МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

О КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ, У КОТОРЫХ ВСЕ 3-ЙОДГРУППЫ НИЛЬПОТЕНТНЫ

д-р физ.-мат. наук, проф. Э.М. Пальчик, С.Ю. Башун
(Полоцкий государственный университет)

Доказывается, что конечная группа, у которой все $3'$-подгруппы нильпотентны, является Π'-разрешимой, где $\Pi = \{2, 3, 7, 13\}$. Порождение M всех неразрешимых подгрупп из X таково, что X/M есть разрешимая $(\{3\} \cup \Pi')$-группа, если 3 делит $|X/M|$.

Введение. В работе [1] доказано, что конечные группы, у которых все p'-подгруппы нильпотентны, являются разрешимыми, если $p > 3$. В этой же работе [1] отмечено, что если в конечной группе X все $3'$-подгруппы нильпотентны и в X нет секций изоморфных $L_2(7)$ или $L_3(3)$, то X также является разрешимой группой.

В этой работе мы исследуем конечные группы с нильпотентными $3'$-подгруппами без ограничений.

В работе рассматриваются только конечные группы. Используются обозначения и терминология из [2 – 4, 15].

Далее нам понадобятся некоторые сведения о группах лиевского типа.

Пусть X – простая алгебра Ли над полем комплексных чисел, l – ранг этой алгебры. Если $K = GF(q)$, где $q = p^n$, p – простое число, то через $X_l(q)$ обозначается группа Шевалле нормального типа, где X есть тип алгебры X_l. Известно, что $X \in \{A, B, C, D, E, F, G\}$ [2]. Через ${}^dX_l(q)$ обозначается соответствующая группа Шевалле скрученного типа, $d \in \{2, 3\}$. Всего имеется 16 серий конечных групп лиевского типа. Их множество обозначается символом *Chev* (*p*): $A_l(q)$; $B_l(q)$, $l \geq 2$; $C_l(q)$, $l \geq 3$; $D_l(q)$, $l \geq 4$; $F_4(q)$; $E_6(q)$; $E_7(q)$; $E_8(q)$; $G_2(q)$; ${}^2D_l(q)$, $l \geq 4$; ${}^2A_l(q)$, $l \geq 2$; ${}^2E_6(q)$; ${}^2B_2(q)$; ${}^3D_4(q)$; ${}^2G_2(q)$; ${}^2F_4(q)$.

Если U есть силовская p-подгруппа группы $G \in$ *Chev (p)*, то $N_G(U) = U \lambda H = B$ – подгруппа Бореля в G, H – подгруппа Картана в G, $N_G(H) = N$, N/H – группа Вейля, ассоциированная с G.

Известно, что если $Z(G) = 1$, то G – простая группа, исключая 8 случаев [3, теорема 2.13].

Кроме того, имеются 26 простых неабелевых спорадических групп (их множество обозначается *Spor*) и множество простых знакопеременных групп $\{A_n / n \geq 5\}$.

K-группа – это группа, у которой простые неабелевы композиционные факторы являются известными простыми группами (из множеств $Chev \cup Spor \cup \{A_n, n \geq 5\}$).

1. Основные используемые результаты

1.1. ТЕОРЕМА [6, 7]. Пусть p и q – два простых числа; m и n – натуральные числа. Предположим, что $p^m = q^n + 1$. Тогда имеет место одна из возможностей:

(1) $q = 2, p = 3, n = 3, m = 2$;

(2) $q = 2$, $m = 1$, n – степень числа 2, $p = q^n + 1$ – простое число Ферма;

(3) $p = 2$, $n = 1$, $q = p^m - 1$ – простое число Мерсенна (в частности, m – простое число).

1.2. ТЕОРЕМА [3, теорема 1.42]. Если $X \in$ *Chev* (*p*), то $F^*(H)$ есть p-группа для любой p-локальной подгруппы H в X.

1.3. ЛЕММА [3, с. 61]. Подгруппа Картана H группы $X \in$ *Chev* (*p*) всегда абелева, $H \neq 1$, исключая случаи, когда $X \in \{{}^dX_l(2), \ A_1(3) \cong L_2(3)\}$.

