УДК 681.3

ЛОКАЛЬНО-ЭВОЛЮЦИОННЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ СОСТАВЛЕНИЯ УЧЕБНОГО РАСПИСАНИЯ

канд. техн. наук, доц. А.О. ГЛУХОВ

Исследован новый метод решения задач дискретной оптимизации - локально-эволюционный. Предлагаемый метод является результатом синтеза эвристического и эволюционного подходов к решению задач данного класса. Рассмотрен вопрос о целесообразности использования метода при решении задачи составления учебного расписания.

Введение. Локально-эволюционный подход основан на синтезе эвристического и эволюционного подходов. Из первого было взяты на вооружение использование локальных эвристик (локальных правил поиска решения). Из второго - параллельное развитие множества поисковых процессов (популяции) и модели отбора. Предпринятые попытки использования локально-эволюционного подхода при решении различных задач дискретной оптимизации позволили убедиться в его высокой эффективности. Данная работа ставит своей целью получение количественных оценок эффективности метода и изучение возможности использования метода для решения задачи составления расписания (это яркий пример задачи дискретной оптимизации) [1 - 4, 6 - 8].

Рассматриваемая задача имеет выраженную прикладную направленность и сохраняет свою актуальность, в частности, для вузов Белоруссии. Данная задача решается «по старинке» в подавляющем большинстве вузов страны, а между тем, качество ее решения ощутимо влияет на эффективность работы вуза. Данная ситуация связана, скорее, с тем, что применение существующих программных продуктов составления расписания сильно ограничено, все они сориентированы на типовой вуз и не способны учесть все специфические детали реального процесса составления расписания.

К нерешенным задачам при составлении расписания можно отнести следующие:

а) эффективную перестройку расписания при внесении изменений в исходные данные;

б) учет специфических ограничений, диктуемых организацией процесса составления расписания в конкретных вузах;

в) приемлемую скорость сходимости процесса оптимизации расписания масштаба вуза.

Эффективная перестройка расписания означает учет фактов внесения изменений в расписание, которые имеют место в реальной жизни даже в период его использования. Ручная корректировка неэффективна, поскольку не дает возможность оценить оптимальность полученного решения.

Специфические ограничения - это индивидуальные для каждого вуза особенности процесса составления расписания.

Приемлемая скорость сходимости должна гарантироваться методом составления расписания. Этого нельзя сказать, например, о генетическом подходе и о многих его модификациях. Кроме того, быстрое окончание процесса составления расписания, в большинстве случаев, вовсе не означает получение качественного решения.

Предварительная формализация. Для задач дискретной оптимизации характерно, что пространство поиска конечно $S = \{s_k\}$. При этом оно может быть чрезвычайно велико. Точку в пространстве поиска ассоциируют с определенными (и допустимыми) значениями всех независимых переменных задачи $s_k = (x_1, x_2, \ldots, x_{task\_size})$. Ускорение поиска достигается за счет использования множества эвристик.

Определение 1. Формально *эвристика* f_i есть функциональное отображение $S \rightarrow S$. Эвристика позволяет двигаться в пространстве поиска решения S в направлении невозрастания оценочной функции $\varphi(s) \geq \varphi(f_i(s))$ (1), где $\varphi(s)$: $S \rightarrow R$ (Это достаточно распространенный случай).

Определение 2. *Рекурсивной эвристикой* называется эвристика, результат действия которой – неподвижная точка (НТ) – $f_i(s) = f_i^2(s)$. (2)

Определение 3. Теперь *рекурсивно-эвристическую вычислительную структуру* формально мы можем определить как $\Psi = (S, \Phi)$, где $\Phi = \{f_i \mid f_i - \text{рекурсивная эвристика}\}$ – множество рекурсивных эвристик (система рекурсивных эвристик), S – пространство поиска. Мощность системы рекурсивных эвристик обозначим $n = |\Phi|$.

