УДК 512.542

О КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ, ДОПУСКАЮЩИХ КОПРОСТОЙ АВТОМОРФИЗМ

А.М. ШМИДТ (Витебская ветеринарная академия)

Исследуется нормальное строение конечных групп, допускающих копростой автоморфизм, а также рассматриваются некоторые условия, при которых такие группы являются нильпотентными.

Введение. Если конечная группа допускает автоморфизм, порядок которого взаимно прост с порядком самой группы, то говорят, что группа допускает копростой автоморфизм. Данная статья посвящена изучению нормального строения таких групп и является логическим продолжением результатов, приведенных в [1 - 4].

Обозначения и терминология

В статье используются стандартные обозначения и терминология из [5, 6]:

$G, X, Y, \ldots$ – группы.

$|X|$ – порядок группы X.

$Y \lhd X$ ($Y \lhd\lhd X$) – Y является нормальной (субнормальной) подгруппой группы X.

$[X, Y]$ – совместный коммутант групп X и Y.

$N_X(Y)$ – нормализатор группы Y в группе X.

$C_X(Y)$ – централизатор группы Y в группе X.

$E(X)$ – слой группы X.

$F(X)$ – подгруппа Фиттинга группы X.

$F^*(X) = F(X)E(X)$.

$\Phi(X)$ – подгруппа Фраттини группы X.

$Y^x = x^{-1}Yx$.

$X \times Y$ – прямое произведение групп X и Y.

$X \leftthreetimes Y$ – полупрямое произведение групп X и Y, где $X \lhd X \leftthreetimes Y$ и $X \cap Y = 1$.

(a, b) – наименьший общий делитель чисел a и b.

p, q, r, s – простые числа.

π – некоторое пустое или непустое множество простых чисел.

π' – дополнение к π во множестве простых чисел.

$\pi(X)$ – множество простых чисел, делящих порядок группы X.

π-группа – группа, порядок которой делится на простые числа из множества π.

π'-группа – группа, порядок которой не делится ни на одно простое число из множества π.

S_p-подгруппа – силовская p-подгруппа X_p.

X_π – холловская π-подгруппа группы X.

$|X|_\pi$ – порядок холловской π-подгруппы группы X.

$O_p(X)$ – наибольшая нормальная p-подгруппа в группе X.

$O_{p'}(X)$ – наибольшая нормальная p'-подгруппа в группе X.

$<\ldots>$ – группа, порожденная множеством, указанным внутри знака.

Z_n – циклическая группа порядка n.

E_n – элементарная абелева группа порядка n.

1. Используемые понятия и результаты

1.1. Определение. Пусть X – конечная группа, обладающая свойствами:

(1) $|X| = q^{2k+1}p^c$, $p > 2$, $Z(X) = \Phi(X) = 1$;

(2) S_p-подгруппа P из X нормальна и самоцентрализуема в X;

(3) S_q-подгруппа T из X является экстраспециальной, $exp(T) = q$ при $q > 2$, $C_X(T) = Z(T)$, $c = q^k c_1$ или $T \cong Q_8$.

Тогда X назовем группой типа (p, q, k, c).

1.2. Определение. Если конечная группа X допускает автоморфизм y простого порядка r, $(|X|, r) = 1$, $C = C_X(y)$, а A и B – y-инвариантные подгруппы из X, причем $A \lhd B$, то фактор-группу $B/A = B^*$ назовем y-инвариантной секцией группы X.

1.3. Определение. Будем говорить, что y-инвариантная группа G имеет y-инвариантную секцию X типа (p, q, k, c), если выполняются следующие условия:

(1) X – группа типа (p, q, k, c);

(2) в группе $X \leftthreetimes \langle y\rangle$ ее S_p-подгруппа P является минимальной нормальной подгруппой;

(3) $Z(T) \lhd T \leftthreetimes \langle y\rangle$ и $T \leftthreetimes \langle y\rangle/Z(T)$ имеет только примарные собственные подгруппы, $C_X(y) = C$ есть или группа Фробениуса порядка p^aq, или $C = C_T(y) = Z(T)$;

(4) если $C_X(y) = Z(T)$, то $q = 2$ и $r = 2^k + 1$; если $|C| = p^aq$, то $|P:C_p| \geq p^{r-1}$.

1.4. Определение. K-группа – это группа, у которой простые неабелевы композиционные факторы являются известными простыми группами (из множеств $Chev \cup Spor \cup \{A_n, n \geq 5\}$).

