УДК 624.04: 539.3

# К ВОПРОСУ О КРИТЕРИИ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ

*Л.С. Турищев*
Полоцкий государственный университет, Республика Беларусь
email: l.turichev@psu.by

*Рассматривается возможность единой математической формулировки задач упруго-пластической потери устойчивости согласно двум подходам: Энгессера-Кармана и Шенли. Рассуждения проводятся для модели стержня. Процесс деформирования систем за пределом упругости считается квазистатическим. Материал деформируемых элементов характеризуется билинейной диаграммой зависимости между напряжениями и деформациями. Показано, что критические нагрузки для двух подходов определяются согласно единому аналитическому критерию. Таким критерием является условие ветвления решений некоторой системы уравнений, характеризующих условия равновесия и отпорность стержневой системы отклонениям от исходной формы равновесия. Сделан анализ зависимости критической нагрузки от отпорности системы.*
***Ключевые слова:*** *потеря устойчивости, критическая нагрузка, подход Энгессера-Кармана, подход Шенли, билинейная диаграмма, ветвление решений.*

# TO THE QUESTION OF THE CRITERIA OF ELASTIC-PLASTIC BUCKLING

*L. Turichev*
Polotsk State University, Republic of Belarus
email: l.turichev@psu.by

*We consider the possibility of a unified mathematical formulation of the problems of elastic - plastic buckling according to two approaches: Engesser-Karman and Schenley. The reasoning is carried out for the rod model. The process of deformation of systems beyond the elastic limit is considered quasi-static. The material of deformable elements is characterized by a bilinear diagram of the relationship between stresses and strains. It is shown that the critical loads for the two approaches are determined according to a single analytical criterion. Such a criterion is the condition for branching solutions of a system of equations that characterize the equilibrium conditions and the resistance of the rod system to deviations from the initial form of equilibrium. The analysis of the dependence of the critical load on the resistance of the system is made.*
***Keywords:*** *loss of stability, critical load, the Engesser-Karman approach, Schenley's approach, bilinear diagram, branching solutions.*

При решении задач упруго-пластической устойчивости с использованием разветвленческого критерия известны два подхода: Энгессера-Кармана [1] и Шенли [2]. Часто считается, что указанные подходы приводят к различным постановкам задачи: в первом случае исследуется бифуркация форм равновесия при стационарной нагрузке ($dP$=0), а во втором – бифуркация процесса деформирования в условиях продолжающегося нагружения ($dP$>0). Кроме того, существенным затруднением при исследовании потери упруго-пластической устойчивости согласно подходу Шенли является отсутствие общих аналитических признаков достижения критического состояния в условиях продолжающегося нагружения [3].

Некоторые общие положения и идеи об особенностях применения подхода Шенли к исследованию упруго-пластической устойчивости были высказаны в [4], [5]. Представляя нагрузку в форме степенного ряда с неопределенными коэффициентами, Л.А. Шаповаловым в [6], [7] показана возможность общего подхода при решении задач упруго-пластической потери устойчивости для стержня и кольца.

В данной работе делается попытка единого математического подхода к решению задач упруго-пластической потери устойчивости стержневых систем, отличного от изложенного в [6], [7], и получения соответствующего аналитического критерия. Рассуждения проводятся на модели сжатого консольного стержня (рисунок 1), предложенной Пановко Я.Г. [8].

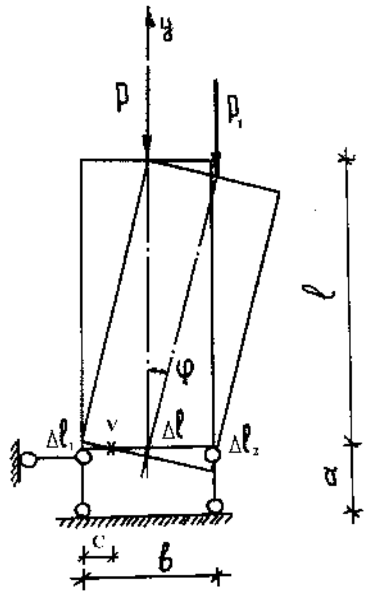

Рисунок 1. – Модель сжатого консольного стержня

Процесс деформации за пределом упругости считается квазистатическим. Материал деформируемых элементов характеризуется билинейной диаграммой зависимости между напряжениями и деформациями (рисунок 2).

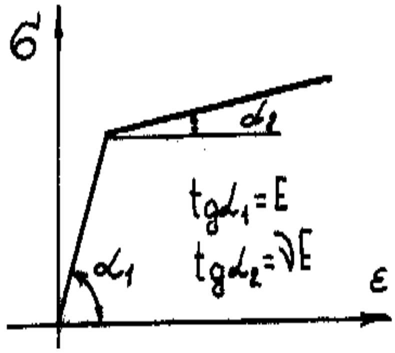


Рисунок 2. – Билинейная диаграмма зависимости между напряжениями и деформациями

Следуя [8], рассмотрим порядок определения критических нагрузок согласно подходу Энгессера-Кармана и Шенли. Для произвольного конечного отклоненного положения системы справедливы следующие уравнения равновесия

$$\begin{aligned} &\sum M_c \ldots -\left(\Delta N_1 + \Delta N_2\right)\frac{b}{2} + P_1 l \sin\varphi = 0 \\ &\sum y \ldots \left(-\Delta N_1 + \Delta N_2\right) - \left(P_1 - P\right) = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Приращения усилий в деформируемых стержнях $\Delta N_1, \Delta N_2$ связаны с изменениями их длин соотношениями

$$\Delta N_1 = EA\frac{\Delta l_1}{a}$$
$$\Delta N_2 = \nu EA\frac{\Delta l_2}{a} \quad (2)$$

Для определения изменения длин стержней справедливы формулы

$$\Delta l_1 = \frac{b}{2}tg\varphi - \Delta l$$
$$\Delta l_2 = \frac{b}{2}tg\varphi + \Delta l \quad (3)$$

Смысл $\varphi$ и $\Delta l$ очевиден из рисунка 1.