1.4. ЛЕММА [4, § 4; 8, разделы 8, 13, 14]. Пусть $X \in$ *Chev* (*p*), $q = p^n$. Пусть $X \cong X_l(q)$ – группа нормального типа. Тогда порядок подгруппы Картана в X есть число вида:

$$|H| = \frac{1}{d} \cdot (q-1)^l,$$

где $d=(l+1,q-1)$, если $X\in\{A_l(q)\}$;

$d=(2,q-1)$, если $X\in\{B_l(q),\ C_l(q),\ E_7(q)\}$;

$d=(4,q^l-1)$, если $X\in\{D_l(q)\}$;

$d=(3,q-1)$, если $X\in\{E_6(q)\}$;

$d=1$, если $X\in\{G_2(q),\ F_4(q),\ E_8(q)\}$.

Пусть теперь $X\cong{}^dX_l(q)$ – группа Шевалле изученного типа ($d=2$, 3). Тогда,

если $X\in\{{}^2D_l(q)\}$, $l>3$, то $|H|=\dfrac{1}{(4,q^n+1)}\cdot(q-1)^{l-1}\cdot(q+1)$;

если $X\in\{{}^2E_6(q)\}$, то $|H|=\dfrac{1}{(3,q+1)}\cdot(q+1)^2\cdot(q-1)^4$;

если $X\in\{{}^3D_4(q)\}$, то $|H|=(q-1)\cdot(q^3-1)$;

если $X\in\{{}^2B_2(q)\}$, то $|H|=(q-1)$, $q=2^{2m+1}$;

если $X\in\{{}^2F_4(q)\}$, то $|H|=(q-1)^2$, $q=2^{2m+1}$;

если $X\in\{{}^2G_2(q)\}$, то $|H|=(q-1)$, $q=3^{2m+1}$;

если $X\in\{{}^2A_l(q)\}$, то $|H|=\dfrac{1}{(l+1,q+1)}\cdot(q-1)^{\alpha}\cdot(q+1)^{\beta}$, $\alpha+\beta=l$.

1.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ [15, определение 1.15.1]. Если среди различных простых делителей каждого индекса композиционного ряда группы G содержится не более одного простого числа из Π, то группа называется Π-отделимой.

1.6. ЗАМЕЧАНИЕ. Из определения 1.5 следует, что если конечная группа Π-разрешима, то она $\Pi\cup\{q\}$ отделима для любого простого делителя $q\in\Pi'$.

1.7. ТЕОРЕМА [15, теорема 1.15.1; 16]. Если группа Π-отделима, то она обладает свойством D_σ^s для любого $\sigma\le\Pi$ (определение свойств D_σ^s есть в [15 и 16]).

2. Предварительные результаты

2.1. ЛЕММА. Пусть X – конечная простая группа, $X\in Spor$. Тогда в X имеются ненильпотентные $2'$- и $3'$-подгруппы.

Доказательство. Это известно из строения спорадических простых групп [4, § 5]. Лемма доказана.

2.2. ЛЕММА. Пусть X – конечная простая группа, $X\in\{A_n\,/\,n\ge5\}$. Тогда в X не все $3'$-подгруппы нильпотентны. Если $X\in\{A_n\,/\,n>6\}$, то в X не все $2'$-подгруппы нильпотентны.

Доказательство. В группе A_5 имеется ненильпотентная $3'$-подгруппа порядка $2\cdot5$. Так как $A_5\subset A_n$, $n>5$, то первое утверждение доказано.

Группа A_7 имеет ненильпотентную $2'$-подгруппу порядка $3\cdot7$. Так как $A_7\subset A_n$, $n>7$, то и второе утверждение верно. Лемма доказана.

2.3. ЗАМЕЧАНИЕ. В группах A_5 и A_6 все $2'$-подгруппы нильпотентны.

2.4. ЛЕММА. Пусть $X\cong L_2(p^n)\in A_1(p^n)$, где p – простое нечетное число. Тогда

(1) если в X все $3'$-подгруппы нильпотентны, то $X\cong L_2(7), L_2(3)$;

(2) если в X все $2'$-подгруппы нильпотентны, то $X\cong L_2(p)$, где p – простое число Ферма, либо $p^n=9$.