1.5. Определение. Говорят, что группа X обладает свойством D_π^s, если она имеет, по крайней мере, одну разрешимую холловскую π-подгруппу, если любые две ее холловские разрешимые π-подгруппы сопряжены и если любая ее разрешимая π-подгруппа содержится в некоторой холловской разрешимой π-подгруппе. Значок D_π означает наличие тех же свойств для группы X, но без условия разрешимости.

Хорошо известные и наиболее часто употребляемые свойства y-инвариантных групп собраны в следующей лемме.

1.6 ЛЕММА [7, теорема IX.1.11; 8, леммы 2.2, 2.3; 9, следствия 0.3, 0.4, 0.5; 10, лемма 2.12; 11, теорема 6.2.2]. Пусть A есть π'-группа автоморфизмов π-группы X, обладающей свойством D_σ для некоторого $\sigma \subseteq \pi(X)$, $C = C_X(A)$. Тогда:

(1) по крайней мере, одна S_σ-подгруппа из X является A-инвариантной;

(2) любые две A-инвариантные S_σ-подгруппы из X сопряжены в X элементами из C;

(3) если S_σ-подгруппа из X нильпотентна (или X, или A – разрешимая группа), то любая A-инвариантная σ-подгруппа из X содержится в A-инвариантной S_σ-подгруппе из X;

(4) если $K \lhd X$ и K – A-инвариантная подгруппа, то $C_{X/K}(A) = C_X(A)K/K$;

(5) если $H \subseteq C$, то $N_X(H) = C_X(H)(N_X(H) \cap C)$;

(6) если $y \in A$, $y^r = 1$ и H есть y-инвариантная нормальная в X подгруппа, K – y-инвариантная подгруппа в X и $X = HK$, то $C_X(y) = C_H(y)C_K(y)$;

(7) если H – A-инвариантная подгруппа из X, то $N_X(H)$ и $C_X(H)$ являются A-инвариантными подгруппами;

(8) $X = [X, A]\cdot C$, $[X, A, A] = [X, A] \lhd X$; если $[X, X] = 1$, то $X = [X, A] \times C$;

(9) если H – A-инвариантная S_σ-подгруппа в X, то $C \cap H$ – S_σ-подгруппа в C.

В дальнейшем нам понадобится еще один вспомогательный факт, который сформулируем и докажем в следующей лемме.

1.7. ЛЕММА. Пусть X – конечная группа, допускающая автоморфизм y простого порядка r, $(|X|, r) = 1$, $C = C_X(y)$. Если $X = C\cdot B$, где B – y-инвариантная подгруппа из X, то $[y, X] = [y, B]$.

Доказательство. Каждый элемент группы X имеет вид: $x = ab$, где $a \in C$, $b \in B$. Тогда $[y, x] = [y, ab] = [y, b]\cdot[y, a]^b$ по лемме III.1.2 b) из [5]. Но $[y, a] = 1 = [y, a]^b$. Поэтому $[y, x] = [y, b] \in B$. Откуда $[y, X] \subseteq [y, B] \subseteq [y, X]$. Поэтому $[y, X] = [y, B]$ и лемма доказана.

2. Свойства π-разрешимых групп, допускающих копростой автоморфизм

2.1. Определение. Группа X называется π-разрешимой, если она обладает нормальным рядом, каждый фактор которого независимо от остальных является либо абелевой π-группой, либо π'-группой.

2.2. Определение. Если среди различных простых делителей каждого индекса композиционного ряда группы X содержится не более одного простого числа из π, то группа X называется π-отделимой.

Из определений 2.1 и 2.2 очевидным образом следует

2.3. Замечание. Если конечная группа X π-разрешима, то она $\pi \cup \{q\}$-отделима для любого $q \in \pi'$. Отметим также, что π-отделимость группы означает наличие в этой группе холловской S_π-подгруппы.

В своей книге [12] С.А. Чунихин сформулировал и доказал два важных результата:

2.4. ЛЕММА [12, теорема 1.15.1]. Если группа X π-отделима, то она обладает свойством D_σ^s для любого $\sigma \subseteq \pi$.

2.5. ЛЕММА [12, лемма 2.2.1]. Пусть S и S_1 – некоторые подгруппы группы X, и пусть для каждого $x \in X$ выполняется условие: $x^{-1}S_1x = y^{-1}S_1y$, где $y \in S$. Тогда $X = S\cdot N_X(S_1)$.

