УДК 621.192

ОБЗОР ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН ПРИ РАСЧЕТАХ НАДЕЖНОСТИ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

канд. техн. наук, доц. В.Э. ЗАВИСТОВСКИЙ (Полоцкий государственный университет)

Представлен обзор применяемых законов распределения случайных величин в параметрических моделях надежности и качества технических систем.

Введение. При анализе надежности технических систем объектом исследования являются случайные события и величины. Случайные величины в зависимости от их физического смысла могут иметь различные законы распределения. В теории вероятностей известно большое число таких законов [3, 10, 14, 21, 39]. Задавшись законом распределения случайной величины, можно получить исчерпывающую информацию о поведении этой случайной величины. Под случайной величиной будем понимать величину, которая в результате эксперимента может принимать то или иное значение, причем неизвестно заранее, какое именно. Случайная величина может быть либо дискретной, либо непрерывной. Для характеристики случайной величины используется вероятность того, что случайная величина X меньше некоторой текущей переменной x. В теории надежности за случайную величину обычно принимают время работы объекта t (время до возникновения отказа). Соотношения, устанавливающие связь между значениями случайной величины и их вероятностями, принято называть законами распределения случайной величины. Тогда функция распределения принимает вид:

$$F(t) = P(t < t_{зад}) = Q(t); \tag{1}$$

плотность распределения:

$$f(t) = \frac{dQ(t)}{dt}; \tag{2}$$

вероятность безотказной работы за время t:

$$P(t) = 1 - Q(t); \tag{3}$$

интенсивность отказов:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{P(t)}. \tag{4}$$

Математические модели надежности представляют собой законы распределения и, являясь в значительной мере идеализацией реальных законов надежного функционирования технических систем, в то же время позволяют эффективно использовать представленную ими информацию.

Распределения, применяемые в качестве моделей надежности, бывают дискретными и непрерывными. Особенности дискретных и непрерывных распределений, применяемых в параметрических моделях надежности, заключаются в том, что различие в условиях эксплуатации или проведения экспериментов довольно часто меняет рекомендованный закон распределения. Число механических систем весьма велико и постоянно продолжает увеличиваться, поэтому возникает потребность в корректировке некоторых зависимостей.

Распределения дискретных случайных величин. Дискретные распределения описывают случайные величины, которые принимают конечное или счетное множество значений. Примером такого рода случайных величин может служить число объектов, безотказно работающих в течение времени t, число отказов, наблюдаемых при испытании рабочих характеристик машины, число единиц оборудования, прибывшего на ремонтное предприятие в данный день и др.

1. Биномиальный закон [11, 15, 46]. Если вероятность появления события A в одном испытании равно p; вероятность непоявления события A: $q = 1 - p$; число независимых испытаний равно m , то вероятность появления n событий в испытаниях будет:

$$P_m^n = C_m^n p^n (1-p)^{m-n}, \tag{5}$$

где C_m^n – число сочетаний из m по n .

Биномиальное распределение находит применение в теории надежности, при статистическом контроле качества, выборочном обследовании и в других областях.

2. Мультиномиальный закон [49]. Является простым обобщением биномиального распределения, когда случайная величина может принимать некоторое конечное число k значений. Если вероятность каждого из значений равна p_i, то $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$; при n испытаниях количество исходов соответственно равны $\upsilon_1, \upsilon_2 \dots \upsilon_n$, а $\sum_{i=1}^{k} \upsilon_k = n$.

Тогда мультиномиальное распределение определяет совместную вероятность:

$$p\ (\upsilon_1 = n_1;\ \upsilon_2 = n_2 \dots \upsilon_k = n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!} P_1^{n_1} P_2^{n_2} \dots P_k^{n_k}. \quad (6)$$

Важным применением мультиномиального распределения могут быть случаи, когда отказ является параметрическим, т.е. рассматривается как объединение k взаимно независимых событий, состоящих в недопустимом изменении значений k параметров.

3. Геометрическое распределение [25, 49]. Возникает в ситуациях, аналогичных биномиальным распределениям. Вероятность количества испытаний, в которых произойдет l отказов:

$$P(\upsilon = l) = \binom{l-1}{n-1} p^l q^{n-1}. \quad (7)$$

4. Гипергеометрическое распределение [25, 49]. Применяется для определения надежности объектов при выборочном контроле качества. При извлечении выборки объема r из совокупности n объектов вероятность

$$P(r_1 = k) = \frac{\binom{n_1}{k}\binom{n-n_2}{r-k}}{\binom{n}{r}}, \quad (8)$$

где r_1 – число годных объектов в случайной выборке r, производимой без возвращения изделий; n_1 – годные, а n_2 – дефектные изделия.

5. Распределение Паскаля [49]. Определяет вероятность того, что при проведении независимых многократно повторяемых испытаний (испытания Бернулли), каждое с вероятностью успеха p, то при вероятности появления ровно s успешных исходов произойдет x неудачных исходов. Распределение Паскаля имеет вид:

$$f(x;\ s, p) = \binom{x+s-1}{x} p^s (1-\mathrm{p})^x;\ x = 0, 1, 2,\dots;\ s = 1, 2, \dots;\ 0 \le p \le 1. \quad (9)$$

Геометрическое распределение является частным случаем распределения Паскаля при $s = 1$. Обобщенное распределение Паскаля на случай, когда s не является целым числом и факториалы в формуле (9) заменяются гамма-функциями, называется отрицательным биномиальным распределением.

6. Закон Пуассона [15, 43, 46, 49]. Это распределение описывает число событий, происходящих в одинаковых промежутках времени или на одинаковых отрезках пространства при условии, что события происходят независимо друг от друга с постоянной средней интенсивностью (например, когда появление дефектов в веществе более вероятно при одних условиях, чем при других). Вероятность возникновения случайного события n раз за время τ

$$P_n(\tau) = \frac{(\lambda\tau)^n}{n!} e^{-\lambda\tau}, \quad (10)$$

где λ – интенсивность случайного события.