Для того чтобы лучше представить, как протекает процесс поиска под действием системы рекурсивных эвристик, проведем следующие рассуждения. Введем отношение эквивалентности α_i как $\alpha_i \subseteq S \times S \mid$

$\forall(s_k, s_r) \in \alpha_i : f_i(s_k) = f_i(s_r)$. Оно рефлексивно, симметрично и транзитивно, что легко показать. И мы можем произвести факторизацию пространства S по отношению α_i. Фактор-множество S/α_i содержит классы c_j элементов из S неразличимых по действию эвристики f_i.

Утверждение 1. Каждый класс эквивалентности $c_j \in S/\alpha_i$ содержит единственную НТ. □ Существование НТ следует из свойства 2 рекурсивной эвристики $-\forall s_k \in c_j : f_i(s_k) = s_j = f_i^2(s_k) = f_i(s_j)$. Предположим, что в классе c_j НТ не единственна, т.е. $\exists s_x \in c_j : f_i(s_x) \neq s_j$, но тогда $s_x \notin c_j$ – мы пришли к противоречию. ⊠

Множество НТ по f_i обозначим $S_i = \{s_j \mid \forall c_j \in S/\alpha_i, \forall s_k \in c_j : f_i(s_k) = s_j\}$, $|S_i| = |S/\alpha_i|$. Таким образом, с помощью эвристик удается редуцировать пространство поиска до множества $S^* = \bigcup_i S_i$.

Утверждение 2. Редуцированное пространство поиска S^* содержит оптимум. □ Если учесть, что оптимум s^{opt} всегда принадлежит какому-либо одному классу из разбиения S/α_i, а f_i – всюду определенное отображение, то $f_i(s^{opt}) = s^{opt}$, в силу свойства 1. Следовательно $s^{opt} \in S_i \subseteq S^*$. ⊠

Заметим, что, задавшись любой точкой исходного пространства поиска, уже после применения первой эвристики мы неизбежно скатываемся к редуцированному пространству и далее уже не выходим за его пределы. Поэтому сжатие пространства поиска нужно рассматривать как следствие самого подхода к поиску решения, а не в виде искусственного приема.

Несложно доказать терминированность рекурсивно-эвристического вычисления. К сожалению, невозможно в общем виде доказать сходимость рекурсивно-эвристического вычисления, так как условием останова в нашем случае будет $\forall f_i(s) : f_i(s) = s$ (3), а эта ситуация зависит от используемой системы эвристик и может быть не связана с достижением оптимума.

В качестве основного фактора, влияющего на эффективность эвристического поиска, обычно называют целенаправленное (и эффективное) действие эвристик. Мы бы хотели получить некоторые количественные оценки, которые позволили бы нам сравнивать различные системы между собой.

Первое, на что хочется обратить внимание, – это эффект сжатия пространства поиска при использовании рекурсивных эвристик. Мощность пространства поиска, в этом случае, равна $|S^*|$.

Определение 4. Факт сокращения пространства поиска выразим через *коэффициент редукции* $r = |S| / |S^*|$. Этот коэффициент характеризует систему эвристик в целом и связан с эффективностью.

Определение 5. Факт сжатия пространства поиска за счет действия отдельных эвристик выразим через коэффициент $r_i = |S| / |S_i|$, который будем называть *мощностью эвристики.* Рассчитывается как средняя мощность классов разбиения из S/α_i.

Другим фактором, связанным с эффективностью, является наличие у эвристик общих неподвижных точек (ОНТ). Факт наличия ОНТ свидетельствует о потере эффективности поиска в этих точках, вплоть до ситуации останова. Другими словами, такие точки способствуют как бы «пробуксовке» вычисления.

Определение 6. Коэффициент учета потерь эффективности поиска в ОНТ определим как $p = \frac{\sum|S_i|}{|S^*|} = \frac{\sum|S_i|}{|S^*|} \cdot \frac{|S|}{|S|} = r \cdot \sum \frac{1}{r_i}$. Он равен среднему количеству «неработающих» эвристик в любой момент времени вычислений.

Введем оценку временных затрат $t = p \cdot \frac{|S|}{r}$. То есть мы предполагаем, что время вычислений тем больше, чем больше размер редуцированного пространства и чем больше потери из-за неэффективных вычислений в ОНТ. Данная оценка характеризует временные затраты, выраженные в условных единицах. Однако она не учитывает как временной сложности самих эвристик, так и характера их действия.