2.6. ТЕОРЕМА. Пусть X – π-разрешимая группа, A – ее группа автоморфизмов, $(|A|, |X|) = 1$. Пусть $\sigma = \pi \cup \{q\}$, где $q \in \pi'$ и $\tau \subseteq \sigma$. Тогда

(I) по крайней мере, одна S_τ-подгруппа из X является A-инвариантной;

(II) любые две A-инвариантные S_τ-подгруппы сопряжены в X элементами из $C_X(A)$;

(III) любая A-инвариантная τ-подгруппа из X содержится в A-инвариантной S_τ-подгруппе из X.

Доказательство. Утверждение (I) следует из замечания 2.3, а также лемм 2.4 и 2.5. Утверждение (II) следует из заключения (2) леммы 1.6.

Утверждение (III) докажем индукцией по порядку группы X. Случаи, когда $q \notin \tau$ хорошо известны. Поэтому рассмотрим случай, когда $q \in \tau$.

Пусть K – произвольная A-инвариантная τ-подгруппа из X. Пусть $Y = X \leftthreetimes A$ и L – минимальная нормальная подгруппа из Y, лежащая в X. Если X есть τ-подгруппа, то по лемме 2.4 X – разрешимая группа и утверждение (III) хорошо известно (лемма 1.6 (3)). Поэтому пусть X не есть τ-группа. Так как KL/L есть A-инвариантная подгруппа в группе X/L, то по индуктивному заключению KL/L содержится в A-инвариантной S_τ-подгруппе H/L группы X/L. Поэтому H есть A-инвариантная подгруппа, такая, что $K \subseteq H \subseteq X$ и $|H|_\tau = |X|_\tau$. Если $H \subset X$, то можно применить индукцию к H и получить утверждение (III). Поэтому пусть $H = X$. Тогда $\tau = \sigma$. Тогда L следует считать π'-группой в X (в противном случае по выбору L она должна быть π-группой и тогда $X = H$ есть τ-группа, что исключено выше). По уже доказанному утверждению (I) в X есть A-инвариантная S_σ-подгруппа R. Тогда $RL = X$. Пусть $1 \subseteq R \cap L = L_q$.

Предположим, что $KL \subset X$. Тогда по индукции K содержится в A-инвариантной S_σ-подгруппе S из KL. Тогда $S \cap L = L_q^a \lhd S$ для некоторого $a \in L$. Тогда в S существует A-инвариантная подгруппа KL_q^a (так как L_q^a есть A-инвариантная группа, как пересечение A-инвариантных групп S и L). Тогда $|R \cap KL| = = |KL_q^a|$. Но тогда $R \cap KL$ и KL_q^a являются A-инвариантными S_σ-подгруппами в KL. По утверждению (II) они сопряжены элементом $x \in C_{KL}(A)$. Поэтому $KL_q^a = (R \cap KL)^x \subseteq R^x$. Из $x \in C_{KL}(A)$ следует, что R^x есть A-инвариантная S_σ-подгруппа в X, содержащая K. Поэтому пусть $KL = X$.

Если L – разрешимая группа, то L есть примарная группа. Так как X не есть σ-группа, то L не есть q-группа. Поэтому L есть примарная s-группа для $s \in \pi'(X)$. Но тогда $RL = X$ есть разрешимая группа и утверждение следует из леммы 1.6 (3). Поэтому L – неразрешимая группа. Тогда 2 делит $|L|$ (ибо в противном случае порядок $|L|$ был бы нечетен и по известной теореме Томпсона – Фейта [13] группа L была бы разрешимой). Но тогда 2 не делит $|A|$ и A – разрешимая группа по теореме Томпсона – Фейта.

$L \lhd LKA$. Так как LKA есть $\sigma\cup\pi(A)$-отделимая группа (так как она $\pi\cup\pi(A)$-разрешима), то по лемме 2.4 KA содержится в холловской $\sigma\cup\pi(A)$-подгруппе S из LKA.

Тогда $LKA = LS$ и $L \cap S = L_q \lhd S$, где $A \subset S$. Поэтому L_q есть A-инвариантая S_q-подгруппа в L. Тогда KL_q есть A-инвариантая холловская σ-подгруппа в KL. Теорема доказана.

