ИНФОРМАТИКА

УДК 681.3.04

АЛГОРИТМЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ МАТРИЦЫ КОМПОНЕНТАМИ ДВУХ ВЕКТОРОВ

канд. техн. наук, доц. А.Ф. ОСЬКИН
(Полоцкий государственный университет)

Рассмотрены методы приближения элементов матрицы компонентами двух векторов. Предложены алгоритмы, решающие эту задачу.

При решении широкого спектра прикладных задач исследователю приходится иметь дело с матрицами. При этом, несмотря на существенный прогресс в области аппаратных средств вычислительной техники, весьма актуальной остается задача компактного хранения матриц в памяти машины. Известные методы аппроксимации [1], позволяющие представить элементы матрицы в виде комбинаций компонентов двух векторов, сложны и не всегда позволяют достичь удовлетворяющей исследователя точности.

В связи с этим нами разработаны два эффективных алгоритма, позволяющих представить матрицу либо в виде произведения, либо в виде суммы компонентов двух векторов.

Прежде чем перейти к описанию алгоритмов, докажем две теоремы, являющиеся теоретическим обоснованием мультипликативного и аддитивного алгоритмов.

Теорема 1. Пусть заданы два вектора $A=\{a_1,a_2,\ldots a_i,\ldots,a_n\}$ и $B=\{b_1,b_2,\ldots b_j,\ldots,b_m\}$, элементы которых есть положительные действительные числа, и матрица D, состоящая из n строк и m столбцов. Элементы d_{ij} этой матрицы есть произведения соответствующих элементов векторов A и B: $d_{ij}=a_i \cdot b_j$. Тогда существует два вектора $P=\{\pi_1,\pi_2,\ldots\pi_i,\ldots,\pi_n\}$ и $\Omega=\{\varpi_1,\varpi_2,\ldots\varpi_i,\ldots,\varpi_n\}$, такие, что $d_{ij}=C\cdot\pi_i\cdot\varpi_j$, где C – некоторая константа, π_i –среднее геометрическое i-той строки матрицы D, ϖ_j – среднее геометрическое j-того столбца матрицы D.

Доказательство.

Подсчитаем среднее геометрическое σ_i для каждой строки матрицы D:

$$\sigma_i=\sqrt[m]{\prod_{j=1}^{m} d_{ij}}=a_i\cdot\sqrt[m]{\prod_{j=1}^{m} b_j}\ .$$

Аналогично подсчитаем среднее геометрическое δ_j для каждого столбца матрицы D:

$$\delta_j=\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} d_{ij}}=b_j\cdot\sqrt[m]{\prod_{i=1}^{n} a_i}\ .$$

Пусть σ_i и δ_j образуют два новых вектора, элементы которых π_i и ϖ_j есть

$$\pi_i=\sigma_i,\ \varpi_j=\delta_j\,.$$

Тогда произведения

$$\pi_i\cdot\varpi_j=a_i\cdot\sqrt[m]{\prod_{j=1}^{m} b_j}\cdot b_j\cdot\sqrt[m]{\prod_{i=1}^{n} a_i}=a_i\cdot b_j\cdot\sqrt[m]{\prod_{j=1}^{m} b_j}\cdot\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}\ .$$

Обозначая произведение $\sqrt[m]{\prod_{j=1}^{m} b_j}\cdot\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}$ через $\frac{1}{C}$, где C – константа, окончательно получим

$$\pi_i\cdot\varpi_j=\frac{1}{C}\cdot a_i\cdot b_j$$

или

$$C\cdot\pi_i\cdot\varpi_j=a_i\cdot b_j=d_{ij}\,,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 2. Пусть заданы два вектора $A=\{a_1,a_2,\ldots a_i,\ldots,a_n\}$ и $B=\{b_1,b_2,\ldots b_j,\ldots,b_m\}$, элементы которых есть положительные действительные числа, и матрица D, состоящая из n строк и m столбцов. Элементы d_{ij} этой матрицы есть суммы соответствующих элементов векторов A и B: $d_{ij}=a_i+b_j$. Тогда существует два вектора $\mathrm{P}=\{\pi_1,\pi_2,\ldots\pi_i,\ldots,\pi_n\}$ и $\Omega=\{\varpi_1,\varpi_2,\ldots\varpi_i,\ldots,\varpi_n\}$, такие, что $d_{ij}=C+\pi_i+\varpi_j$, где C – некоторая константа, π_i – среднее арифметическое i-той строки матрицы D, ϖ_j – среднее арифметическое j-того столбца матрицы D.