Законы распределения непрерывных случайных величин. В отличие от дискретных, непрерывные случайные величины могут принимать любое значение в одном или большом числе интервалов.

1. Нормальное распределение [1, 5, 15, 16, 19, 25, 34, 36, 38, 41, 45, 46, 47, 49]. Нормальное распределение находит широкое применение при решении различных прикладных вероятностно-статистических задач. Оно является предельной формой многочисленных распределений. Этому закону подчиняются, например, ошибки измерения, высота микронеровностей на поверхности, колебание размеров при станочной обработке и др.

Функция стандартного нормального распределения определяется так:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt. \tag{11}$$

2.Усеченное нормальное распределение [2, 17]. Плотность и функция усеченного нормального распределения находятся из выражений:

$$f(x) = \frac{c}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma_1^2}\right], \; a \le x \le b,$$

$$F(x) = c\left[\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma_1}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma_1}\right)\right], \tag{12}$$

где $c = \left[\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma_1}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma_1}\right)\right]^{-1}$, a, b, μ, σ_1 – параметры распределения.

3. Равномерное распределение [16, 34, 38]. Этим законом описывается распределение фазы случайного колебания, ошибки округления, ошибки измерения. Равномерное распределение часто используется при статистическом моделировании как базовое, на основе которого могут быть получены случайные числа. Это распределение используется, когда случайная величина X распределена на конечном интервале.

Если область значений случайной величины $a \le x \le b$, то плотность и функция распределения имеют вид:

$$f(x) = \frac{1}{b-a},$$

$$F(x) = \frac{x-a}{b-a}. \tag{13}$$

Равномерное распределение рекомендуется использовать в тех случаях, когда известен только интервал изменения случайной величины.

4. ***Распределение Симпсона*** [17]. Это распределение широко используется в теории ошибок. Распределение суммы двух независимых равномерно распределенных случайных величин описывается распределением Симпсона.

Для случайной величины X, изменяющейся в интервале $a \le x \le b$ плотность и функция распределения имеют вид:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < a, \\ \dfrac{4(x-a)}{(b-a)^2}, & a < x < \dfrac{a+b}{2}, \\ \dfrac{4(b-x)}{(b-a)^2}, & \dfrac{a+b}{2} < x < b, \\ 0, & b < x < \infty, \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < a, \\ \dfrac{2(x-a)^2}{(b-a)^2}, & a < x < \dfrac{a+b}{2}, \\ 1-\dfrac{2(b-x)^2}{(b-a)^2}, & \dfrac{a+b}{2} < x < b, \\ 1, & b < x < \infty; \end{cases} \tag{14}$$

5. Логарифмически нормальное распределение [16, 18, 22, 34, 38, 45, 49]. Это распределение имеет случайная величина, логарифм которой распределен нормально. Плотность и функция распределения определяются из выражений:

$$f(x)=\frac{1}{xb\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2b^2}\right],$$
$$F(x)=\Phi\left(\frac{\ln x-\mu}{b}\right),\qquad x\geq 0. \tag{15}$$

6. Экспоненциальное распределение [2, 11, 16, 25, 34 – 36, 38, 41, 45, 46, 47, 49]. Плотность и функция распределения имеют вид

$$f(x)=\lambda\exp(-\lambda x),\qquad x\geq 0,$$
$$F(x)=1-\exp(-\lambda x), \tag{16}$$

где параметр λ представляет собой интенсивность отказов.

Экспоненциальное распределение является частным случаем гамма-распределения, распределений Вейбулла и Эрланга.

7. Распределение Рэлея [16, 34, 38, 46, 49]. Этот закон отражает распределение величин, характеризующихся их абсолютными значениями (например, эксцентриситет, биение, разностенность, непараллельность, неперпендикулярность и др.). Область изменения случайной величины $x\geq 0$, плотность и функция распределения описываются выражениями:

$$f(x)=\frac{x}{b^2}\exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right),$$
$$F(x)=1-\exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right). \tag{17}$$

Распределение Рэлея является частным случаем распределения Вейбулла и распределений Райса для максимумов (минимумов) нормального стационарного процесса.

8. Обобщенный закон Рэлея – Райса [17]. Область изменения случайной величины $x\geq 0$, плотность и функция распределения описываются выражениями:

$$f(x)=\frac{x}{b^2}\exp\left(-\frac{x^2+a^2}{b^2}\right)J_0\left(\frac{ax}{b^2}\right),\quad F(x)=\exp\left(-\frac{a^2}{2b^2}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x}{(k!)^2}\left(\frac{a^2}{2b^2}\right)^k\Gamma\left(k+1,\frac{x^2}{2b^2}\right). \tag{18}$$

Обобщенный закон Рэлея применяется в радиотехнике для описания распределения огибающей смеси высокочастотного сигнала и шума.

9. Обобщенное распределение Рэлея [40]. Плотность и функция обобщенного распределения Рэлея определяются из выражений:

$$f(t)=2(t+\alpha)\exp(-t^2-2t\alpha),$$
$$F(t)=1-\exp\left(-t^2-2\alpha\right),\qquad t=\frac{x-c}{b}, \tag{19}$$

где α, c, b – параметры распределения.

10. Модифицированное распределение Рэлея. Интервал изменения случайной величины $x\geq 0$, плотность и функция распределения описываются выражениями [48]:

$$f(x)=\frac{\rho x^{2\rho-1}}{b^2}\exp\left(-\frac{x^{2\rho}}{2b^2}\right),$$
$$F(x)=1-\exp\left(-\frac{x^{2\rho}}{2b^2}\right),\qquad \rho>0, b>0. \tag{20}$$

При $\rho=0{,}5$ это распределение переходит в экспоненциальное, при $\rho=1$ – в распределение Рэлея.