2.7. ТЕОРЕМА. Пусть X – конечная π-разрешимая группа с S_π-подгруппой H и $\sigma = \pi\cup\{q\}$, где $q \in \pi'$. Пусть HQ есть холловская σ-подгруппа из X (которая существует по лемме 2.4). Предположим, что для π-подгруппы F из H имеет место условие: $F \lhd\lhd HQ$, где Q пробегает различные силовские π'-подгруппы из X, взятые по одной для каждого $q \in \pi'$. Тогда $F \lhd\lhd X$.

Доказательство. Как следует из замечания 2.3 X является σ-отделимой группой. Так как X есть π-разрешимая группа, то либо $O_\pi(X) \neq 1$, либо $O_{\pi'}(X) \neq 1$.

Если $O_\pi(X) = T \neq 1$, то для группы $X^* = X/T$ утверждение следует по индукции. Тогда $FT/T \lhd\lhd X/T$, $FT \lhd\lhd X$, и $FT \subseteq H$. Из условия теоремы следует, что $F \lhd\lhd H$. В частности, $F \lhd\lhd FT$ и все доказано. Поэтому пусть $O_\pi(X) = 1$.

Пусть $O_{\pi'}(X) = K \neq 1$. По индукции $FK/K \lhd\lhd X/K$, $FK \lhd\lhd X$. Так как $K \cap Q$ является S_q-подгруппой в K, то из $F \lhd\lhd F(K \cap Q) \subseteq HQ$ следует, что F удовлетворяет условию теоремы в группе FK. Если $FK \subset X$, то применение индукции дает нам, что $F \lhd\lhd FK \lhd\lhd X$ и все доказано. Поэтому пусть $FK = X$. Тогда $Q \subseteq K$. По условию теоремы $F = H \lhd HQ$. С другой стороны, $FQ \cap K = Q \lhd FQ$. Поэтому $[F, Q] = 1$. Так как Q пробегает силовские подгруппы из K, которые порождают K, то $FK = F \times K$. Тогда $F \lhd\lhd X$. Теорема доказана.

В работе [1] авторами был сформулирован и доказан следующий факт.

2.8. ТЕОРЕМА [1, теорема 7]. Пусть X – конечная разрешимая группа, допускающая автоморфизм y простого порядка r, $(|X|, r) = 1$, $C = C_X(y)$. Пусть H есть y-инвариантная S_π-подгруппа из X и пусть $C \subseteq N_X([y, H])$. Пусть также выполняется одно из следующих условий:

(I) $2 \notin \pi(H)$;

(II) $2 \in \pi(H)$, но 2 не делит $|C|$;

(III) $2 \in \pi(H)$, 2 делит $|C|$, но X не имеет y-инвариантных секций X^* типа $(2, q, k, c)$ с $|C_{X^*}(y)| = 2$, $q \in \pi(X)$.

Тогда $[y, H] \lhd\lhd X$.

Если предположить, что группа H является произвольной π-подгруппой, а не холловской S_π-подгруппой, то в условиях π-разрешимости группы X, можно сформулировать следующую теорему.

2.9. ТЕОРЕМА. Пусть X – конечная π-разрешимая группа, допускающая автоморфизм y простого порядка r, $(|X|, r) = 1$, $C = C_X(y)$. Пусть H есть y-инвариантная π-подгруппа из X и пусть $C \subseteq N_X([y, H])$.

Пусть также выполняется одно из следующих условий:

(I) $2 \notin \pi(H)$;

(II) $2 \in \pi(H)$, но 2 не делит $|C|$;

(III) $2 \in \pi(H)$, 2 делит $|C|$, но X не имеет y-инвариантных секций X^* типа $(2, q, k, c)$ с $|C_{X^*}(y)| = 2$, $q \in \pi(X)$.

Тогда $[y, H] \lhd\lhd X$.

Доказательство. Предположим, что $O_\pi(X) = T \neq 1$. Из леммы 1.6 следует, что группа $X^* = X/T$ удовлетворяет условиям теоремы. Можно считать, что X^* не имеет y-инвариантных секций типа $(2, q, k, c)$, ибо в противном случае и группа X имела бы такие секции. По индуктивному заключению $[y, H^*] \lhd\lhd X^*$ и определение группы $O_\pi(X)$ дает нам, что $[y, H^*] = 1$, то есть $[y, H] \subseteq T$. По лемме 1.6 (8) $[y, [y, H]] = = [y, H]$. Ясно также, что $C \cap T \subseteq N_T([y, H])$. Поэтому, если $T \subset X$, то опять по индукции получаем, что $[y, H] \lhd\lhd T \lhd X$ и все доказано. Поэтому пусть $T = X$ – разрешимая группа.