Доказательство. (1) $|X|=\dfrac{1}{2}\cdot p^n\cdot(p^n-1)(p^n+1)$ [2, теорема II.8.1]. Предположим, что простой нечетный делитель $t\ne3$ делит или $\dfrac{p^n-1}{2}$, или $\dfrac{p^n+1}{2}$. Тогда по теореме II.8.27 (3) в [2] X имеет ненильпотентную подгруппу Шмидта порядка $2t$ и $(3,2t)=1$. Противоречие с условием (1) показывает, что либо $p^n - 1 = 2\cdot 3^k$ и $p^n + 1 = 2^l$, либо $p^n + 1 = 2\cdot 3^k$ и $p^n - 1 = 2^l$. Но тогда $|X| = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3^k \cdot 2^l \cdot p^n = 2^l \cdot 3^k \cdot p^n$ или $|X| = \frac{1}{2}\cdot 2^l \cdot 2\cdot 3^k \cdot p^n = 2^l \cdot 3^k \cdot p^n$. Среди простых групп $L_2(p^n)$, $p > 2$, группы такого порядка известны [3, с. 20]. Это $L_2(5)$, $L_2(7)$, $L_2(17)$. Среди этих групп только $L_2(7)$ удовлетворяет условию (1). Среди непростых групп – только $L_2(3)$. Этим заключение (1) доказано.

(2) Пусть теперь имеет место условие (2). По теореме II.8.27 (7) в [2] $|N_X(P)| = p^n(p^n - 1)$, где P – силовская p-подгруппа в X. Пусть t – нечетный простой делитель числа $p^n - 1$. Тогда в $N_X(P)$ есть ненильпотентная подгруппа порядка $p^n \cdot t$ и $(2,\ p^n \cdot t) = 1$. Противоречие с условием показывает, что $p^n - 1 = 2^k$. Из теоремы 1.1 следует тогда, что либо $p^n = p$ есть простое число Ферма, либо $p^n = 3^2$. Лемма доказана.

2.5. ЛЕММА. Пусть $X \cong L_2(2^n) \cong A_1(2^n)$, $n > 1$. Тогда

(1) не все $3'$-подгруппы в X нильпотентны;

(2) в X все $2'$-подгруппы нильпотентны.

Доказательство. (1) по теореме II.8.27 (3) из [2] в X имеется диэдральная подгруппа порядка $2\cdot Z$, где Z делит $2^n + 1$ или $2^n - 1$. Если $2^n + 1 = 3^k$, то по теореме 1.1 либо $к = 2$, $n = 3$, либо $к = 1$ (тогда и $n = 1$, что противоречит условию). Если же $n = 3$, то $X \cong L_2(8)$. Но тогда 7 делит $(2^3 - 1)$ и в X есть ненильпотентная $3'$-подгруппа порядка $2\cdot 7$. Этим (1) доказано.

(2) Следует из теоремы II.8.27 в [2]. Лемма доказана.

Всюду в данном разделе 2 $X \in$ *Chev* (p) означает простую группу X.

2.6.ЛЕММА. Пусть $X \in A_l(p^n)$, p – простое число, $p > 2$, $l > 1$. Если в X все $3'$-подгруппы нильпотентны, то $X \cong L_3(3) \cong A_2(3)$.

Доказательство. Если $l \geq 4$, то в группе X есть секция, изоморфная S^5 (это группа Кокстера, $S^5 \cong W \cong N_X(H)/H$, где H – подгруппа Картана в X). (Смотри, например, [3, с. 85]. Поэтому $l \in \{3, 2\}$.

Группа X содержит секцию $X^* \cong A_1(p^n)$. Из леммы 2.4 следует, что условию удовлетворяют группы X^* с $p^n = 7$ или 3. Поэтому и в X $p^n = 3$ или 7. Пусть сначала $l = 2$. Тогда группа $A_2(3) \cong L_3(3)$ имеется в заключении леммы. Группа $A_2(7) \cong L_3(7)$ имеет подгруппу Картана H порядка $\frac{1}{3}\cdot 6^2 = 12$. Поэтому в X есть подгруппа порядка $X_7 \lambda Z_2$, которая ненильпотентна (в подгруппе Бореля).

Пусть $l = 3$. Группа $A_3(3) \cong L_4(3)$ содержит подгруппы A_6, $U_4(2)$, $L_3(3)$ [5]. Поэтому $A_3(3)$ не удовлетворяет условию по лемме 2.2.