11. Распределение Вейбулла [2, 8, 11, 13, 6, 25, 26, 30, 32, 34, 36, 38, 45, 47]. В теории надежности распределение Вейбулла широко используется для описания временной безотказной работы элементов технических устройств. Плотность и функция трехпараметрического распределения Вейбулла описываются выражениями:

$$\begin{aligned} f(x) &= \delta\lambda(x-x_0)^{\delta-1}\exp\left[-\lambda(x-x_0)^{\delta}\right], \quad x \ge x_0, \\ F(x) &= 1-\exp\left[-\lambda(x-x_0)^{\delta}\right], \quad x \ge x_0, \end{aligned} \tag{21}$$

где δ, λ, x_0 – параметры распределения.

12. Распределение Накагами [34]. Область изменения случайной величины $x \ge 0$, тогда плотность и функция распределения описываются выражениями:

$$f(x) = \frac{2m^m x^{2m-1}}{\Gamma(m) b^{2m}} \exp\left(-\frac{mx^2}{b^2}\right), \tag{22}$$

$$F(x) = \frac{\Gamma\left(m, \dfrac{mx^2}{b^2}\right)}{\Gamma(m)}, \quad m \ge \frac{1}{2}.$$

13. Распределение Максвелла [34]. Область изменения случайной величины $x \ge 0$, плотность и функция распределения определяются выражениями:

$$f(x) = \frac{4}{\pi^{1/2}(2b^2)^{3/2}} x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2b^2}\right), \tag{23}$$

$$F(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{x^2}{2b^2}\right),$$

где $\Gamma(\alpha, \beta)$ – неполная гамма-функция.

Законом Максвелла описывается распределение скорости молекул идеального газа.

14. Гамма-распределение [22, 34, 36, 38, 45, 49]. Случайная величина изменяется в интервале $x \ge 0$. Плотность и функция распределения имеют вид:

$$f(x) = \frac{\lambda^{\alpha} x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x}, \quad \alpha > 0, \lambda > 0, \tag{24}$$

$$F(x) = \frac{\Gamma(\alpha, x\lambda)}{\Gamma(\alpha)}.$$

Гамма-распределение часто используется для аппроксимации времени безотказной работы устройств.

15. Однопараметрическое гамма-распределение [34]. Область изменения случайной величины $x \ge 0$, плотность и функция распределения описываются выражениями:

$$f(x) = \frac{\gamma^{\gamma}}{\Gamma(\gamma)} x^{\gamma-1} e^{-\gamma x}, \tag{25}$$

$$F(x) = \frac{\Gamma(\gamma, \gamma x)}{\Gamma(\gamma)}.$$

Это распределение получается из гамма-распределения при $\lambda = \alpha = \gamma$.

16. Обобщенное гамма-распределение [23, 49]. Если отказ системы, состоящей из n элементов, наступает в случае отказа m элементов, плотность распределения времени безотказной работы системы имеет вид:

$$f(t) = \frac{\lambda^{\alpha}\delta t^{\alpha\delta-1}}{\Gamma(\alpha)}\exp(-\lambda t^{\delta}), \tag{26}$$

где α, δ, λ – параметры распределения.

Функция обобщенного гамма-распределения выражается через неполную гамма-функцию:

$$F(t) = \frac{\Gamma(\alpha, \lambda t^{\delta})}{\Gamma(\alpha)}.$$

17. Распределение Эрланга [11, 22, 34, 49]. Случайная величина изменяется в интервале $x \geq 0$. Плотность и функция распределения записываются так:

$$f(x) = \frac{\lambda(x\lambda)^{k-1}\exp(-x\lambda)}{(k-1)!},$$

$$F(x) = 1 - \exp(-x\lambda)\left[\sum_{l=0}^{k-1}\frac{(x\lambda)^{l}}{l!}\right]. \tag{27}$$

При $k = 1$ распределение Эрланга переходит в экспоненциальное. Распределение Эрланга является частным случаем гамма-распределения, когда α – целое число.

18. Бета-распределение [34, 49]. Область изменения случайной величины $0 < x \leq 1$. Плотность вероятности и функция распределения описываются выражениями:

$$f(x) = \frac{x^{\upsilon-1}(1-x)^{\omega-1}}{B(\upsilon,\omega)},$$

$$F(x) = \frac{1}{B(\upsilon,\omega)}\int_{0}^{x} y^{\upsilon-1}(1-y)^{\omega-1}dy, \tag{28}$$

где $B(\upsilon,\omega) = \frac{\Gamma(\upsilon)\Gamma(\omega)}{\Gamma(\upsilon+\omega)}$.

19. Обобщенное бета-распределение [48, 49]. Область изменения случайной величины $a \leq x \leq b$. Плотность и функция распределения описываются выражениями:

$$f(x) = \frac{1}{(b-a)B(\upsilon,\omega)}\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\upsilon-1}\left(1-\frac{x-a}{b-a}\right)^{\omega-1},$$

$$F(x) = \frac{1}{B(\upsilon,\omega)}\int_{0}^{\frac{x-a}{b-a}} y^{\upsilon-1}(1-y)^{\omega-1}dy. \tag{29}$$

20. Логистическое распределение. Область значений случайной величины $-\infty < x < \infty$. Плотность и функция распределения определяются из выражений [50]:

$$f(x) = \frac{\exp\left(\frac{x-a}{k}\right)}{k\left[1+\exp\left(\frac{x-a}{k}\right)\right]^{2}} = \frac{\sec h^{2}\left(\frac{x-a}{2k}\right)}{4k},$$

$$F(x) = \frac{1}{1+\exp\left(-\frac{x-a}{k}\right)} = \frac{1}{2}\left[1+tg\left(\frac{x-a}{2k}\right)\right]. \tag{30}$$