Пусть $Y = X \leftthreetimes \langle y \rangle$ и P – минимальная нормальная p-подгруппа группы Y, $p \in \pi$, $X^0 = X/P$. По индуктивному заключению $[y, H^0] \lhd\lhd X^0$.

Ясно, что $[y, H^0]$ не есть p-группа, иначе $[y, H] \subseteq O_p(X)$ и все доказано. Пусть K – прообраз группы $[y, H^0]$ в X. Тогда K есть y-инвариантная подгруппа в X, содержащая $[y, H]$. Если $K \subset X$, то применение индукции дает нам, что $[y, H] \lhd\lhd K \lhd\lhd X$. Поэтому пусть $K = [y, H]P = X$. Если $[y, H] = X$, то все доказано. Поэтому пусть $[y, H] \subset X$. Из минимальности P как нормальной подгруппы группы Y следует тогда, что $[y, H] \cap P = 1$.

Предположим, что p делит $|[y, H]|$. По лемме 1.6 (1) в $[y, H]$ имеется y-инвариантная холловская p'-подгруппа B. Тогда BP есть собственная y-инвариантная подгруппа в X.

Предположим, что $C \cap P = D \neq 1$. Тогда $[y, H]D = L$ является подгруппой группы X по условию теоремы ($D \subseteq N_X([y, H])$). Ясно, что L есть y-инвариантная подгруппа в X (как произведение двух y-инвариантных подгрупп). Но тогда $D = P$, ибо в противном случае $L \cap P = D \lhd Y$, что противоречило бы минимальности P как нормальной подгруппы в Y. Но тогда $X = [y, H]C$ и по условию теоремы $[y, H] \lhd X$. В этом случае теорема доказана.

Поэтому $C \cap P = 1$, $C \subseteq [y, H]$ (иначе опять $[y, H]C = L$ и $1 \neq L \cap P \lhd Y$ влечет $L = X$ и $[y, H] \lhd X$).

Из $C \subseteq [y, H]$ следует, что $C \cap B = C \cap BP$. Так как B есть холловская p'-подгруппа в BP и $C \cap B \subseteq \subseteq N_{BP}([y, B])$ (в силу леммы 1.6 (8) $[y, B] \lhd B$), то по теореме 1.8 $[y, B] \lhd\lhd BP$. Если $[y, B] = 1$, то $B \subseteq C$. Тогда из $X = [y, H]P = B \cdot P_0 P = BX_p$, где P_0 есть y-инвариантная S_p-подгруппа в $[y, H]$, следует по лемме 1.7, что $[y, X] = [y, X_p]$ есть p-группа. Но тогда и $[y, H]$ есть p-группа. Но тогда утверждение следует по теореме из [3].

Поэтому $[y, B] \neq 1$. Но тогда $[[y, B], P] = 1$.

Тогда $C_0 = C_X(P)$ есть y-инвариантная подгруппа в X по лемме 1.6 (7). Если $C_0 = X$, то $P \subseteq Z(X)$ и тогда из $X = [y, H]P$ следует, что $[y, P] \lhd X$ и все доказано. Если же $C_0 \subset X$, то из p-скованности разрешимой группы X [6, теорема 18.4.4] следует, что либо $O_{p'}(X) \neq 1$, либо $C_X(O_p(X)) \subseteq O_p(X)$. Так как $1 \neq [y, B] \subseteq C_0$, то $C_X(O_p(X)) \not\subset O_p(X)$, ибо $[y, B]$ есть p'-группа. Значит $O_{p'}(X) \neq 1$. Пусть Q – минимальная нормальная q-подгруппа группы Y, лежащая в $O_{p'}(X)$.

Повторив те же рассуждения для Q, что приведены выше для P, мы получим, что $X = Q \leftthreetimes [y, H]$. Но выше показано, что $X = P \leftthreetimes [y, H]$. Так как $q \neq p$, то это невозможно.

Итак, p не делит $|[y, H]|$. Но тогда $[y, H]$ есть холловская подгруппа в X. Теперь утверждение следует из теоремы 2.8 ввиду того, что $[y, [y, H]] = [y, H]$ по лемме 1.6 (8).

Итак, впредь можно считать, что $O_\pi(X) = 1$. Так как X есть π-разрешимая группа, то $O_{\pi'}(X) = L \neq 1$.