Группа $A_3(7) \cong L_4(7)$ содержит секцию $A_2(7)$ и, как показано выше, у нее не все $3'$-подгруппы нильпотентны. Лемма доказана.

2.7. ЛЕММА. Пусть $X \in A_l(2^n)$, $l > 1$. Если в X все $3'$-подгруппы нильпотентны, то $X \cong A_2(2) \cong L_2(7)$.

Доказательство. Если $n > 1$, то $A_l(2^n)$ содержит подгруппу $A_1(2^n)$ и из леммы 2.5 следует, что в X не все $3'$-подгруппы нильпотентны. Поэтому пусть $n = 1$.

Если $l \geq 4$, то в группах $A_l(q) = L_{l+1}(q)$ имеется секция Кокстера $X^* \cong S^{l+1}$. Поэтому при $l + 1 \geq 5$ по лемме 2.2 в X не все $3'$-подгруппы нильпотентны. То есть $l \geq 4$ невозможно. Поэтому пусть $l \in \{2, 3\}$. То есть необходимо рассмотреть группы $A_2(2) \cong L_3(2) \cong L_2(7)$ и $A_3(2) \cong L_4(2) \cong A_8$. По лемме 2.2 группа $L_4(2)$ отпадает, так как не удовлетворяет условию теоремы. Группа $L_3(2) \cong L_2(7)$ удовлетворяет условию теоремы по лемме 2.4 и имеется в заключении леммы. Лемма доказана.

2.8. ЛЕММА. Пусть $X \in Chev\ (p)$, $q = p^n$, $X \not\cong A_l(q)$. Предположим, что в X все $3'$-подгруппы нильпотентны. Тогда, $X \cong {}^2A_2(3^2) \cong U_3(3) \cong G_2(2)'$.

Доказательство. (1) Пусть $X \cong B_l(p^n)$, $l \geq 2$. Пусть сначала $l = 2$. Тогда $B_2(q) \cong C_2(q)$ [10, с. 10]. Известно, что $U_2(q) \cong A_1(q)$ [3, с. 84]. Группа $C_2(p^n)$ содержит подгруппу ${}^2A_1(p^{2n}) \cong U_2(p^n) \cong A_1(p^n)$ [11, с. 71]. Поэтому из лемм 2.4 – 2.7 следует, что $p^n = 7$; 3. Из леммы 1.4 следует, что подгруппа Картана H из X имеет порядок $|H| = \frac{1}{2}(7-1)^2 = 18$. Поэтому в подгруппе Бореля $B = X_7 \lambda\ H$ имеется подгруппа порядка $7^4 \cdot 2$, которая по условию нильпотентна, что противоречит теореме 1.2. Поэтому впредь можно считать, что $l > 2$, или $p^n = 3$. Если $p^n = 3$, то $B_2(3) \cong {}^2A_3(2) \cong U_4(2)$ [10, с. 10]. Но группа $U_4(2)$ содержит подгруппу A_5 [5, с. 26]. По лемме 2.2 случай $p^n = 3$ отпадает. Если $l = 3$, то X содержит подгруппу $G_2(q)$ [11, с. 71], которая содержит подгруппы $A_2(q)$, ${}^2A_2(q^2)$. Из лемм 2.6 и 2.7 следует, что тогда $p^n = 3$ или 2. $B_3(3) \cong O_7(3)$, $B_3(2) \cong O_7(2) \cong PSp_6(2)$. В группе $PSp_6(2)$ имеется подгруппа, изоморфная S^6 и S^7 [12, § 11]. Из леммы 2.2 следует, что в $B_3(2)$ не все $3'$-подгруппы нильпотентны. В случае $X \cong B_3(3)$ в X имеется параболическая подгруппа N, такая, что $N / O_p(N) \cong B_2(3)$. Поэтому в X имеется секция, у которой не все $3'$-подгруппы нильпотентны. Поэтому случай $l = 3$ также исключается из рассмотрения.

Пусть $l > 3$. Тогда X содержит подгруппу, изоморфную $D_l(p^n) \cong O_{2l}(p^n)$ [11, с. 71]. Группа $D_l(p^n)$ содержит подгруппу, изоморфную $B_{l-1}(p^n)$ [11, с. 71]. Поэтому $B_4(p^n)$ содержит $B_3(p^n)$, у которой не все $3'$-подгруппы нильпотентны. Поэтому из $B_{l-1}(q) \subset B_l(q)$ следует, что группы $B_l(p^n)$ исключаются из рассмотрения.