Учитывая характер действия эвристик, можно, как правило, предложить стратегию управления эвристиками во время вычислений. Целью такой стратегии является минимизация числа попаданий в ОНТ. Тогда снижаются потери времени из-за неэффективных вычислений (рассмотренных выше).

Предварительное исследование. Типичной задачей дискретной (комбинаторной) оптимизации является «проблема коммивояжера» – «Traveling Saleman Problem» – TSP. Дальнейшие исследования рекурсивно-эвристических вычислений мы будем проводить решая данную задачу. В симметричной постановке задача формулируется так: есть *task_size* городов $\{c_1, c_2, \ldots, c_{task\_size}\}$. Город характеризуется координатами в двумерном евклидовом пространстве $c_i = (x_i, y_i)$. Требуется найти маршрут обхода всех городов с минимальной длиной (минимальным значением оценочной функции) при условии однократного посещения каждого города. Точка в пространстве поиска – это последовательность обхода городов – $s_i = \{c^i_1, c^i_2, \ldots, c^i_{task\_size} \mid \forall j \neq k : c^i_j \neq c^i_k\}$. Доказано, что $|S| = \frac{(task\_size - 1)!}{2}$.

В качестве рекурсивных эвристик для экспериментов были выбраны эвристики типа «перенос цепочки в окрестности города c_a и его соседа», обозначим их HTS (Heuristic – Transition of Sequense). А также эвристика типа «перенос участка, прикрепленного к городу c_a и его соседу», обозначим HTP (Heuristic – Transition of Part). Особенностью их действия является рекурсивное применение механизма HTS для всех образовавшихся новых пар городов. Эвристики работают только в случае, если перенос цепочки или участка приводит к уменьшению длины маршрута. Результат ее действия – неподвижная точка, это типичный пример рекурсивной эвристики (рис. 1).

Это новые эвристики. Но для придания исследованию большей широты, мы включили в рассмотрение и предложенные ранее эвристики. Это – «перенос точки» (HPT), «обмен точками» (HPE) и «вращение участка между двумя точками» (HPR). Механизм работы этих эвристик очевиден и не требует специальной иллюстрации [1] .

На основе выбранных эвристик были составлены следующие системы рекурсивных эвристик:

1. Φ_{TS}: все HTS (по числу городов).
2. Φ_{TP}: все HTP;
3. Φ_{rTS}: разреженная из HTS (через один город).
4. Φ_{rTP}: разреженная из HTP.
5. Φ_{NEW}: все HTS + все HTP.
6. Φ_{OLD}: все HPT + все HPE + все HPR.
7. Φ_{rNEW}: разреженная HTS + разреженная HTP.

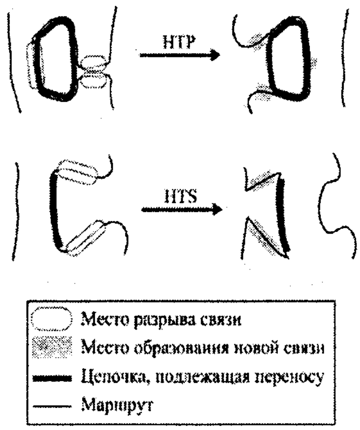

Рис. 1. Рекурсивные эвристики

Для всех перечисленных эвристик и систем эвристик определялись значения коэффициента редукции и коэффициента учета потерь эффективности. Для этого использовался полный перебор при решении задач малой размерности (рис. 2, а). Затем проводилось решение задач размерностью 100, 200, 300 (рис. 2. б). Оценки сохраняют свою актуальность при переходе к задачам большой размерности. Это говорит о том, что характер вычислений меняется достаточно медленно, и мы можем прогнозировать эффективность даже в случае большой размерности.