По лемме 2.4 и теореме 2.6 X обладает y-инвариантной разрешимой S_σ-подгруппой M, где $\sigma = \pi \cup \cup \{q\}$, $q \in \pi'$.

Если $M \neq X$, то по индукции $[y, H] \lhd\lhd M$. Так как при $M \neq X$ q не исчерпывает простые π'-делители числа $|X|$, то утверждение следует из теоремы 2.7, когда q пробегает все простые π'-делители числа $|X|$.

Итак, пусть $M = X$ – разрешимая группа. Тогда L есть q-группа для $q \in \pi(X) - \pi$.

Рассмотрим y-инвариантную подгруппу $N = [y, H]L$ из X. Если $N \subset X$, то по индукции заключаем, что $[y, H] \lhd\lhd N$, так как $C \cap N \subseteq N_N([y, H])$. Но тогда $[[y, H], L] = 1$. Тогда $[y, H] \subseteq C_1 = C_X(L)$. Но X есть q-скованная группа [6, теорема 18.4.4]. Так как $O_\pi(X) = 1$, то должно быть $L \subseteq C_X(L)$. Противоречие, доказывающее, что $N = X$. Но тогда $[y, H]$ – холловская π-подгруппа разрешимой группы X. Теперь утверждение следует из теоремы 2.8. Теорема доказана.

3. Условия нильпотентности конечных групп, допускающих копростой автоморфизм.

3.1. ЛЕММА [14]. Пусть $X \in Chev(p)$, X – простая группа, допускающая такую группу автоморфизмов A, что $(|X|,|A|) = 1$. Тогда A сопряжена с некоторой подгруппой группы всех автоморфизмов основного поля, над которым определена группа X. (То есть, можно считать, что A состоит из полевых автоморфизмов группы X.)

3.2. ЛЕММА. Пусть $X \in Chev(p)$, X – конечная простая группа, допускающая автоморфизм y простого порядка r, $(|X|, r) = 1$, $C = C_X(y)$. Тогда, если $X \cong {}^dG(p^n)$, то $C \cong {}^dG(p^{n/r})$.

Доказательство. Это следует из леммы 3.1 и теоремы (9 – 1) (1) (d) в [15]. Лемма доказана.

3.3. ТЕОРЕМА. Пусть X – конечная разрешимая группа, допускающая автоморфизм y простого порядка r, $(|X|, r) = 1$, $C = C_X(y)$, $\sigma = \pi(C)$. Пусть для каждого $p \in \sigma$ для некоторой y-инвариантой S_p-подгруппы X_p из X выполняется $C_p \subseteq \Phi(X_p)$. Если $p = 2$, то пусть X не имеет y-инвариантных секций X^* типа $(2, q, k, c)$ с $C_{X^*}(y) \cong Z_2$, где $q > 2$, $q \in \pi(X)$.

Тогда X – нильпотентная группа.

Доказательство. Из заключений (1) и (3) леммы 1.6 следует, что все y-инвариантные холловские подгруппы из X удовлетворяют условиям теоремы. Поэтому, если $|\pi(X)| > 2$, то все собственные y-инвариантные холловские подгруппы из X являются по индуктивному заключению нильпотентными, и тогда, очевидно, X – нильпотентная группа.

Поэтому пусть $|\pi(X)| = 2$, $X = PQ$, где P и Q – y-инвариантные силовские p-подгруппа и q-подгруппа в X.

Пусть для определенности $O_p(X) = T \neq 1$. Из леммы 1.6 (4) и леммы III.3.4 в [5] следует, что группа $X^* = X/T$ удовлетворяет условиям теоремы. По индуктивному заключению X^* – нильпотентная группа (если в X^* есть y-инвариантные секции указанного в условии вида, то они есть и в X). В частности, $P \lhd X$. Если $\Phi(P) \neq 1$, то, полагая $\Phi(P) = T$ и применяя индукцию к группе X^*, получаем нильпотентность группы X^*, откуда из теоремы III.3.5 в [5] следует и нильпотентность самой группы X.

Поэтому пусть $\Phi(P) = 1$. Из условия теоремы тогда следует, что $C = C_q$. По лемме 1.6 (8) $[y, Q] \lhd Q$. Поэтому $C \subseteq N_X([y, Q])$. Из теоремы в [3] тогда следует, что $[y, Q] \lhd\lhd X$. Ясно, что $[y, Q] \neq 1$, ибо в противном случае по лемме 1.6 (8) $Q = [y, Q]\cdot C_Q(y) = C_Q(y) \subseteq \Phi(Q)$ ввиду условия. Так как $Q \not\subset \Phi(Q)$, то $[y, Q] \neq 1$, поэтому $O_q(X) \neq 1$.