(2) Пусть $X \cong C_l(p^n)$, $l \geq 2$.

Группа X содержит собственную подгруппу, изоморфную $C_{l-1}(p^n)$ [4, с. 33]. Так как $C_2(q) \cong B_2(q)$ [10, с. 10], то в силу случая (1) можно считать, что $l > 2$. В частности X содержит подгруппу, изоморфную $C_2(p^n) \cong B_2(p^n)$. Этот случай исключается ввиду предыдущего случая (1).

(3) $X \cong D_l(p^h)$, $l \geq 3$. Так как $D_3(q) \cong A_3(q)$ [10, с. 10], то пусть $l > 3$. X содержит подгруппу, изоморфную $B_{l-1}(q)$ [11, с. 71]. Ввиду случая (1) тогда в X не все $3'$-подгруппы нильпотентны. Поэтому $X \not\cong D_l(p^k)$.

(4) $X \cong {}^2A_l(p^{2n})$, $l \geq 2$. X содержит подгруппу, изоморфную ${}^2A_{l-1}(p^{2n})$ [11, с. 71]. В частности, X содержит подгруппу, изоморфную ${}^2A_2(p^{2n})$. Если $l \geq 3$, то X содержит подгруппу $C_2(q)$ [13] и по случаю (2) в X не все $3'$-подгруппы нильпотентны. Поэтому пусть $X \cong {}^2A_2(p^{2n}) \supset A_1(p^n)$. Из лемм 2.4 и 2.5 следует, что $p^n = 7$ или 3. Группа ${}^2A_2(3) \cong U_3(3)$ имеется в заключении теоремы. Если $X \cong {}^2A_2(7) \cong U_3(7)$, то из леммы 1.4 следует, что подгруппа Картана H группы X имеет порядок $\frac{1}{(3,8)} \cdot (7-1)^{\alpha}(7+1)^{\beta}$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 2$. Если H есть 3-группа, то $(7-1)^{\alpha}(7+1)^{\beta} = 3^k$, что, очевидно, невозможно. Поэтому 2 делит H и подгруппа $X_7 \lambda\ H_2$ по условию нильпотентна. Это противоречит теореме 1.2. Этим случай (4) исключается из рассмотрения.

(5) $X \cong {}^2D_l(p^n)$, $l \geq 4$. Группа X содержит подгруппу, изоморфную $B_{l-1}(p^n)$ [11, с. 71], которая имеет ненильпотентные $3'$-подгруппы по случаю (1). Противоречие с условием исключает этот случай из рассмотрения.

(6) $X \cong {}^2G_2(p^n)$. Эта группа содержит подгруппу, изоморфную $L_2(3^n)$, (напомним, что $p = 3$). Из леммы 2.4 следует, что $3^n = 3$. Но группа ${}^2G_2(3)$ имеет подгруппу ${}^2G_2(3)' \cong A_1(8) \cong L_2(8)$ [10, с. 10]. По лемме 2.5 тогда в X не все $3'$-подгруппы нильпотентны и этот случай исключается из рассмотрения.

(7) $X \cong G_2(p^n)$. Тогда в X содержится подгруппа, изоморфная $A_2(p^n)$ [11, с. 71]. Из лемм 2.6 и 2.7 следует, что тогда $p^n = 3$ или 2. Если $p^n = 2$, то имеем группу $G_2(2)$, у которой $G_2(2)' \cong {}^2A_2(3^2)$ [10, с. 10]. Но ${}^2A_2(3^2) \cong U_3(3)$ и эта группа указана в заключении теоремы. Пусть $p^n = 3$. Из [14] следует, что в $G_2(3)$ есть подгруппа ${}^2G_2(3)$, в которой не все $3'$-подгруппы нильпотентны по предыдущему случаю (6). Это противоречие показывает, что $X \not\cong G_2(3)$.

(8) $X \cong F_4(p^n)$. X содержит подгруппу $B_4(p^n)$ [11, с. 71]. Как показано в случае (1), в $B_4(p^n)$ не все $3'$-подгруппы нильпотентны. Этим случай (8) исключается из рассмотрения.

