УДК 528. 063

ПРИМЕНЕНИЕ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ И УРАВНИВАНИИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

канд. техн. наук, доц. В.И. МИЦКЕВИЧ, О.Г. СКОРИК,
С.Г. ШНИТКО, В.В. ЯЛТЫХОВ
(Полоцкий государственный университет)

Показано применение векторной целевой функции при решении задач математической обработки результатов геодезических измерений.

В процессе многокритериальной оптимизации [1] используется векторный, а не один скалярный показатель эффективности решения. В геодезической практике этот новый подход может применяться не взамен прежним технологиям, а в дополнение к ним. Ниже показано, что несколько критериев оптимальности решения можно применять не только в алгоритмах уравнивания Lp-оценок [2], но и в рамках метода наименьших квадратов (МНК) при проектировании оптимального плана наблюдений [3], и в математической обработке результатов геодезических измерений [4].

Например, при поиске такой точности измерений углов, длин линий, превышений, которая обеспечивала бы наперед заданные результаты оценки точности искомых параметров геодезической сети, для поиска оптимального веса параметрического уравнения предлагаем формулу

$$\mathrm{P}_{\mathrm{K},i}=\left|p_i+\frac{p_i}{5}\mathrm{K}_i\right|. \tag{1}$$

Здесь $p_i=\sigma_0^2/\sigma_i^2$, $\mathrm{K_i}$ = ($-4 \le \mathrm{K_i} \le 20$) – коэффициент для каждого измерения, определяемый при начальном $K = 0$ пошаговым методом проб и ошибок $(K_j = K_{j-1} \pm 1)$ под условием минимума двух целевых функций:

$$\Phi_1(\mathrm{X})=\sum_{i=1}^{N}\mathrm{P}_{\mathrm{K},i}L_i^2(\mathrm{X}), \tag{2}$$

$$\Phi_2(\mathrm{X})=\sum_{j=1}^{t}\left|\mathrm{M}_j-\mathrm{M}_{\partial on}\right|, \tag{3}$$

где M_j – ошибка положения определяемого пункта; $M_{\partial on.}$ – ее допустимая величина; $L(X)$ = $\varphi(X)$ – T – свободный член нелинейного параметрического уравнения при уравнивании, а не при проектировании; t – количество определяемых пунктов:

$$\mathrm{M}=\sigma_0\sqrt{Q_{ii}+Q_{jj}};\qquad Q=\left(\mathrm{A^T P_{K,i} A}\right)^{-1}.$$

Сравним величины $P_{\mathrm{K,i}}$ для геодезического четырехугольника из [3, с. 24], найденные ранее опубликованным и новым способами (рис. 1, а – для способа из [3] и 1, б – для нового способа, где на месте углов указан его вес). По данным рис. 1, б видно, что чем ближе углы к исходным пунктам, тем с меньшей точностью их можно измерять для достижения $(M_c)_{\text{доп.}}$ = 30 мм и $(M_D)_{\text{доп.}}$ = 19 мм.

Отметим, что формулы (1) – (3) легко программируются. Также не вызывает затруднений переход от функции (3) к критерию

$$\Phi_2(\mathrm{X})=\left|m_{\mathrm{P}L}-\left(m_{\mathrm{P}L}\right)_{\partial on.}\right|, \tag{4}$$

где m_{pL} – среднеквадратичная погрешность определения площади.

В результате, как может показаться с первого взгляда, функция (2) лишь косвенно участвуют в минимизации, а основные вычислительные трудности связаны с получением обратной матрицы весов Q. Но так обстоит дело только при проектировании оптимального плана измерений, но не при уравнивании последних. При этом избежать использования критерия (2) нельзя, а вместо (3) или (4) предлагаем отыскивать минимум одной из следующих целевых функций:

$$\Phi_2(\mathrm{X})=\sum_{j=1}^{t}\mathrm{M}_j; \tag{5}$$

$$\Phi_2(\mathrm{X})=\max\mathrm{M}; \tag{6}$$

$$\Phi_2(\mathrm{X}) = m_{\mathrm{P}L}, \tag{7}$$

где

$$\mathrm{M} = \mu\sqrt{Q_{ii} + Q_{jj}}\,. \tag{8}$$

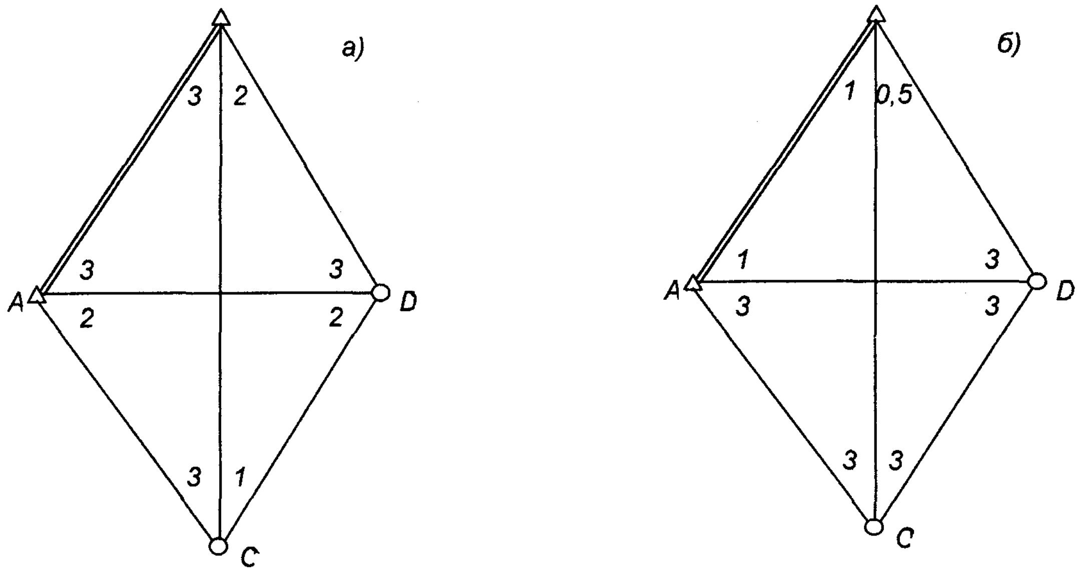

Рис. 1. Значения весов для угловых измерений

Практическое применение (2), (5) – (7) может иметь место, если наложить ограничение на величины $P_{K,i}$, так как чем больше вес результата измерения, тем меньше Q_{jj} и, следовательно, меньше значение функций (5) – (7).

Иной подход при многокритериальном уравнивании связан с переходом к методу Lр-оценок, если заменить значение функции (2) на другую

$$\Phi_1(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{P}_{n_i} \left| L_i(\mathrm{X}) \right|^{n_i}, \tag{9}$$

где вес результатов измерений [4, с. 200]:

$$\mathrm{P}_n = \left(\frac{c}{\sigma}\right)^n; \quad c^2 = \frac{n^{\frac{2}{n}}\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}. \tag{10}$$

С использованием гамма-функции для каждого показателя степени $n_i = (1{,}0 \le n_i \le 3{,}0)$; при $n = 1{,}0$ – метод наименьших модулей; $n = 2{,}0$ – МНК; $n = 3{,}0$ – метод наименьших кубов.

Применение целевых функций (5) – (7) возможно только при теоретическом решении вопросов поиска матрицы Q и скаляра:

$$\mu = \sqrt{\frac{V^{\mathrm{T}}\mathrm{P}_n V}{r}}. \tag{11}$$

Выбор показателя степени n_j ($n_j = n_{j-1} \pm 0{,}1$) при начальном $n = 2{,}0$ осуществим под условием минимума (5) или (6) или (7) с применением следующих трудоемких в вычислительном отношении формул [5]:

$$Q = F\mathrm{P}_n^{-1}F^{\mathrm{T}}, \tag{12}$$

$$F_{S,i} = \frac{\left(\hat{\mathrm{X}}_S\right)_i - \hat{\mathrm{X}}_S}{\delta_i}, \tag{13}$$

где S – номер параметра; i – номер измерения, в которое введено малое приращение δ_i, чтобы получить один столбец расширенной псевдообратной матрицы $F_{2t\times N}$; $\hat{X}$ – вектор уравненных под условием (9) координат определяемых пунктов.

