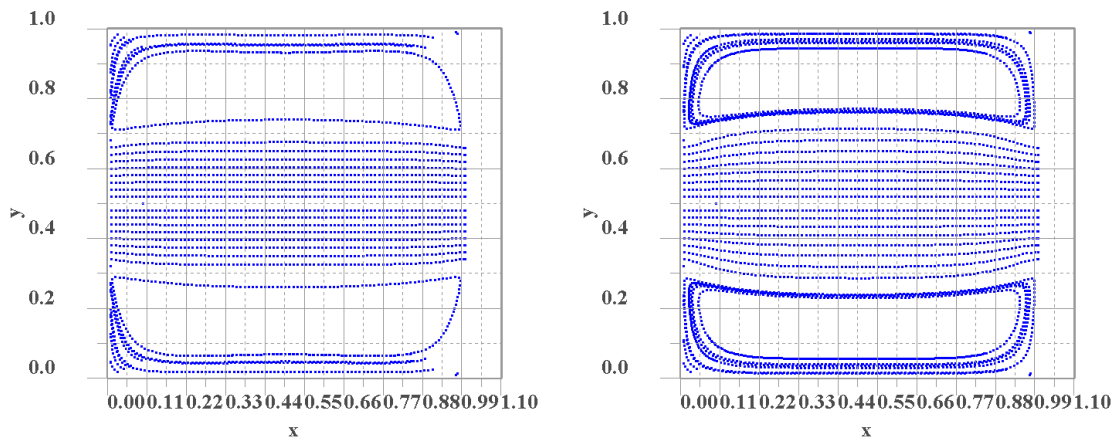


Рис. 2. Поле линий тока, $Re=0.1, \Delta/H = 2/5$. а) 500 итераций, б) 10000 итераций по формуле (14)

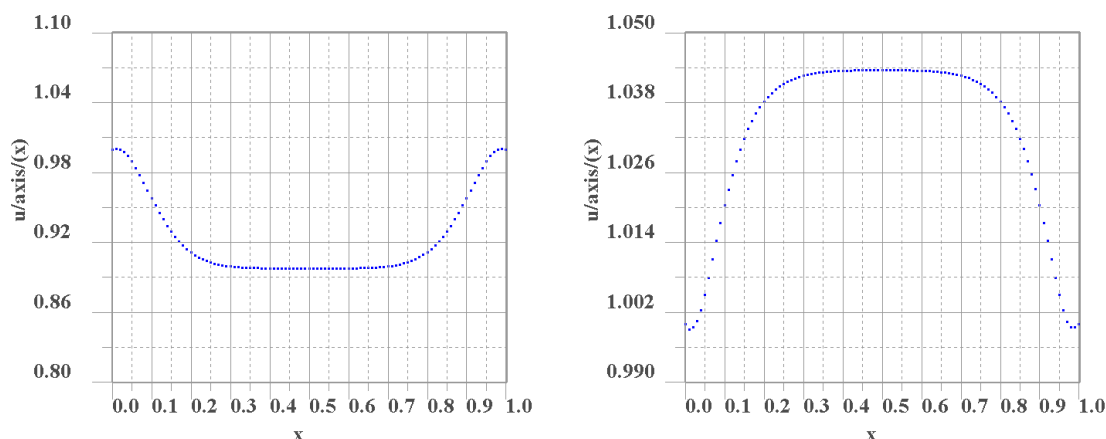


Рис. 3. а) Профиль скорости на оси симметрии по (13)-4500 итераций.
 б) Профиль скорости на оси по формуле (14)-10000 итераций. $Re=0.1, \Delta/H = 2/5$

На рисунках 1-3 представлены численные решения задачи(9) с использованием скорости на верхнем отрезке через функцию тока (13) и условие симметрии профиля скорости по формуле (14). На рисунках 1 и 2 в стационарных полях линий тока (с использованием формул(18)-(20)) видны большие вихри, занимающие весь объем выступающей части аневризмы-каверны над плоским каналом. В случае осевой симметрии мы увидим два среза - это срезы одного тороидального вихря примыкающего к образующим стенкам цилиндрической аневризмы (задача решена для $Re=0,1$).

Сравним поля линий тока с краевыми условиями для скорости по формулам (13) и (14). Начальная динамика для поля линий тока одинакова (рисунки Рис. 1 а) и Рис. 2 а) почти неразличимы.

Стационарные течения с использованием формул (13) и (14) (Рис. 1 b)-4500 временных шагов и Рис. 2 b)-10000 временных шагов) обнаруживают небольшие различия в несколько процентов.