(9) $X \cong E_6(p^n)$. Тогда X содержит подгруппу $F_4(p^n)$ и по предыдущему случаю (8) группы $E_6(p^n)$ не удовлетворяют условию леммы.

(10) $X \cong {}^2E_6(q)$. Эта группа также содержит подгруппу $F_4(p^n)$ [11, с. 71] и этот случай исключается, как и (9).

(11) $X \cong E_7(q)$. Эта подгруппа содержит подгруппу ${}^2E_6(q^2)$ [11, с. 71] и по предыдущему случаю (10) исключается из рассмотрения.

(12) $X \cong E_8(q)$. X содержит подгруппу $A_8(q)$ [11, с. 71]. Из лемм 2.6 и 2.7 тогда следует, что в группе X не все $3'$-подгруппы нильпотентны.

(13) $X \cong {}^3D_4(q)$. X содержит подгруппу $G_2(q)$ [11, с.71]. Из рассмотрения случая (7) тогда следует, что не все $3'$-подгруппы нильпотентны.

(14) $X \cong {}^2F_4(q)$, $q = 2^{2m+1}$. По лемме 1.4 подгруппа Картана H в X имеет порядок $(q-1)^2$. Если $2^{2m+1} - 1 = 3^\alpha$, то по теореме 1.1 (3) $2^{2m+1} = 3 + 1 = 2^2$. Это невозможно. Поэтому H не есть 3-группа. Поэтому $r \neq 3$ делит $|H|$. Тогда $X_2 \lambda H_r$ есть $3'$-группа. По условию она нильпотентна. Это противоречит теореме 1.2. Поэтому $X \not\cong {}^2F_4(q)$.

(15) $X \cong {}^2B_2(q) \cong S_z(2^{2m+1})$. Так как X есть $3'$-группа, то не все ее подгруппы нильпотентны.

Лемма доказана.

4. Основной результат

4.1. ТЕОРЕМА. Пусть X есть конечная K-группа, у которой все $3'$-подгруппы нильпотентны. Тогда

(1) простые неабелевы композиционные факторы группы X исчерпываются группами множества $\{L_3(2),\ L_3(3),\ U_3(3)\}$;

(2) если $\Pi = \{2, 3, 7, 13\}$, то X является Π'-разрешимой группой (в частности, X всегда 5-разрешимая группа);

(3) $X = X_\Pi \cdot X_{\Pi'}$; $|X_\Pi : C_{X_\Pi}(X_{\Pi'})| = 3^\alpha$, $\alpha \geq 0$; $C_{X_\Pi}(X_{\Pi'}) \subseteq M \lhd X$; X/M есть разрешимая $\{\{3\} \cup \Pi'\}$-группа или Π'-группа, если 3 не делит $|X/M|$.

Доказательство. Заключение (1) следует из лемм 2.1 – 2.8.

(2) $\Pi(L_3(2)) = \Pi(U_3(3)) = \{2, 3, 7\}$, $\Pi(L_3(3)) = \{2, 3, 13\}$. Пусть $1 \neq T$ – минимальная нормальная подгруппа в X. Пусть сначала T есть разрешимая (элементарная абелева) группа. По индуктивному заключению X/T есть Π'-разрешимая группа. Тогда и X является Π'-разрешимой группой [15, 1.8]. Пусть теперь T – неразрешимая группа. Тогда T есть прямое произведение изоморфных простых неабелевых групп, указанных в заключении (1). Из заключения (1) следует, что T есть Π-группа. По индуктивному заключению группа X/T является Π'-разрешимой и опять X будет Π'-разрешимой [15, 1.8]. Этим заключение (2) доказано.

(3). По теореме 1.7 в Π'-разрешимой группе X по заключению (2) есть холловская Π-подгруппа X_Π и холловская Π'-подгруппа $X_{\Pi'}$. Кроме того, по теореме 1.7 в X существуют холловские