Доказательство.

Подсчитаем среднее арифметическое σ_i для каждой строки матрицы D:

$$\sigma_i=\frac{1}{m}\cdot\sum_{j=1}^{m}d_{ij}=\frac{1}{m}\cdot\sum_{j=1}^{m}(a_i+b_j)=a_i+\frac{1}{m}\cdot\sum_{j=1}^{m}b_j.$$

Аналогично подсчитаем среднее арифметическое δ_j для каждого столбца матрицы D:

$$\delta_j=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}d_{ij}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_j)=b_j+\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}a_i.$$

Пусть σ_i и δ_j образуют два новых вектора, элементы которых π_i и ϖ_j есть

$$\pi_i=\sigma_i,\ \varpi_j=\delta_j.$$

Тогда суммы

$$\pi_i+\varpi_j=a_i+\frac{1}{m}\cdot\sum_{j=1}^{m}b_j+b_j+\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}a_i=\frac{1}{m}\cdot\sum_{j=1}^{m}b_j+\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}a_i+a_i+b_j.$$

Обозначая сумму $\frac{1}{m}\cdot\sum_{j=1}^{m}b_j+\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}a_i$ через $-C$, где C – константа, окончательно получим

$$\pi_i+\varpi_j=-C+a_i+b_j$$

или

$$C+\pi_i+\varpi_j=a_i+b_j=d_{ij},$$

что и требовалось доказать.

Основываясь на этих теоремах, построим мультипликативный, опирающийся на теорему 1, и аддитивный, опирающийся на теорему 2, алгоритмы аппроксимации.

Итак, предположим, что значения аппроксимируемой матрицы образованы произведениями элементов двух векторов, то используется мультипликативный алгоритм, если суммами - аддитивный.

Ничто не мешает нам построить адаптивный алгоритм, использующий оба подхода и минимизирующий ошибку аппроксимации. Однако пока (для простоты) предположим, что в аппроксимируемой матрице преобладают либо произведения, либо суммы, что позволяет эффективно использовать мультипликативный или аддитивный алгоритм соответственно. При этом оба этих алгоритма становятся основой для построения более сложных, но и более точных алгоритмов, использующих их комбинацию.

Пусть аппроксимируемая матрица имеет n строк и m столбцов. Тогда мультипликативный алгоритм аппроксимации будет состоять из следующих шагов:

1. Вычисляем среднее геометрическое для каждой из n строк матрицы. Обозначаем каждое из полученных значений σ_i.

2. Вычисляем среднее геометрическое для каждого из m столбцов матрицы. Обозначаем каждое из полученных значений δ_j.

3. Вычисляем постоянную C_{ij} для каждого элемента матрицы по формуле:

$$C_{ij}=\frac{d_{ij}}{\sigma_i\cdot\delta_j},\tag{1}$$

где d_i – заданные значения элементов аппроксимируемой матрицы.

4. Вычисляем постоянную C для аппроксимируемой матрицы как среднее арифметическое для всех C_{ij}:

$$C = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} C_{ij}}{m \cdot n}. \quad (2)$$

Аналогично строим аддитивный алгоритм. Пусть аппроксимируемая матрица имеет n строк и m столбцов. Тогда аддитивный алгоритм аппроксимации будет состоять из следующих шагов:

1. Вычисляем среднее арифметическое для каждой из n строк матрицы. Обозначаем каждое из полученных значений σ_i.

2. Вычисляем среднее арифметическое для каждого из m столбцов матрицы. Обозначаем каждое из полученных значений δ_j.

3. Вычисляем постоянную C_{ij} для каждого элемента матрицы по формуле:

$$C_{ij} = d_{ij} - (\sigma_i + \delta_j).$$

Здесь d_{ij} – заданные значения элементов аппроксимируемой матрицы.

