ГЕОДЕЗИЯ И КАРТОГРАФИЯ

УДК 528.23

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ПОЛИКОНИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ ЛАГРАНЖА

Ю.А. ГУРЬЕВ
(Полоцкий государственный университет)

Приведены уточненные формулы для общего алгоритма геодезических проекций применительно к классу поликонических «в широком смысле» проекций Лагранжа, которые позволяют отображать области земного эллипсоида на плоскости с точностью, удовлетворяющей требованиям современных стандартов геодезических измерений.

В математической картографии широко рассмотрен вопрос выбора наилучших проекций с точки зрения минимизации их искажений. Многими учеными был предложен целый ряд проекций, отвечающих в той или иной степени понятию «наилучшая» или «идеальная» проекция. Широко данную проблему изучил и исследовал академик Чебышев, вследствие чего им была сформулирована теорема о наилучших равноугольных проекциях в 1853 году. Согласно этой теореме, наилучшими равноугольными проекциями для создания карт на конкретные территории являются те из них, в которых на контурах этих территорий натуральный логарифм масштаба является постоянной величиной [1]. Доказал эту теорему академик Граве в 1894 году. Смысл теоремы Чебышева - Граве заключается в следующем: изокола (линия равных искажений) должна по возможности совпадать или быть достаточно близкой к контуру изображаемой области.

В теории геодезических проекций добиться выполнения критерия Чебышева - Граве можно, взяв частные случаи наиболее известных видов проекций - цилиндрических, конических и азимутальных, формирование которых описано в монографии профессора В.П. Подшивалова [1]. Для нас, с точки зрения наилучших проекций, наибольший интерес представляют поликонические в «широком смысле» проекции, которые, с одной стороны, объединяют в себе частные случаи цилиндрических, конических и азимутальных проекций, а с другой - для них очень простые правила выполнения критерия Чебышева - Граве. Общие сведения о формировании поликонических проекций для целей картографирования обширных территорий даны в работах профессора Л.М. Бугаевского [2 - 3]. В математической картографии особое место занимает проекция Лагранжа [2, с. 213 - 216], которая имеет замкнутые формулы для вычисления основных численных характеристик проекций. Из общего алгоритма геодезических проекций, описанного в работах [1, 4], получаются как частные случаи: поликоническая ($\alpha \neq 1$); цилиндрическая ($\alpha = 0$); стереографическая ($\alpha = 1$) проекции. Параметр α определяет форму изоколы в виде эллипса, описанную вокруг изображаемой области.

В работе [2, с. 213 – 215] для поликонических «в широком смысле» проекций Лагранжа даны следующие уравнения:

– для плоских прямоугольных координат

$$X = \frac{k \cdot sin\delta}{1 + cos\delta \cdot cos(\alpha L)}, \quad Y = \frac{k \cdot cos\delta \cdot sin(\alpha L)}{1 + cos\delta \cdot cos(\alpha L)}; \tag{1}$$

– для масштаба изображения

$$m = \frac{\alpha k \cdot cos\delta}{r\left[1 + cos\delta \cdot cos(\alpha L)\right]}. \tag{2}$$

В работе [1] приведены уравнения связи, позволяющие выразить картографические координаты в функции геодезических:

$$tg\delta = \frac{(\beta u^{\alpha} - 1)}{2\beta u^{\alpha}};$$

$$u = exp(q); \tag{3}$$

$$\beta u^{\alpha} = \left(\frac{u}{u_0}\right)\left(\frac{\alpha + sin B_0}{\alpha - sin B_0}\right).$$

Если a и b - меридиональная и параллельная полуоси эллипса, наиболее подходящего к контуру изображаемой области, параметр a вычисляется по формуле

$$\alpha = \sqrt{1+\frac{1-(b/a)^2}{1+(b/a)^2}\cos^2 B_0}\ ,$$

где B_0 - геодезическая широта центральной точки проекции; q, L - соответственно изометрические широта и долгота текущей точки.

Формулы (1) - (3) описывают отображение поверхности земного эллипсоида на плоскости, при этом не рекомендуется их применение для областей, лежащих вблизи полюсов, когда искажения в этих проекциях достигают значительных величин [1 - 2].