Но выше показано, что $O_p(X) \neq 1$ влечет $P \lhd X$. Аналогично показывается, что $O_q(X) \neq 1$ влечет $Q \lhd X$. Поэтому $X = P \times Q$ и теорема доказана.

3.4. ТЕОРЕМА. Пусть X – конечная K-группа, допускающая автоморфизм y простого порядка r, $(|X|, r) = 1$, $C = C_X(y)$, $\sigma = \pi(C)$. Пусть для каждого $p \in \sigma$ для некоторой y-инвариантой S_p-подгруппы X_p из X выполняется $C_p \subseteq \Phi(X_p)$. Если $p = 2$, то пусть X не имеет y-инвариантных секций X^* типа $(2, q, k, c)$ с $C_{X^*}(y) \cong Z_2$, где $q > 2$, $q \in \pi(X)$. Пусть C не имеет простых неабелевых секций из множества $Chev(2)$.

Тогда X – нильпотентная группа.

Доказательство. Пусть X – контрпример минимального порядка.

Пусть также в X нет y-инвариантных секций X^* типа $(2, q, k, c)$ с $C_{X^*}(y) \cong Z_2$. (3.1)

Предположим, что X имеет неединичную y-инвариантную разрешимую нормальную подгруппу R. Тогда рассмотрим группу $X^* = X/T$. Из леммы 1.6 (4) и леммы III.3.4 в [5] следует, что группа X^* удовлетворяет условиям теоремы. Применение индукции к X^* дает нам ввиду (5.1) нильпотентность группы X^*. Но тогда X – разрешимая группа и утверждение следует из теоремы 3.3.

Итак, впредь можно считать, что в X нет неединичных y-инвариантных разрешимых нормальных подгрупп. (3.2)

В частности, из (4.2) и [13] следует, что X не может быть 2-скованной группой. По следствию 1.28 в [16], тогда слой группы $E(X) \neq 1$. Из (5.2) следует, что $E(X)$ – прямое произведение простых неабелевых групп, и $E(X) = F^*(X)$.

Пусть L – минимальная нормальная подгруппа группы $Y = X \leftthreetimes \langle y \rangle$, содержащаяся в $E(X)$. Тогда L – прямое произведение изоморфных простых неабелевых групп.

Если $L \subset X$, то применение индукции к L дает нам ввиду (4.1), что L – нильпотентная группа. Противоречие со строением L показывает, что $L = X$.

Рассмотрим отдельно два случая.

1. $X \cong X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$, $n > 1$.

Так как $y^r = 1$, то $X = X_1 \times X_1^{y} \times \ldots \times X_1^{y^i}$, $i \leq r-1$. Если $i < r-1$, то для $X_0 = X_1^{y^{r-1}}$ имеем $X_0 \subseteq X_1 \times X_1^{y} \times \ldots \times X_1^{y^i} = X \subseteq C_X(X_0)$, что противоречит неабелевости группы X_0. Поэтому $i = r-1$ и y переставляет X_1, $X_2, \ldots, X_n$ транзитивно, где $n = r$. По предположению 3.27 (vii) в [14], тогда $C = C_X(y) \cong X_1$ ($C =$

$= \{x \cdot x^{y} \cdot \ldots \cdot x^{y^{r-1}} \mid x \in X_1\}$). Но тогда для S_p-подгруппы X_p из X, указанной в условии теоремы, имеем: $C_p = C \cap X_p \subseteq \Phi(X_p)$. С другой стороны, $X = X_1 \times X_1^{y} \times \ldots \times X_1^{y^{i-2}} \leftthreetimes C$. Но тогда из леммы VI.4.7 в [5] следует, что $X_p = P_1 \times P_1^{y} \times \ldots \times P_1^{y^{r-2}} \leftthreetimes C_p$ для подходящей S_p-подгруппы P_1 из X_1. Но тогда по теореме III.3.2 (а) из [5] $X_p = P_1 \times P_1^{y} \times \ldots \times P_1^{y^{r-2}}$. Это противоречие показывает, что рассматриваемый случай не может иметь места.

2. $X \cong X_1$.

Из теорем 4.239 и 4.240 в [16] и леммы 3.2 следует, что $X \cong {}^{d}G(p^{n})$, а $C \cong {}^{d}G(p^{n/r})$.