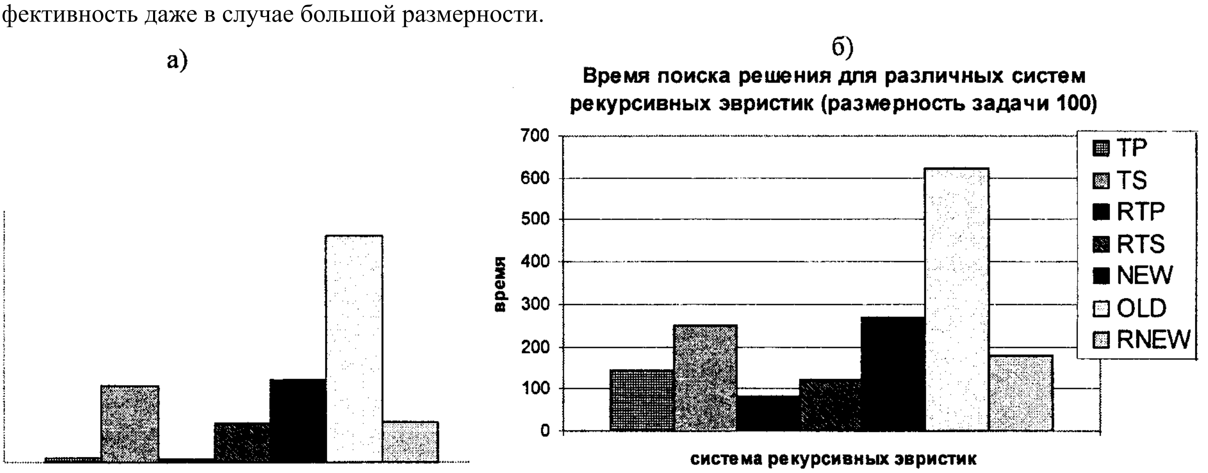

Рис. 2. Оценки временной сложности

Качество найденного решения, как удалось установить экспериментально, зависит от количества эвристик и их разнообразия (рис. 3).

Сокращение числа эвристик за счет разрежения приводит к потере качества. Объединение наборов эвристик различных типов, напротив, приводит к росту качества найденных решений. Таким образом, при принятии решения о «наилучшем» составе системы рекурсивных эвристик должен быть найден компромисс между качеством решений и временем вычислений.

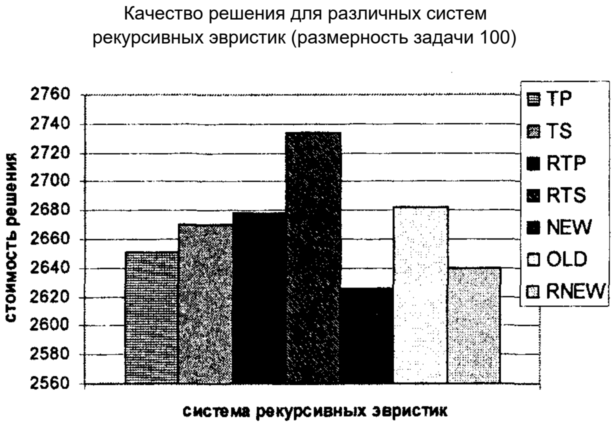

Рис. 3. Качество решения

В случае рассмотренных эвристик имеет место закрепление действия эвристики в локальной области определенного города. Это свойство приводит к тому, что количество ОНТ для двух эвристик зависит от близости локальных областей действия этих эвристик. Таким образом, для стратегического управления эвристиками мы можем воспользоваться мерой близости локальных областей действия эвристик. Значение этой меры может использоваться для определения приоритета эвристики при ее выборе.

Задача составления оптимального учебного расписания. Исходными данными для составления учебного расписания являются:

$A = \{a_i\}$ – аудиторный фонд (множество аудиторий);

$T = \langle t_i \rangle$ – плановый фонд времени – упорядоченное множество квантов планового времени (как правило, квант планового времени – это два академических часа или «пара»);

$W = \{w_i\}$ – множество преподавателей (профессорско-преподавательский состав);

$P = \{p_i\}$ – множество плановых занятий (в соответствии с учебными планами);

$G = \{g_i\}$ – множество групп учащихся;

$U \subset P \times G$ – множество учебных планов для групп учащихся (закрепляет за каждой группой учащихся определенный объем плановых занятий);

$\Pi \subset P \times P$ – отношение частичного порядка на P (указывает на необходимость последовательного планирования занятий во времени) – транзитивно, симметрично и не рефлексивно.