21. Распределение Парето. Область значения случайной величины $1 \le x < \infty$. Плотность и функция распределения описываются выражениями [50]:

$$f(x) = \frac{c}{x^{c+1}},$$
$$F(x) = 1 - \frac{1}{x^c}. \tag{31}$$

22. Степенное распределение [34]. Область изменения случайной величины $0 \le x \le 1$. Плотность и функция распределения описываются выражениями:

$$f(x) = cx^{c-1},$$
$$F(x) = x^c. \tag{32}$$

23. Обратное степенное распределение [34]. Область изменения случайной величины $x \ge 0$. Плотность и функция распределения определяется из выражений:

$$f(x) = \frac{mx_0^m}{x^{m+1}\left[1+\left(\frac{x_0}{2}\right)^m\right]^2},$$
$$F(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x_0}{x}\right)^m}, \tag{33}$$

где m, x_0 – параметры распределения. Параметр x_0 является медианой распределения.

24. Показательно-степенной закон [22, 34]. Этому распределению подчиняется сумма $m + 1$ случайных величин, подчиненных экспоненциальному распределению с $\lambda = 1$. Плотность и функция распределения описываются выражениями:

$$f(x) = \frac{x^m}{m!e^{-x}}, \qquad x \ge 0,$$
$$F(x) = \frac{\Gamma(m+1,x)}{\Gamma(m+1)}. \tag{34}$$

Это распределение используется в теории ошибок и массового обслуживания.

25. Распределение Лапласа. Плотность и функция этого распределения находятся так [17]:

$$f(x) = \frac{\lambda}{2}\exp\left(-\lambda|x-\mu|\right), \qquad -\infty < x < \infty,$$
$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\exp[\lambda(x-\mu)], & -\infty < x < \mu, \\ 1-\frac{1}{2}\exp[-\lambda(x-\mu)], & \mu < x < \infty. \end{cases} \tag{35}$$

Это распределение используется при обработке результатов измерений по методу наименьших модулей.

Распределение Лапласа представляет собой распределение величины $X = X_1 - X_2$, где X_1, X_2 – независимые случайные величины, имеющие одно и то же экспоненциальное распределение.

26. Гиперэкспоненциальное распределение [17]. Плотность, функция распределения и характеристическая функция описываются выражениями:

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}a_k\lambda_k e^{-\lambda_k x},\qquad x\geq 0,$$

$$F(x)=\sum_{k=1}^{n}a_k\left(1-e^{-\lambda_k x}\right) \tag{36}$$

Гиперэкспоненциальное распределение представляет собой линейную комбинацию экспоненциальных распределений, используется в теории массового обслуживания.

27. Распределение χ^2 [1, 34, 49]. Случайная величина распределена в интервале $x\geq 0$. Плотность и функция распределения имеют вид

$$f(x)=\frac{x^{\frac{\upsilon-2}{2}}\exp\left(-\frac{x}{2}\right)}{2^{\upsilon/2}\Gamma\left(\frac{\upsilon}{2}\right)},$$

$$F(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{\upsilon}{2},\frac{x}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\upsilon}{2}\right)}, \tag{37}$$

где υ – параметр распределения, $\upsilon = 1, 2 \ldots$

Частным случаем этого распределения являются экспоненциальное, гамма-распределение и распределение Эрланга.

При $\upsilon\to\infty$ распределение χ^2 стремится к нормальному в положительной области.

28. Распределение Пирсона [34]. Это распределение представляет собой модификацию распределения χ^2. Плотность и функция распределения описываются выражениями:

$$f(x)=\frac{1}{\beta^{k+1}\Gamma(k+1)}x^k e^{-x/\beta},\qquad x\geq 0,$$

$$F(x)=\frac{\Gamma\left(k+1,\frac{x}{\beta}\right)}{\Gamma(k+1)}. \tag{38}$$

При $k=\frac{\upsilon}{2}-1$ и $\beta=2$ это распределение переходит в распределение χ^2.

29. χ_u-распределение. Случайная величина изменяется в интервале $x\geq 0$. Плотность и функция распределения [12]:

$$f(x)=\frac{x^{\upsilon-1}\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)}{2^{\frac{\upsilon-2}{2}}\Gamma\left(\frac{\upsilon}{2}\right)},$$

$$F(x)=\frac{1}{2^{\frac{\upsilon-2}{2}}\Gamma\left(\frac{\upsilon}{2}\right)}\int_0^x u^{\upsilon-1}\exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right)du. \tag{39}$$

Это распределение имеет случайная величина, представляющая собой корень квадратный из суммы квадратов нормированных нормальных случайных величин.

При $\upsilon = 1$ оно переходит в распределение модуля нормальной случайной величины, при $\upsilon = 2$ – распределение Рэлея, при $\upsilon = 3$ – распределение Максвелла.

30. Распределение Стьюдента [1, 34, 44]. Область изменения случайной величины $-\infty < x < \infty$. Плотность и функция распределения описываются выражениями:

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\upsilon+1}{2}\right)\left(1+\frac{x^2}{\upsilon}\right)^{-\frac{\upsilon+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\upsilon}{2}\right)\sqrt{\pi\upsilon}},$$

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi\upsilon}}\frac{\Gamma\left(\frac{\upsilon+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\upsilon}{2}\right)}\int_{-\infty}^{x}\left(1+\frac{t^2}{\upsilon}\right)^{-\frac{\upsilon+1}{2}} dt. \qquad (40)$$

При $\upsilon > 30$ распределение Стьюдента хорошо описывается нормальным законом.