Также обнаруживают различия профили скорости на оси симметрии аневризмы (Рис. 3 а) и Рис. 3 б). На Рис.3 а) средняя скорость на оси аневризмы ($\Delta/H = 2/5$) по формуле (13) на 5-8% меньше единицы, чем на оси кровеносного сосуда. А средняя скорость на оси аневризмы на Рис. 3 б) с формулой(14) на 2-3% больше единицы, чем на оси кровеносного сосуда. Это различие нетрудно объяснить. На Рис. 1 б) средний размер сечения области ламинарного течения крови (в области, где нет вихрей) на 5% больше, чем на Рис. 2 б), то есть площадь сечения в первом случае больше на 5% чем с использованием формулы(14). Тогда и средняя скорость на оси аневризмы, по формуле(13), должна быть меньше средней скорости на оси по формуле(14).

Видим, что противоречий в решениях для поля линий тока и осевой скорости ни с учетом формулы(13), ни с учетом формулы(14) нет.

В данной работе, как и в работе[7], выбран временной шаг $\tau = z_2 \cdot h^2 \text{Re}$, $z_2 = \frac{1}{6}$. Можно показать для параметра $z_2 = \frac{1}{6}$ уравнение (8) имеет аппроксимацию $O(h^4 + \tau^2)$. Настоящая работа связана с работами [5], [6],[7],[8],[9],[10],[11],[12],[15],[17],[18],[19],[20],[21],[22],[23],[24],[25],[26],[27],[28],[29],[30],[31],[32],[33].

Литература:

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Том 1. Механика: Учеб. Пособие для вузов.- 3-е изд., испр. и доп. - М.:Наука. Гл. ред. физ. мат. лит. 1989. - 576 с. - ISBN 5-02-014054-6.
2. Волосова Н.К. Нестационарная гидродинамическая задача в открытой прямоугольной каверне// Евразийское Научное Объединение. -2021. № 3-1 (73). С. 16-21.
3. Волосова Н.К., Басараб М.А., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. О роли профиля скорости на верхнем отрезке в гидродинамической задаче для прямоугольной каверны// Евразийское Научное Объединение. - 2020. № 5-1 (63). С. 11-17.
4. Волосова Н.К. Возможные виды течения в закрытой каверне и противоречия в задаче с подвижной крышкой// Евразийское Научное Объединение. - 2020. № 12-1 (70). С. 4-14.
5. Волосова Н.К., Басараб М.А., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Вычисление поля давления по полю скорости в гидродинамической задаче для прямоугольной каверны// Евразийское Научное Объединение. - 2020. № 9-1 (67). С. 1-8.
6. Волосова Н.К., Басараб М.А., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Модифицированное разностное уравнение К.Н. Волкова для уравнения Пуассона на прямоугольнике с четвертым порядком погрешности// Евразийское Научное Объединение. - 2020. № 6-1 (52). С. 4-11.
7. Волосова Н.К. О нестационарном уравнении диффузии с полной производной по времени на прямоугольнике// Евразийское Научное Объединение. -2021. № 1-1 (71). С. 9-14.
8. Волосова Н.К. О решении уравнения Пуассона на прямоугольнике с шестым порядком погрешности за конечное число элементарных операций// Евразийское Научное Объединение. -2020. № 3-1 (61). С. 20-27.
9. Волосова Н.К. О решении уравнения Пуассона на прямоугольнике с четвертым порядком погрешности за конечное число элементарных операций// Евразийское Научное Объединение. -2020. № 2-1 (60). С. 11-17.
10. Волосова Н.К. Конечные методы решения уравнения Пуассона на произвольном прямоугольнике с краевым условием Дирихле// Евразийское Научное Объединение. -2020. № 5-1 (63). С. 17-28.
11. Волосова Н.К. Мягкие краевые условия в гидродинамической задаче для профиля скорости в открытой прямоугольной каверне// Евразийское Научное Объединение. -2021. № 5-1 (75). С. 9-14.
12. Волосова Н.К., Басараб М.А., Волосова А.К., Зайцев В.Ф. Волосов К.А., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Этап конструирования математической модели аневризмы. Течения в каверне и противоречия в задаче в "закрытой" кювете//В сборнике: Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования . Материалы 74-й научной конференции "Герценовские чтения 2021". Сакт-Петербург, 2021. С. 208-213.
13. A. Salih Streamfunction - Vorticity Formulation//Department of Aerospace Engineering Indian Institute of Space Science and Technology, Thiruvananthapuram-Mach 2013. p.10.
14. П. Роуч. Вычислительная гидродинамика. Мир. Москва. 1980. 597 с.
15. Волосова Н.К., Пастухов Д.Ф., Волосов К.А. Методы расширения области применения методов математической физики//Международная конференция "Квазилинейные уравнения и обратные задачи". QIPA conference handbook and proceedings. - М.: МФТИ, 2018. - С 20.
16. Фомин А.А., Фомина Л.Н. Численное моделирование течения жидкости в плоской каверне при больших числах Рейнольдса//Вычислительная механика сплошных сред,2014.Т.7.№4.С 363-377.
17. Волосов К.А., Данилов В.Г., Колобов Н.А., Маслов В.П. Доклады академии наук СССР. 1986. Т.33. С. 517.
18. Danilov V.G., Maslov V.P., Volosov K.A. Mathematical modeling of heat and mass transfer//Originally published in Russian/Dordrecht,1995.
19. Волосов К.А. Одевание решений для некоторых неинтегрируемых задач и некоторые инвариантные свойства анзаца метода Хироты//Дифференциальные уравнения. 2005. Т 41.№ 11.С. 1572-1575.
20. Волосов К.А. О собственных функциях структур, описываемых моделью "мелкой воды" на плоскости// Фундаментальная и прикладная математика. 2006. Т. 12.№ 6. С. 17-32.