Для геодезических проекций возможно допустить ряд ограничений, позволяющих формулы (1) привести к стандартному виду общего алгоритма:

$$\left.\begin{aligned} X &= X_0 + \sum_{j=1}^{n} C_j P_j \\ Y &= Y_0 + \sum_{j=1}^{n} C_j Q_j \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Здесь P_j и Q_j – гармонические функции приращений изометрических координат Δq и ΔL; C_j – коэффициенты разложений, полученные как частные производные от функции f по координатам [6].

Такой подход позволяет применить общий алгоритм геодезических проекций для класса поликонических проекций Лагранжа, описанный в работах [1,4]. Для этого, как показано в работе профессора В.П. Морозова [5], необходимо и достаточно получить изображение осевого меридиана.

Приведем уравнение изображения осевого меридиана на плоскости в поликонических проекциях Лагранжа, полученное в работе [1] из формул (1), опуская промежуточные математические преобразования:

$$X = \frac{2m_0 r_0 \alpha}{(\alpha^2 - \sin^2 B_0)}\left[\frac{\beta u^\alpha - 1}{\beta u^\alpha + 1}\right]. \qquad (5)$$

Тогда для приращения дуги осевого меридиана от широты B_0 центральной точки проекции до некоторого значения B текущей точки области можем записать

$$\Delta X = X - X_0 = \frac{2m_0 r_0}{(\alpha - \sin B_0)}\left[\exp(\alpha\Delta q) - 1\right]\cdot\left[1 + \frac{\alpha + \sin B_0}{\alpha - \sin B_0}\exp(\alpha\Delta q)\right]^{-1}. \qquad (6)$$

Приведем полученное выражение к виду, который представлен формулой (4) для X:

$$\Delta X = X - X_0 = \sum_{j=1}^{n} C_j P_j\ . \qquad (7)$$

Для преобразования выражения (6) в (7) применим формулы разложения в ряды по степеням малых величин для функций вида

$$f(t) = e^t \quad \text{и} \quad f(s) = (1+s)^{-1},$$

где $t = \alpha\Delta q$; $s = \dfrac{\alpha + \sin B_0}{\alpha - \sin B_0}\exp(\alpha\Delta q)$.

В результате тождественных преобразований в правой части выражения (6) получим выражения для коэффициентов C_j геодезических проекций, которые получаются на основе поликонических «в широком смысле» конформных проекций Лагранжа.

Избегая громоздких преобразований, запишем значения для девяти коэффициентов C_j:

$$\left.\begin{aligned}
&C_1 = m_0\frac{C}{V_0}\cos B_0\\
&C_2 = \frac{C_1}{2}\alpha(1-2d)\\
&C_3 = \frac{C_1}{6}\alpha^2(1-6d+6d^2)\\
&C_4 = \frac{C_1}{24}\alpha^3(1-14d+36d^2-24d^3)\\
&C_5 = \frac{C_1}{120}\alpha^4(1-30d+150d^2-240d^3+120d^4)\\
&C_6 = \frac{C_1}{720}\alpha^5(1-62d+540d^2-1560d^3+1800d^4-720d^5)\\
&C_7 = \frac{C_1}{5040}\alpha^6(1-126d+1806d^2-8400d^3+16800d^4-15120d^5+5040d^6)\\
&C_8 = \frac{C_1}{40320}\alpha^7(1-254d+5796d^2-40824d^3+126000d^4-191520d^5+141120d^6-\\
&-40320d^7)\\
&C_9 = \frac{C_1}{362880}\alpha^8(1-510d+18150d^2-186480d^3+834120d^4-1905120d^5+\\
&+2328480d^6-1451520d^7+362880d^8)
\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

Следует отметить, что коэффициенты C_j для поликонической проекции Лагранжа для $j = 8$ приведены в работе [1], где в седьмом члене имеет место опечатка и обозначение $d = \frac{\alpha + \sin B_0}{2}$ следует принимать как $d = \frac{\alpha + \sin B_0}{2\alpha}$.