Из теоремы (9 – 2) (5) в [15] следует, что $X \in Chev(2)$, ибо в противном случае S_2-подгруппа из C совпадает с S_2-подгруппой из X, что невозможно по условию ($C_2 \subseteq \Phi(X_2)$).

По условию теоремы C не имеет простых неабелевых секций из множества $Chev(2)$. Поэтому пусть C – не простая группа. По теореме 2.13 из [16] и лемме 3.2 это возможно лишь в следующих случаях:

(1) $C \cong A_1(2) \cong L_2(2) \cong S^3$, $X \cong L_2(2^r)$;

(2) $C \cong {}^2A_2(2) \cong U_3(2) \cong E_9 \leftthreetimes Q_8$, $X \cong U_3(2^r)$;

(3) $C \cong {}^2B_2(2) \cong Sz(2) \cong Z_5 \leftthreetimes Z_4$, $X \cong Sz(2^r)$;

(4) $C \cong A_1(3) \cong A_4$, $X \cong L_2(3^r)$.

По условию теоремы $C_2 \subseteq \Phi(X_2)$. Во всех перечисленных случаях (1) – (3) $C_2 \neq 1$. В то же время в случае (1) $\Phi(X_2) = 1$, в случаях (2) и (3) $\Phi(X_2)$ – элементарная абелева группа [17, теорема (3.2)]. Поэтому $C_2 \cong Q_8$ и $C_2 \cong Z_4$ не могут лежать в $\Phi(X_2)$. Поэтому случаи (1) – (3) невозможны. В случае (4) $\Phi(X_2) = 1$ или циклической группе. Поэтому $C_2 \cong E_4 \not\subset \Phi(X_2)$. Тем самым теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гарист Ю.Э. Пальчик Э.М. О конечных группах, допускающих копростой автоморфизм // Вопросы алгебры. - Гомель: Изд-во Гомельского гос. ун-та, 1997. - Выпуск 11. - С. 20 - 26.
2. Пальчик Э.М., Шмидт А.М. О конечных группах, допускающих копростой автоморфизм // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі Сер. фіз.-мат. навук. - 2001. - № 4. - С. 15 - 18.
3. Шмидт А.М. О конечных разрешимых группах с копростым автоморфизмом // Веснік Віцебскага дзяржаўнага універсітэта. - 2002. - № 2. - С. 150 - 151.
4. Пальчик Э.М., Шмидт А.М. О конечных группах с копростым автоморфизм // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. - Гомель: Изд-во Гомельского гос. ун-та. - 2002. - № 5 (14) (Вопросы алгебры - 18). - С. 29 - 42.
5. Huppert B. Endliche Gruppen, I. - Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1967. - 793 s.
6. Холл М. Теория групп. - М.: Иностранная литература, 1962. - 468 с.
7. Huppert B., Blackburn N. Finite groups, II. - Berlin: Springer-Verlag, 1982. - 531 s.
8. Rickman B. Groups wich admitt a fixed-point-free automorphism of order p^2 //J. Algebra. - 1979. - Vol. 59, № 1.-P. 77-171.
9. Гаген Т.М. Некоторые вопросы теории конечных групп // К теории конечных групп. - М.: Мир, 1979. - С. 13-97.
10. Глауберман Дж. О разрешимых сигнализаторных функторах на конечных группах // К теории конечных групп. - М.: Мир, 1979. - С. 112 - 143.
11. Gorenstein D. Finite groups - New York: Harper and Row, 1968. - 527 p.
12. Чунихин С.А. Подгруппы конечных групп. - Мн.: Наука и техника, 1964. - 158 с.
13. Feit W., Thompson J. Solvability of groups of odd order // Pacific J. Maht., 1963.-Vol. 13.-P. 775 - 1029.
14. Gorenstein D., Lyons R., Solomon R. The classification of finite simple groups // Math. Surveys and monographs, 1994. - V. 40, № 2, Providence, RJ: AMS. - 218 p.
15. Gorenstein D., Lyons R. The local structure of finite groups characteristic 2 type // Memoirs AMS. - 1983. - № 276. - P. 1-731.
16. Горенстейн Д. Конечные простые группы. Введение в их классификацию. -М.: Мир, 1985. - 352 с.
17. Гольдшмидт Д.М. 2-слияние в конечных группах // К теории конечных групп. - М.: Мир, 1979. - С. 144-200.