21. Волосов К.А. Построение решений квазилинейных параболических уравнений в параметрическом виде // Дифференциальные уравнения, 2007, Т.43, №.4., С.492-497.
22. Волосов К.А. Новый метод построения решений уравнений с частными производными в параметрической форме // Известия Российского государственного педагогического университета им. А.И. Герцена. 2007. Т.7. № 26. С. 13-20.
23. Волосов К.А. Конструкция решений квазилинейных уравнений с частными производными // Сибирский журнал индустриальной математики 2008, т.11, н.2(34), С. 29-39
24. В.П. Маслов, В.Г. Данилов, К.А. Волосов. Математическое моделирование процессов тепломассопереноса (эволюция диссипативных структур). С добавлением Н.А. Колобова, - М.:Наука, 1987, 352 с.
25. Атаулаханов Ф.И., Гурия Г.Т., Сорочкина А.Ю. Пространственные аспекты динамики свёртывания крови. Феноменологическая модель.
26. Волосов К.А., Вдовина Е.К., Пугина Л.В. Моделирование «пульсирующих» режимов динамики свёртывания крови. Математическое моделирование. 2014, т 26, н.12, с. 14-32.
27. Зайцев В. Ф., Полянин А.Д. Справочник. Дифференциальные уравнения с частными производными. Международная программа образования 1996.
28. The role of aeration in forming the thermal regime of a geothermal lake. Anisimova E.P., Pastukhov D.F., Speranskaya A.A., Speranskaya O.A. // Izvestiya. Atmospheric and Oceanic Physics. 1996. Т 32. № 2. С. 268-272.
29. Волосова Н.К., Басараб М.А., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф. Изучение биологически мотивированной математической модели предстательной железы // Евразийское Научное Объединение. -2021. № 6-1 (76). С. 6-21.
30. Вакуленко С.П., Волосова Н.К., Пастухов Д.Ф. Способы передачи QR-кода в стеганографии / С.П. Вакуленко, Н.К. Волосова, Д.Ф. Пастухов // Мир транспорта. - 2018. Т.16. № 5(78). С. 14-25.
31. Пастухов Д.Ф., Волосова Н.К., Волосова А.К. Некоторые методы передачи QR-кода в стеганографии / Д.Ф. Пастухов, Н.К. Волосова, А.К. Волосова // Мир транспорта. - 2019. Т.17. № 3(82). С. 16-39.
32. Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Карлов М.И., Пастухов Д.Ф., Пастухов Ю.Ф. Модифицированная формула Ньютона – касательных парабол на комплексной плоскости // Евразийское Научное Объединение. -2021. № 6-1 (76). С. 21-27.
33. Пастухов Ю.Ф., Волосова Н.К., Волосов К.А., Волосова А.К., Пастухов Д.Ф., Пастухов А.Ю. Теорема о связи чисел Кармайкла с функцией Кармайкла // Евразийское Научное Объединение. -2021. № 6-1 (76). С. 50-53.
34. Волосова Н.К. Вычисление производных дробного порядка с высокой степенью точности // Евразийское Научное Объединение. - 2020. № 11-1 (69). С. 1-9.
35. Волосова Н.К. Вычисление производных дробного порядка, принимающего значения на интервале (0,1), с высокой степенью точности // Евразийское Научное Объединение. -2021. № 2-1 (72). С. 30-37.
36. Пастухов Ю.Ф. Пастухов Д.Ф., Карлов М.И., Пастухов А.Ю. Тензор многомерного обобщенного 0-импульса 1-го ранга // Евразийское Научное Объединение. -2021. № 2-1 (72). С. 43-48.
37. Пастухов Ю.Ф. Пастухов Д.Ф. Тензор Эйлера-Лагранжа в расслоении (преобразование многомерного обобщенного 0-импульса) // Евразийское Научное Объединение. -2020. № 12-1 (70). С. 4-14.