$\{\Pi' \cup \{q\}\}$-подгруппы H_1, H_2, H_3, H_4, где q пробегает соответственно простые делители 2, 7, 13 и 3. По условию теоремы H_1, H_2 и H_3 являются нильпотентными группами. Из теоремы 1.7 следует, что холловская Π'-подгруппа $X_{\Pi'} = H$ содержится в некоторых сопряженных с H_i, $i = 1, 2, 3$, подгруппах. Не нарушая общности, можно считать, что $H = H_1 \cap H_2 \cap H_3$. Поэтому $|X_\Pi : C_{X_\Pi}(H)| = 3^\alpha$, $\alpha \geq 0$. Пусть $C_{X_\Pi}(H) = L$. Тогда в X существует подгруппа $L \times H$ такая, что $X_\Pi \cap LH = L$. Все сопряженные с L в X подгруппы можно получить трансформированием элементами из X_Π. Поэтому $L^X = L^{X_\Pi}$, и $< L^X >= M \lhd X$. Ясно, что $|X_\Pi : M| = 3^\beta$, $\beta \geq 0$. Если в X имеются простые неабелевы композиционные факторы, то они покрываются группой M (ибо в противном случае композиционный фактор $K^* \cong L_3(2)$, $L_3(3)$, $U_3(3)$ имел бы нормальную подгруппу индекса 3^r, $r \geq 0$, что невозможно). Поэтому X / M есть разрешимая группа. Ясно также, что X / M есть или Π'-группа, или $\{\{3\} \cup \Pi'\}$-группа. Этим заключение (3) доказано. Теорема доказана.

4.2. ЗАМЕЧАНИЕ. Из результатов работы [17] следует, что в теореме 4.1 условие, что X должна быть K-группой, излишне. Достаточно рассмотреть неразрешимые 2-локальные подгруппы Y в X и учесть, что при $O(Y) = 1$ и условиях торемы 4.1 Y не может быть 2-скованной группой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Голубева О.В. О существовании подгрупп Шмидта у конечной группы // Весці НАН Беларусь Сер. фіз.-мат. навук. - 2001. - № 2. - С. 44 - 47.
2. Huppert B. Endliche Gruppen, I // Berlin, Springer. - Verlag. - 1967. - 793 p.
3. Горенстейн Д. Конечные простые группы. Введение в их классификацию. - М.: Мир. - 1985. - 352 с.
4. Gorenstein D., Lyons R. The local structure of finite groups of characteristic 2 type // Memoirs AMS. - 1983. - №276.-P. 1 -731.
5. Atlas of finite groups / J. Conway, R. Curtis, S. Norton, R. Parker, R. Wilson // Oxford: Clarendon Press. - 1985.-252 p.
6. Zsigmondy K. Zur theorie der Potenzreste // Monath. Math. Phis. - 1892. - Vol. 3. - S. 265 - 284.
7. Luneburg H. Ein einfacher Beweis fur den Satz Zsigmondy uber primitive Primteiler von A^n -1 // Springer Lecture Notes in Mathematics. - 1981. -№ 893. - S. 219-222.
8. Carter R. Simple groups of Lie type // London: Wiley - Interscience. - 1972. - 331 p.
9. Казарин Л.С. О проблеме С.А. Чунихина // Исследования по теории групп. - Свердловск: УНЦ АН СССР.-1984.-С. 81-99.
10. Gorenstein D., Lyons R., Solomon R. The classification of the finite simple groups // Math. Surveys and Monogr. - 1994. - Vol. 40, № 1. - 165 p.
11. Кондратьев А.С. Подгруппы конечных групп Шевалле // Успехи математических наук. - 1986. - Т. 41, № 1 (247).-С. 57-96.
12. Kantor W. Subgroups of classical groups generated by long root elements // Trans. AMS. - 1979. - Vol. 248, №2.-P.347-379.
13. Stensholt E. Certain embedding among finite groups of Lie type // J. Algebra. -1978. - Vol. 53, № 1. - P. 136 -187.
14. Kleidman P.B. The maximal subgroups of Chevalley groups $G_2(q)$ with q odd, the Lee groups ${}^2G_2(q)$, and their automophisms groups // J. Algebra. - 1988. - Vol. 117, № 1. - P. 30-71.
15. Чунихин С.А. Подгруппы конечных групп. - Мн.: Наука и техника. - 1964. - 158 с.
16. Hall Ph. Theorems like Sylows // Proc. London. Math. Soc. - 1956. - Vol. (3) 6, № 22. - P. 286 - 304.
17. Walter J. H. The B-conjecture; characterization of Chevalley groups // Memoirs AMS. - 1986. - Vol. 61, № 3. - P. 1 - 196.