В результате поиска методом проб и ошибок для каждого измерения индивидуальной степени n_i эффективность решения улучшилась по сравнению с МНК в 1,1 – 1,5 раза. Результаты оценки точности уменьшатся в 1,1 – 1,2 раза, если определять n_i не для каждого измерения, а для группы измерений, например, в полигонометрии – степень для углов n_β и для сторон n_S.

Столь значительное уменьшение M_i одновременно сопровождается и 1 – 5 % увеличением вероятности попадания в круг, эллипс или (в пространственной системе координат) эллипсоид ошибок. Вероятность появления события вычислялась из 10000 испытаний за 1 с машинного времени с применением относительной частоты события и формулы

$$\delta X = Fl, \tag{14}$$

где l - вектор ошибок измерений, полученный 10000 раз в соответствии со стандартом σ_i и датчиком псевдослучайных чисел, распределенных нормально.

Формула (13) для оценки точности универсальна, но требует большого количества машинного времени. Это связано с численным вычислением первых и вторых частных производных с применением нелинейного метода Ньютона.

Вместо численных методов предлагаем применять другой, аналитический подход к решению задачи по многокритериальной оптимизации линеаризованным методом Ньютона:

$$X^{(j+1)} = X^{(j)} - \left(A^T C A\right)^{-1} A^T diag\left(\frac{1}{n_i - 1}\right) CL\left(X^{(j)}\right), \tag{15}$$

где j – номер приближения; A – матрица коэффициентов линейных параметрических уравнений поправок, а

$$C = diag\left\{n_i\left(n_i - 1\right)P_{n_i}\left|L_i\left(X\right)\right|^{n_i - 2}\right\}. \tag{16}$$

Теперь вместо (13) можно применить аналитическое выражение

$$F = \left(A^T C A\right)^{-1} A^T C. \tag{17}$$

Если C из (16) подставить в (17), а затем полученное F перенести в (12), то для обратной матрицы весов окончательно получим

$$Q = G^{-1} A^T D A G^{-1}, \tag{18}$$

где используется информационная матрица Фишера $G = A^T CA$ и весовая матрица

$$D = CP_n^{-1}C = diag\left\{n_i^2\left(n_i - 1\right)^2 P_{n_i}\left|L_i\left(X\right)\right|^{2(n_i - 2)}\right\}. \tag{19}$$

Формула (18) удобна для программирования, но выражение (12) лучше потому, что с помощью F из (17) и равенства (14) легко осуществить вероятностные расчеты.

Если при многокритериальном уравнивании космической пространственной линейной засечки по измеренным с 10 исходных пунктов наклонным дальностям потребовалось с применением формул (9) - (13) и метода релаксации 200 с машинного времени на компьютере IBM PC/AT с тактовой частотой 667 МГц, то линеаризованный подход, согласно равенствам (15) - (17), занял 1 с машинного времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. Исследование операций / Под ред. А.А. Ляпунова. - М.: Наука, 1972.
2. Мещеряков Г.А., Волжанин С.Д., Киричук В.В. Об уравнивании измерений с учетом закона распределения ошибок // Геодезия и картография. - 1984. - № 2. - С. 9 - 11.
3. Тамутис З.П. Проектирование инженерных геодезических сетей. - М.: Недра, 1990. - 138 с.
4. Маркузе Ю.И., Бойко Е.Г., Голубев В.В. Геодезия. Вычисление и уравнивание геодезических сетей: Справ. пособие. - М.: Картгеоцентр - Геодезиздат, 1994. - 431 с.
5. Мицкевич В.И., Ялтыхов В.В. Уравнивание и оценка точности геодезических засечек под различными критериями оптимальности решения //Геодезия и картография. - 1994. - № 7. - С. 14-16.