Как известно, в проекциях Лагранжа, изменяя параметр α, можно получить частные случаи. Рассмотрим некоторые из них. Полагая в (8) $\alpha = 0$, имеем в цилиндрических проекциях Лагранжа:

$$C_1 = m_0\frac{C}{V_0}\cos B_0,\ C_2 = C_3 = \ldots = C_n = 0.$$

Полагая $\alpha = 1$, получаем значения коэффициентов для выражения (7), определяющих проекцию, которая известна как стереографическая проекция Гаусса:

$$C_1 = m_0\frac{C}{V_0}\cos B_0;$$

$$C_2 = -\frac{C_1}{2}\sin B_0;$$

$$C_3 = \frac{C_1}{12}\cos^2 B_0(2tg^2 B_0 - 1);$$

$$C_4 = \frac{C_1}{24}\sin B_0\cos^2 B_0(2 - tg^2 B_0);$$

$$C_5 = \frac{C_1}{240} cos^4 B_0 (2 - 11tg^2 B_0 + 2tg^4 B_0);$$

$$C_6 = \frac{C_1}{1440} sin B_0 \, cos^4 B_0 (26tg^2 B_0 - 17 - 2tg^4 B_0);$$

$$C_7 = \frac{C_1}{20160} cos^6 B_0 (180tg^2 B_0 - 114tg^4 B_0 + 4tg^6 B_0 - 17);$$

$$C_8 = \frac{C_1}{40320} sin B_0 \, cos^6 B_0 (62 - 192tg^2 B_0 + 60tg^4 B_0 - tg^6 B_0);$$

$$C_9 = \frac{C_1}{725760} cos^8 B_0 (62 - 1072tg^2 B_0 + 1452tg^4 B_0 - 247tg^6 B_0 + 2tg^8 B_0).$$

Если сравнить формулы поликонической проекции Лагранжа при $\alpha = 1$ и формулы для «квазистереографической» проекции Руссиля, полученные нами в работе [6], то при $e'^2 = 0$ соответствующие коэффициенты C_j равны между собой. Этот факт свидетельствует о том, что поликоническая проекция Лагранжа обобщает наиболее известные геодезические проекции.

Девять коэффициентов для поликонических проекций Лагранжа позволяют отображать области земного эллипсоида на плоскости в данной проекции с разностью изометрических широт и долгот до 16° с точностью не хуже 0.001 м в линейных величинах и 0.001″ в угловых. Для территорий меньших размеров обеспечивается более высокая точность отображения.

Вопрос о точности такого отображения применительно к цилиндрическим и азимутальным проекциям рассмотрен нами в работе [6]. Полученные результаты расширяют практическое применение поликонических проекций Лагранжа. Иногда в геодезической практике требуется создать единую плоскую прямоугольную систему координат для объектов, которые имеют сложную конфигурацию. Такими объектами могут быть, например, линейные сооружения большой протяженностью [7]. В таком случае наиболее удобным может оказаться переход от поверхности эллипсоида на плоскость прямоугольных координат в поликонической проекции Лагранжа, удовлетворяющей критерию Чебышева - Граве о наилучших проекциях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Подшивалов В.П. Теоретические основы формирования координатной среды для геоинформационных систем. - Новополоцк: ПГУ, 1998. - 125 с.
2. Бугаевский Л.М. Математическая картография. - М.: Златоуст, 1998. - 400 с.
3. Бугаевский Л.М. Теория картографических проекций регулярных поверхностей. - М.: Златоуст, 1999.- 144 с.
4. Подшивалов В.П. Геодезические проекции на основе поликонических проекций Лагранжа // Геодезия и картография. - 2001. - № 6. - С. 36 - 40.
5. Морозов В.П. Курс сфероидической геодезии. - М.: Недра, 1979. - 296 с.
6. Гурьев Ю.А. Уточненные формулы для класса геодезических проекций, представленного общей теорией описания // Вестник Полоцкого государственного университета. Сер. Фундаментальные науки. Т. 1,№ 3.-2002.-С. 36-40.
7. Подшивалов В.П., Маковский С.В., Козакевич А.И. Системы координат для линейных объектов // Геодезия, картография, кадастры и экология: Труды междунар. науч.-техн. конф., Новополоцк, 25 - 27 октяб. 2000 г. - Новополоцк: ПГУ, 2001. - С. 191 - 194.