$O \subset P \times P$ – отношение частичного порядка на P (указывает на необходимость совместного планирования занятий во времени) – не транзитивно, не симметрично и не рефлексивно.

$N \subset W \times P$ – нагрузка по преподавателям (закрепляет за каждым преподавателем определенный объем плановых занятий).

Определение 7. Расписание есть подмножество $S = \{s_i\} \subset A \times T \times W \times P$ которое удовлетворяет следующим ограничениям:

Ограничение 1. Уникальность сочетаний (t,w), (t,a) и (p) в расписании S. Это означает, что преподаватель или аудитория может быть задействована в плане только единожды в определенный квант планового времени, а плановое занятие должно проводиться единожды на всем протяжении планового времени.

Ограничение 2. Для всех $(p_x, p_y) \in \Pi$: $\exists! s_a = (a_{a1}, t_{a2}, w_{a3}, p_x) \wedge \exists! s_b = (a_{b1}, t_{b2}, w_{b3}, p_y) \wedge t_{a2} \neq t_{b2}$. Данное ограничение есть реализация требования о последовательном планировании во времени занятий какой-либо группы учащихся или ее подгрупп (См. исходные данные).

Ограничение 3. Для всех $(p_x, p_y) \in O$: $\exists! s_a = (a_{a1}, t_{a2}, w_{a3}, p_x) \wedge \exists! s_b = (a_{b1}, t_{b2}, w_{b3}, p_y) \wedge b_2 = a_2 + 1$. Данное ограничение дает возможность планировать занятия, длительность проведения которых больше одного кванта планового времени.

Ограничение 4. В расписании должны быть представлены все плановые занятия из P – это требование полноты расписания.

Ограничение 5. Обычно перед составлением расписания закрепляют сочетание (w, p) в виде нагрузки преподавателя (см. исходные данные). Поэтому сочетание (w, p) в расписании должно также присутствовать и в нагрузке N.

Перечисленные ограничения являются основными, но кроме них, обычно, учитывается еще целый ряд дополнительных ограничений. Так, для учащихся или преподавателей вводят своеобразный календарь учебного или рабочего времени, где определяют обязательное, нежелательное и запрещенное для учебы/работы время. Аудитории характеризуются набором свойств, которые должны также учитываться при планировании занятий (вместимость, тип аудитории, корпус и т.п.).

В задаче составления оптимального расписания нужно найти расписание с минимальной ценой. Нами предлагается использовать в качестве оценочной функции следующую эвристическую функцию предпочтения: $Q(S) = (a_1 \cdot G_1 + a_2 \cdot G_2 + a_3 \cdot G_3 + a_4 \cdot G_4) + (a_5 \cdot A_1 + a_6 \cdot A_2) + (a_7 \cdot W_1 + a_8 \cdot W_2) + a_9 \cdot P_1$.

Здесь G_1 – количество межкорпусных переходов в течение дня у групп (подгрупп) учащихся;

G_2 – количество «форточек» в расписании групп (подгрупп);

G_3 – степень разнообразия занятий в течение дня у групп (подгрупп) учащихся;

G_4 – выход за пределы рекомендуемого календаря учебного времени;

A_1 – количество «форточек» в расписании аудиторий;
A_2 – степень загрузки аудиторий во время занятий;
W_1 – количество межкорпусных переходов в течение дня у преподавателей;
W_2 – выход за пределы рекомендуемого календаря рабочего времени;
P_1 – степень покрытия неполным расписанием учебных планов;
$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_9$ – масштабирующие коэффициенты.

Рекурсивные эвристики составления расписания. Предлагается использовать две рекурсивные эвристики для рассматриваемой задачи: HSG – планирования занятий и HSX – перенос занятий в расписании. Первая эвристика предназначена для выращивания расписания и способна работать с неполным расписанием, вторая – для оптимизации полного расписания.