31. Распределение Фишера – Снедекора (F-распределение) [1, 34]. Область изменения случайной величины $x \geq 0$. Плотность вероятности описывается выражением:

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\upsilon+\omega}{2}\right)\left(\frac{\upsilon}{\omega}\right)^{\frac{\upsilon}{2}} x^{\frac{\upsilon-2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\upsilon}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\omega}{2}\right)\left(1+\frac{\upsilon}{\omega}x\right)^{\frac{\upsilon+\omega}{2}}}. \qquad (41)$$

Это распределение используется в математической статистике для проверки гипотез о равенстве дисперсий.

32. Распределение композиции нормального и равномерного законов. Плотность распределения случайной величины описывается выражением [7]:

$$f(x) = \frac{1}{b-a}\left\{\Phi\left[\frac{b-(x-\mu)}{\sigma_1}\right]-\Phi\left[\frac{a-(x-\mu)}{\sigma_1}\right]\right\}, \qquad -\infty < x < \infty. \qquad (42)$$

Распределение представляет собой композицию нормального закона с параметрами μ, σ_1 и равномерного закона с плотностью $\frac{1}{b-a}$.

33. Распределение Коши [34, 49]. Область значения случайной величины $-\infty < x < \infty$. Плотность и функция распределения определяются из выражений:

$$f(x) = \frac{a}{\pi}\frac{1}{(x-\mu)^2+a^2},$$

$$F(x) = \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}arctg\frac{x-\mu}{a}. \qquad (43)$$

34. Распределение Бернштейна [8, 16, 28, 40]. Плотность и функция этого распределения определяются так:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(ax+b)}}\exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(x-c)^2}{(ax+b)}\right],$$

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-c}{\sqrt{2x+b}}\right). \qquad (44)$$

35. Альфа-распределение [45]. Плотность этого распределения описывается выражением

$$f(x)=\frac{\beta}{x^2\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\alpha-\frac{\beta}{x}\right)\right]^2. \qquad (45)$$

Функция распределения при $\alpha \ge 3$ имеет вид

$$F(x)=\Phi\left(\alpha-\frac{\beta}{x}\right). \qquad (46)$$

36. Распределение Бастенэра [24]. Плотность и функция распределения описываются выражениями:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma_1(x+b)\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{[a-(x+b)^{-1}]^2}{2\sigma_1^2}\right\},$$

$$F(x)=\Phi\left[\frac{a-(x+b)^{-1}}{\sigma_1}\right]. \qquad (47)$$

Такое распределение ввел Бастенэр, выдвинувший предположение о нормальном распределении величины $\frac{1}{x+b}$, где x – число циклов до разрушения.

37. Распределение Квартвелишвили. Область изменения случайной величины $-\infty < x < \infty$. Плотность и функция распределения описываются выражениями [20]:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\left(1+\frac{\beta}{x^2}\right)\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\frac{\beta}{x}-a}{\sigma_1}\right)^2\right],$$

$$F(x)=\Phi\left(\frac{x-\frac{\beta}{x}-a}{\sigma_1}\right). \qquad (48)$$

38. Распределение Фридлендера. Область изменения случайной величины $x > 0$. Плотность и функция распределения описываются выражениями [48]:

$$f(x)=k\rho x^{\rho-1}\exp\left[-\frac{\left(x^\rho-b_1\right)^2}{2b_2^2}\right],$$

$$F(x)=k\Phi\left(\frac{\left(x^\rho-b_1\right)}{b_2}\right), \qquad (49)$$

где $k=\Phi^{-1}\left(\frac{b_1}{b_2}\right)$, $\Phi(...)$ – стандартная функция нормального распределения, ρ, b_1, b_2 – параметры распределения.

39. Распределение минимальных значений Седракяна [42]. Этим распределением описывается ограниченная случайная величина $x \geq \varepsilon$. Плотность и функция распределения определяются так:

$$f(x) = \frac{\alpha\beta}{\mu - \varepsilon}\left[1 - \left(\frac{x-\varepsilon}{\mu-\varepsilon}\right)^{\alpha}\right]^{\beta-1}\left(\frac{x-\varepsilon}{\mu-\varepsilon}\right)^{\alpha-1},$$

$$F(x) = 1 - \left[1 - \left(\frac{x-\varepsilon}{\mu-\varepsilon}\right)^{\alpha}\right]^{\beta}, \tag{50}$$

где $\alpha, \beta, \mu, \varepsilon$ – параметры распределения.

40. Распределение Трейера. Область изменения случайной величины $x \geq 0$. Плотность и функция распределения описываются выражениями [51]:

$$f(x) = \frac{\alpha\beta}{x^{\beta+1}}\exp\left(-\frac{\alpha}{x^{\beta}}\right),$$

$$F(x) = \exp\left(-\frac{\alpha}{x^{\beta}}\right). \tag{51}$$

Это распределение используется для описания процессов износа и усталости.

41. Распределение Ванина. В [6] предложено следующее выражение для описания плотности распределения:

$$f(x) = \left(\frac{x}{\sigma_1\sqrt{2}}\right)^{b}\frac{\exp\left(-\frac{a^2}{2} - \frac{x^2}{2\sigma_1^2}\right)sh\frac{ax}{\sigma_1}}{a\sigma_1\Gamma\left(1+\frac{u}{2}\right)\Phi\left(\frac{1-b}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{a^2}{2}\right)}, \tag{52}$$

$$b > -2, a, \quad \sigma_1 > 0,$$

где $\Phi(a,c,z) = \sum_n \frac{(a)_n z^n}{(c)_n n!}, (a)_n = a(a-1)...(a-n+1)$.

Распределения (52) при решении задач механики композиционных сред.