4. Вычисляем постоянную C для аппроксимируемой матрицы как среднее арифметическое для всех C_{ij}:

$$C = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} C_{ij}}{m \cdot n}.$$

Рассмотрим теперь пример использования предложенных алгоритмов на практике. Пусть задана следующая матрица:

$$D = \begin{pmatrix} 12 & 78 & 42 \\ 10 & 65 & 35 \\ 28 & 182 & 98 \end{pmatrix}$$

Для нахождения аппроксимирующих векторов применим мультипликативный алгоритм. В соответствии с приведенным выше описанием, выполним следующие шаги.

1. Вычислим среднее геометрическое для каждой из строк матрицы, обозначая каждое из полученных значений σ_i:

$$\sigma_1 = \sqrt[3]{\prod_{j=1}^{3} d_{1j}} = \sqrt[3]{12 \cdot 78 \cdot 42} = 34{,}00231$$

$$\sigma_2 = \sqrt[3]{\prod_{j=1}^{3} d_{2j}} = \sqrt[3]{10 \cdot 65 \cdot 35} = 28{,}33526$$

$$\sigma_3 = \sqrt[3]{\prod_{j=1}^{3} d_{3j}} = \sqrt[3]{28 \cdot 182 \cdot 98} = 79{,}33872$$

2. Вычислим среднее геометрическое для каждой из строк матрицы, обозначая каждое из полученных значений δ_i:

$$\delta_1 = \sqrt[3]{\prod_{i=1}^{3} d_{i1}} = \sqrt[3]{12 \cdot 10 \cdot 28} = 14{,}97774$$

$$\delta_2 = \sqrt[3]{\prod_{i=1}^{3} d_{i2}} = \sqrt[3]{78 \cdot 65 \cdot 182} = 97{,}35534$$

$$\delta_3 = \sqrt[3]{\prod_{i=1}^{3} d_{i3}} = \sqrt[3]{42 \cdot 35 \cdot 98} = 52{,}42211$$

3. В соответствии с формулой (1) рассчитываем элементы матрицы c_{ij} для каждого элемента исходной матрицы

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} 0{,}023563 & 0{,}023563 & 0{,}023563 \\ 0{,}023563 & 0{,}023563 & 0{,}023563 \\ 0{,}023563 & 0{,}023563 & 0{,}023563 \end{pmatrix}$$

4. Вычислим постоянную C для аппроксимирующей функции, в соответствии с формулой (2):

$$C = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}}{n \cdot m} = 0{,}023563$$

Оценим погрешность приближения. С этой целью рассчитаем значения элементов матрицы E в соответствии с формулой $e_{ij} = C \cdot \sigma_i \cdot \delta_j$

$$E = \begin{pmatrix} 12{,}00011 & 78{,}00074 & 42{,}0004 \\ 10{,}0001 & 65{,}000{,}62 & 35{,}00033 \\ 28{,}00027 & 182{,}0017 & 98{,}00093 \end{pmatrix}$$

Матрицу относительных ошибок приближения err рассчитаем по формуле

$$err_{ij} = \frac{|d_{ij} - e_{ij}|}{d_{ij}}$$

Для нашего случая матрица err равна

$$err_{ij} = \begin{pmatrix} 0{,}000009157 & 0{,}000009487 & 0{,}000009524 \\ 0{,}000009539 & 0{,}000009538 & 0{,}000009428 \\ 0{,}000009536 & 0{,}000009341 & 0{,}000009418 \end{pmatrix}$$

Как видно, максимальная ошибка приближения не превосходит тысячные доли процента.

Таким образом, удалось построить алгоритмы приближения элементов матрицы компонентами двух векторов, обеспечивающие высокую точность и отличающиеся от известных простотой реализации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аникевич А.А., Грибов А.Б. Приближение элементов матрицы суммой соответствующих компонент двух векторов // Исследование операций и статистическое моделирование. Труды Ленингр. гос. ун-та. - 1972.-Вып. 1.-С. 116-127.