HSG: Действие данной эвристики состоит из двух шагов. Во-первых, выбирается занятие, которого еще нет в расписании. Во-вторых, выбирается время и аудитория для проведения данного занятия. Очевидно, что при этом не должны быть нарушены вышеперечисленные ограничения. Можно предложить, пожалуй, несколько различных способов осуществления выбора как на первом шаге, так и на втором.

HSX: перенос занятия p_{a4} в плане $s_a = (a_{a1}, t_{a2}, w_{a3}, p_{a4})$ в другую аудиторию и в другое время. То есть изменение значения сочетания (a_{a1}, t_{a2}) на (a_{b1}, t_{b2}). Если при этом существует $s_b = (a_{b1}, t_{b2}, w_{b3}, p_{b4})$, то данная процедура повторяется для p_{b4}. С целью устранения зацикливаний глубина рекурсии должна быть искусственно ограничена. Действие эвристики HSX будет успешным, если новое расписание имеет меньшую цену по сравнению с исходным и если не нарушены вышеперечисленные ограничения.

Заключение. В результате проведенного исследования был разработан высокоэффективный локально-эволюционный алгоритм решения TSP, значительно превосходящий его предыдущие аналоги как по временным затратам, так и по качеству решения. Такой значительный рост эффективности стал возможным только благодаря использованию хорошо сбалансированной системы рекурсивных эвристик (сравните OLD и NEW на рис. 2 - 3) и стратегии, использующей меру близости локальных областей действия эвристик.

Испытание нового алгоритма проводилось на примерах из библиотеки тестовых примеров задачи коммивояжера TSPLIB. Он позволил получить новые квазиоптимальные решения для таких задач, как eli51, ali535, rd100 и некоторых, других за достаточно короткое время (несколько минут).

Кроме этого, формализована постановка задачи составления учебного расписания и предложены рекурсивные эвристики для локально-эволюционного алгоритма ее решения. По результатам предварительного исследования можно заключить, что локально-эволюционный подход обладает свойствами, которые выгодно отличают его от классических моделей эволюционного поиска (отсутствие резких скачков, поступательное и целенаправленное движение, большая предсказуемость временных затрат и качества решения), что позволяет ожидать появление новых результатов и снятия некоторых нерешенных до настоящего момента задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Aliaksei O. Hlukhau, Valerie V. Trofimov The Optimal Schedule for the Technological Process of Semiconductor Production // International Conference on Operations Research. -University of Klagenfurt, Austria, 2002.
2. Глухов А.О. Способ повышения эффективности эвристического метода оптимизации в условиях объектно-ориентированных систем // Сб. докл. SCM'99. - СПб.: СПбЭТУ, 1999. - С. 228 - 232.
3. Глухов А.О., Трофимов В.В., Глухов Д.О. Локальный генетический алгоритм планирования процесса многопрофильного производства // Экономическая кибернетика: системный анализ в экономике и управлении: Сб. науч. тр -.СПб.: СПбГУЭФ, 2002. - Вып. 5. - С. 50 - 56.
4. Глухов А.О., Трофимов В.В. Использование рекурсивных эвристик при решении задач дискретной оптимизации большой размерности // Современные проблемы менеджмента: Межвуз. сб. - СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2003. - Вып. 6. - С. 99 - 105.
5. Математические основы цифровой техники / В.М. Муттер, В.В. Трофимов, И.В. Иванова, М.Ю. Калинушкин. - СПб.: Литера плюс, 1999. - 351 с.
6. Норенков И.П., Косачевчкий О.Т. Использование метода комбинирования эвристик для решения транспортной задачи с временными окнами // Сб. докл. междунар. конф. по мягким вычислениям и измерениям. - СПб., 1998.-Т. 1.
7. Эвристические методы календарного планирования / Т.П. Подчасова, В.М. Португал, В.А. Татаров, В.В. Шкурба. - Киев: Техника, 1980. - 140 с.
8. Рейнгольд Э., Нивергельт Ю., Део Н. Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика. - М.: Мир, 1980. - 465 с.