42. Распределение Орлова. В [33] для плотности распределения случайной величины предложено следующее выражение:

$$f(x) = A(D - \cos\beta)^n, \qquad a \leq x \leq b, \tag{53}$$

где $B = \pi(cy^2 - cy + 2y)$, $y = \frac{x-a}{b-a}$; A = нормирующий множитель, определяемый из условия $\int_a^b f(x)dx = 1$; B, n, c – другие параметры распределения.

Там же предложено эмпирическое соотношение между параметрами

$$B = (1 + 0{,}123n^2)^{1/2}. \tag{54}$$

43. Распределение Гудрича. Функция и плотность распределения ограниченной случайной величины $x_1 \leq x \leq x_2$ описываются выражениями [9]:

$$F(x) = 1 - \exp\left[-\frac{\alpha(x-x_1)^n}{(x_2-x)^m}\right],$$

$$f(x) = \alpha\exp\left[-\frac{\alpha(x-x_1)^n}{(x_2-x)^m}\right]\frac{n(x-x_1)^{n-1}(x_2-x_1)^m - m(x_2-x)^{m-1}(x-x_1)^n}{(x_2-x_1)^{2m}}. \tag{55}$$

Это распределение используется в гидрологических расчетах.

44. Распределение Хольцмарка. Плотность этого распределения [29]:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty xt\sin(tx)\exp\left(-\frac{at^2}{2}\right)dt. \tag{56}$$

Этим выражением описывается распределение модуля силы в следующей схеме. На отдельную частицу действуют силы отталкивания (притяжения) всей совокупности частиц, заполняющих бесконечное пространство. Каждая частица взаимодействует с контрольной частицей с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния.

Параметр a в выражении (56) определяется по формуле

$$a=\frac{8\sqrt{2}}{15}(\pi\chi)^{3/2}n, \tag{57}$$

где n - среднее число частиц в единице объема; / - коэффициент пропорциональности в силе взаимодействия между частицами.

45. Распределение Ферми -Дирака. Плотность этого распределения описывается выражением [31]:

$$f(x)=\frac{1}{\exp\left(-\frac{\mu-x}{kT}\right)+1}, \tag{58}$$

где μ – химический потенциал газа, отнесенный к одной частице; k – постоянная Больцмана; T – абсолютная температура.

Этому распределению подчиняется энергия квантовых частиц-фермионов (частиц с полуцелым спином).

46. Распределение Бозе – Эйнштейна. Плотность этого распределения описывается выражением [31]:

$$f(x)=\frac{1}{\exp\left(-\frac{\mu-x}{kT}\right)-1}. \tag{59}$$

Этому распределению подчиняется энергия квантовых частиц-бозонов (частиц с целым или нулевым спином).

47. Распределение Шермана. Плотность распределения описывается выражением [29, 34]:

$$f(x)=\sum_{m=1}^{n} mb_m x^{m-1}, \qquad 0<x<\frac{n}{n+1}. \tag{60}$$

47. Распределение Кептейна. Плотность распределения описывается выражением [29]:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{[G(x)-\mu]^2}{2\sigma^2}\right\}\frac{dG(x)}{dx}, \tag{61}$$

где $G(x)$ – монотонная дифференцируемая функция.

Если случайная величина X подчиняется распределению Кептейна, то $Y = G(x)$ – нормированная нормальная случайная величина.

48. Распределение Назарова. Плотность распределения случайной величины описывается выражением [48]:

$$f(x)=\frac{\rho}{2\lambda\sigma\Gamma\left(\frac{1}{\rho}\right)}\exp\left[-\left|\frac{x-m}{\lambda\rho}\right|^\rho\right], \tag{62}$$

где σ, λ, ρ, m – параметры распределения.

49. Параболическое распределение. Область изменения случайной величины $c \le x \le c + b$. Плотность и функция распределения описываются выражениями [40]:

$$\begin{aligned} &f(x)=6t(1-t),\\ &F(x)=3t^2-2t^3, \qquad t=\frac{x-c}{b}. \end{aligned} \tag{63}$$

50. Распределение Грома - Шарлье **[20, 34].** Этим распределением аппроксимируют распределения, близкие к нормальному. Плотность и функция распределения описываются выражениями:

$$g(x)=\frac{1}{\sigma}\left[f(t)-\frac{\gamma_1}{6}f_3(t)+\frac{\gamma_2}{24}f_4(t)\right],$$

$$F(x)=\Phi(t)-\frac{\gamma_1}{6}f_2(t)+\frac{\gamma_2}{24}f_3(t),\qquad t=\frac{x-E}{\sigma},\tag{64}$$

где f_2, f_3, f_4 – вторая, третья и четвертая производные от плотности нормального распределения; $\gamma_1=\frac{\mu_3}{\sigma^3},\gamma_2=\frac{\mu_4}{\sigma^4}-3$; μ_3,μ_4 – третий и четвертый центральный моменты распределения; E, σ^2 – математическое ожидание и дисперсия.

51. Обобщенные полиномы Лагерра. Для положительных случайных величин в [4, 34] плотность распределения выражается через обобщенные полиномы Лагерра:

$$f(x)=\lambda(\lambda x)^{\alpha}e^{-\lambda x}\sum_{k=0}^{n}C_k(\lambda,\beta)L_k^{\beta}(\lambda x),\tag{65}$$

где $\beta>-1,\lambda>0$ – параметры;

$$L_k^{\beta}(\lambda x)=\sum_{i=0}^{k}C_{k+\beta}^{k-i}\frac{(-\lambda x)^i}{i!};$$

$$C_k(\lambda,\beta)=\frac{1}{\Gamma(1+\beta)C_{k+\beta}^{\beta}}\sum_{i=0}^{k}C_{k+\beta}^{k-i}\frac{(-\lambda)^i}{i!}\alpha_i,\qquad \alpha_i=\int_0^{\infty}x^if(x)dx.\tag{66}$$

Такое представление позволяет получить хорошее приближение многих законов распределения.

52. Кривые распределения Пирсона. Группу семейства распределений предложил Пирсон. Каждое семейство может быть получено решением дифференциального уравнения [27, 34]:

$$\frac{df(x)}{dx}=\frac{(x-a)f(x)}{b_0+b_1x+b_2x^2},\tag{67}$$

где a, b_0, b_1, b_2 – параметры распределения.

Это уравнение получается путем предельного перехода из гипергеометрического распределения. Решение уравнения (66) приводит к большому числу конкретных распределений, включая нормальное, бета-, гамма-распределение. Из этого уравнения Пирсон предложил 12 типов распределений.

53. Распределение смеси **[52].** Очень часть случайные изменения параметров технических устройств хорошо описываются распределением смеси. Плотность и функция распределения смеси из k компонентов определяются так:

$$f(x)=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i f_i(x),$$

$$F(x)=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\Phi_i(x),\tag{68}$$

где $\Phi_i(x), f_i(x)$ – функция и плотность распределения i-той случайной величины.

Плотность распределения смеси двух нормальных распределений описывается так:

$$f(x)=\frac{\alpha}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-E_1)^2}{2\sigma_1^2}\right]+\frac{(1-\alpha)}{\sigma_2\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-E_2)^2}{2\sigma_2^2}\right].\tag{69}$$

Плотности распределения смеси нормально распределенной величины и величины, распределенной по закону Вейбулла, описываются следующим образом:

$$f(x)=\frac{\alpha}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-E)^2}{2\sigma_1^2}\right]+(1-\alpha)\delta\lambda x^{\delta-1}\exp(-\lambda x^{\delta}).\tag{70}$$

Там же приведены примеры использования распределения смеси при оценке надежности технических устройств.

54.Сплайн-распределения. В настоящее время для описания статистического ряда распределений используются так называемые сплайн-распределения [37]. Сущность применения сплайн-распределений состоит в том, что диапазон изменения случайной величины разбивается на несколько интервалов. На каждом интервале функция распределения описывается своим законом распределения. Для сплайн-экспоненциального распределения с одним узлом функция распределения описывается так:

$$F(x)=\begin{cases}1-\exp(-\lambda_1 x), & 0\le x\le x_0,\\ 1-\exp[-\lambda_1 x_0-\lambda_2(x-x_0)], & x_0<x<\infty,\end{cases} \quad (71)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, x_0$ – параметры распределения.

Сплайн-распределения по числу параметров эквивалентны распределениям смеси.

55. ***Закон распределения модуля разности*** [46]. Если две случайные величины x_1 и x_2 имеют нормальное распределение, то модуль разности этих величин $t = / x_1 - x_2 /$ имеет распределение, которое называется распределением модуля разности. Этому закону подчиняются погрешности взаимного расположения поверхностей и осей и погрешности формы деталей: овальность, конусообразность и др. Плотность и функция распределения описываются выражениями, аналогичными для нормального распределения.

Заключение. Помимо рассмотренных распределений, в литературе имеется еще достаточно большое количество вероятностных зависимостей, широко используемых в других областях деятельности, в частности, в математической статистике, социологических исследованиях, медицине и др. При исследованиях и оценке надежности технических систем знание закона распределения случайной величины имеет большое значение, но при анализе надежности необходимо учитывать и физическую природу возникновения отказа. Любой закон распределения показателей надежности является результатом действия совокупности множества факторов. Изменение некоторых из них, например технологии изготовления, материалов, условий эксплуатации и ремонта может повлечь за собой изменение не только параметров, но и вида распределения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант Т01-088).

ЛИТЕРАТУРА

1. Айвазян С.А. Статистические исследования зависимостей. - М.: Металлургия, 1968. - 228 с.
2. Барлоу Р., Прошан Ф. Математическая теория надежности. - М.: Сов. радио, 1969. - 488 с.
3. Баруча-Рид А.Т. Элементы теории марковских процессов и их приложения. - М.: Наука, 1964. - 512 с.
4. Баскин Э.М. Приближение законов надежности обобщенными полиномами Лагерра // Техническая кибернетика. - 1973. - № 5. - С. 90-93.
5. Бойцов Б.В. Надежность шасси самолета. - М.: Машиностроение, 1976. - 216 с.
6. Ванин Г.А. Некоторые функции распределения в механике композиционных средств // Прикладная механика. - 1984. - Т. 20, № 5. - С. 25 - 31.
7. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. - М.: Наука, 1964. - 576 с.
8. Герцбах И.Б., Кордонский Х.Б. Модели отказов. - М.: Сов. радио, 1966. - 167 с.
9. Глушко В.Т., Рубец Г.Т., Бобро Н.Т. Распределение Райса и оценка надежности в схеме «нагрузка - прочность» // Прочность и надежность конструкций. - Киев: Наукова думка, 1978. - С. 26 - 30.
10. Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д. Математические методы в теории надежности - М.: Наука, 1965. - 524 с.
11. Голинкевич Т.А. Прикладная теория надежности. - М.: Высш. шк., 1977. - 160 с.
12. Горяйнов В.Г., Журавлев А.В., Тихонов В.И. Примеры и задачи по статистической радиотехнике. - М.: Радио и связь, 1970. - 598 с.
13. Грушевский Я.Л. К оценке параметров распределения Вейбулла // Проблемы прочности. - 1988. - № 12.-С. 92-95.
14. Гумбель Э. Статистика экстремальных значений. - М.: Мир, 1965. - 450 с.
15. Гусак А.А., Бричикова Е.А. Теория вероятностей: Справочное пособие к решению задач. - Мн.: Тетра Системс, 2002.-288 с.
16. ЕфремовЛ.В. Практика инженерного анализа надежности судовой техники-Л.: Судостроение, 1980.-176с.
17. Заездный А.М. Основы расчетов по статистической радиотехнике. - М.: Связь, 1969. - 448 с.
18. Игнатович С.Р., Трокоз Г.А. Прогнозирование ресурса с учетом особенностей развития системы поверхностных микрометровых трещин // Проблемы прочности, 1990 - № 3,- С. 17 - 22.
19. Канарчук В.Е Основы надежности машин. - Киев: Наукова думка, 1982. - 248 с.
20. Картвелишвили Н.А. Стохастическая гидрология. - Л.: Гидрометеоиздат, 1981. - 166 с.
21. Кесаев Х.В., Трофимов Р.С. Надежность двигателей летательных аппаратов. - М.: Машиностроение, 1982.-136 с.

22. Кокс Д.Р., Смит В.Л. Теория восстановления. - М.: Сов. радио, 1967. - 300 с.
23. Кордонский Х.Б., Дышлер И.Е., Громов Г.В. Вероятностное обоснование норм прочности // Прочность материалов и конструкций. - Киев: Наукова думка, 1975. - С. 208 - 222 .
24. Кордонский Х.Б., Фридман Я.Ф. Некоторые вопросы вероятностного описания усталостной долговечности // Заводская лаборатория. - 1976. - № 7. - С. 829 - 847.
25. Надежность и долговечность машин / Б.И. Костецкий, И.Г. Носовский, Л.И. Бершадский и др. - Киев: Техніка, 1975.-408 с.
26. Кугель Р.В. Надежность машин массового производства,- М.: Машиностроение, 1981. - 244 с.
27. Липкин М.И. Кривые распределения в экономических исследованиях. - М.: Статистика, 1972. - 144 с.
28. Лукинский В.С., Зайцев Е.И. Прогнозирование надежности автомобилей. - Л.: Политехника, 1991.-224 с.
29. Мартыщенко Л.А., Панов В.В. Методы военно-научных исследований в задачах разработки испытаний вооружения. - М.: Воениздат, 1981. - Ч. 1. - 280 с.
30. Махутов Н.А., Кокшаров И.И., Лепихин А.М. Применение численных методов расчета показателей надежности элементов конструкций с повреждениями // Проблемы прочности. - 1991. - № 5. - С. 3 - 8.
31. Меламедов И.М. Физические основы надежности. - Л.: Энергия, 1970- 151 с.
32. Микипорис Ю.А., Смышников Р.В. Анализ надежности и ресурса гидравлического оборудования машин // Проблемы машиностроения и надежности машин, 2003. - № 1.- С. 37 - 42.
33. Орлов А.Г. Ограниченный закон распределения // Надежность и контроль качества. - 1977. - № 12. - С. 32-37.
34. Переверзев Е.С. Случайные процессы в параметрических моделях надежности. - Киев: Наукова думка, 1987.-240 с.
35. Погодаев Л.И., Чулкин С.Г. Анализ надежности деталей цилиндро-поршневой группы двигателей при трении скольжения // Проблемы машиностроения и надежности машин, 1998. - № 3. - С. 57 - 65.
36. Половко А.М. Основы теории надежности. - М.: Наука, 1964. - 448 с.
37. Приставка А.Ф. Итерационная процедура вычисления оценок параметров сплайн-экспоненциального распределения // Математическое обеспечение вероятностно-статистических задач. - Днепропетровск: Днепропетровский гос. ун-т, 1979. - С. 36 - 44.
38. Проников А.С. Параметрическая надежность машин. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. - 560 с.
39. Розанов Ю.А. Случайные процессы. - М.: Наука, 1979. - 184 с.
40. Рубец Г.Т. Вероятностно-статистические методы оценки прочности пород и массива для совершенствования расчетных моделей надежности подземных сооружений: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. - Днепропетровск, 1983. - 34 с.
41. Саргсян А.Е., Кучерявый В.И., Чарков В.Д. Численное определение вероятностных характеристик напряжений в деталях машин // Проблемы машиностроения и надежности машин. -1999. -№ 3. - С. 38 - 42.
42. Седракян Л.Т. Элементы статистической теории деформирования и разрушения хрупких материалов. - Ереван: Айастан, 1968.-248 с.
43. Сидняев Н.И. Математическое моделирование оценки надежности объектов сложных технических систем // Проблемы машиностроения и надежности машин. - 2003. - № 4. - С. 24 - 31.
44. Стогов Г.В., Макшанов А.В., Мусаев А.А. Устойчивые методы обработки результатов измерений // Зарубежная радиоэлектроника. - 1982. - № 9. - С. 3 - 47.
45. Стрельников В.П. Модели отказов механических объектов - Киев: О-во «Знание» УССР, 1982. - 20 с.
46. Филонов И.П., Медведев А.И. Вероятностно-статистические методы оценки качества в машиностроении. - Мн.: Тесей, 2000. - 128 с.
47. Фищбейн Ф.И. Методы оценки надежности по результатам испытаний. - М.: Знание, 1973. - 98 с.
48. Фридлендер И.Г. Расчеты точности машин при проектировании. - Киев; Донецк: Вища шк. Гл. ред., 1980.- 182 с.
49. Хан Г., Шапиро С. Статистические модели в инженерных задачах. - М.: Мир, 1969. - 396 с.
50. Хастинг Н., Пикок Дж. Справочник по статистическим распределениям. - М.: Статистика, 1980. - 95 с.
51. Шукайло В.Ф. О физическом обосновании и конструировании типов функций распределения в теории надежности//Основные вопросы теории и практики надежности.-М.: Сов. радио, 1971. - С. 214-239.
52. Эренбург Э.С. Смеси распределения в надежности // В помощь слушателям семинара по надежности и прогрессивным методам контроля качества продукции. - М.: Знание, 1983. - С. 3 - 48.