При определении критической нагрузки по Энгессеру-Карману уравнения равновесия (1) составляют для смежного отклоненного положения системы в предположении неизменности нагрузки $P_1=P$ ($dP=0$). С учетом соотношений (2), (3) они принимают вид

$$\sum M_c ... \frac{EA(1-\nu)}{2a}dl + \left[Pl - \frac{EAb^2}{4a}(1-\nu)\right]d\varphi = 0$$
$$\sum y ... (1+\nu)dl - \frac{(1-\nu)b}{a}d\varphi = 0 \quad (4)$$

Уравнения (4) образуют однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно двух бифуркационных величин $d\varphi$ и $dl$. Из условия равенства нулю определителя системы (4) находят значение критической нагрузки $P_{кр} = P_{**}$, где $P_{**} = \frac{EAb^2}{al}\frac{\nu}{1-\nu}$ - приведенно-модульная нагрузка.

Для определения критической нагрузки согласно Шенли уравнения равновесия (1) составляют при малых конечных отклонениях системы с учетом приращения нагрузки $P_1=P+\Delta P$, которые с учетом линеаризации относительно $\varphi$ имеют вид

$$\sum M_c ... \frac{EA(1-\nu)}{2a}\Delta l + \left[Pl - \frac{EAb^2}{4a}(1-\nu)\right]\varphi + (P+\Delta P)l\varphi = 0$$
$$\sum y ... \frac{EA(1+\nu)}{a}\Delta l - \frac{EA(1-\nu)b}{2a}\varphi - \Delta P = 0 \quad (5)$$

Неоднородную систему уравнений (5) разрешают относительно малых, но конечных величин $\Delta l$ и $\varphi$. Найденные величины подставляют в условие разгрузки одного из опорных стержней в отклоненном положении

$$\frac{\varphi b}{2} \geq \Delta l \quad (6)$$

и получают, что отклоненный процесс деформирования возможен при условии $P \geq P_*$.

Следовательно, критическая нагрузка $P_{кр} = P_*$, где $P_* = \frac{EAb^2}{al}\frac{\nu}{2}$ – касательно-модульная нагрузка.

При таком определении критической нагрузки, соответствующей концепции Шенли, затеняется математическая сущность задачи. Чтобы показать это все дальнейшие рассуждения будем проводить в предположении бесконечной малости величин $\Delta l$, $\varphi$, $\Delta P$.

Перепишем условие разгрузки одного из опорных стержней (6) в форме

$$\frac{b}{2}\frac{d\varphi}{dl} \geq 1 \tag{7}$$

Ввиду переменности левой части (7) это соотношение можно записать в виде равенства

$$\frac{b}{2}\frac{d\varphi}{dl} = k\,, \tag{8}$$

где $k$ – некоторый переменный коэффициент геометрической природы.

Как следует из левой части (8) коэффициент $k$ характеризует положение центра вращения (точка V на рисунке 1) при бесконечно малых отклонениях. Расстояние до точки V от левого стержня определяется по формуле

$$c = \frac{b(k-1)}{2k} \tag{9}$$

Рассматривая систему уравнений равновесия (5) совместно с условием (8), получим однородную систему трех линейных алгебраических уравнений относительно бифуркационных величин $dl$, $d\varphi$ и $dP$ при двух неизвестных параметрах: силовом – $P$ и геометрическом – $k$

$$\begin{gathered}\frac{EF(1-\nu)b}{2a}dl - \left[Pl - \frac{EF(1+\nu)b^2}{4a}\right]d\varphi = 0;\\ \frac{EF(1+\nu)}{a}dl - \frac{EF(1-\nu)b}{2a}d\varphi - dP = 0;\end{gathered} \tag{10}$$

$$kdl - \frac{b}{2}d\varphi = 0\,. \tag{11}$$

Дальнейшее решение задачи заключается в отыскании критических значений параметра нагрузки, при которых однородная система линейных алгебраических уравнений (10), (11) имеет нетривиальные решения. Из условия равенства нулю определителя этой системы уравнений получим выражение для критической нагрузки как функцию от $k$

$$P_{кр} = \frac{EAb^2}{al}\Phi(k,\nu) \tag{12}$$

где

$$\Phi(k,\nu) = \frac{k(1+\nu)-(1-\nu)}{4k} \tag{13}$$

Формула (12) связывает критическую нагрузку с параметром $k$. Безразмерная функция $\Phi(k,\nu)$ описывает отпорность системы бесконечно малым отклонениям. Следовательно, введенный параметр $k$ следует рассматривать как геометрическую характеристику, которая наряду с физической характеристикой $\nu$ влияет на отпорность системы таким отклонениям. Из условия совместности соотношения (8) с уравнениями равновесия следует, что *k* может изменяться в следующем интервале $k \in \left[1,\infty\right)$. Таким образом, формула (12) определяет плотное множество критических нагрузок.

Используя второе уравнение (10), получим

$$\frac{dP}{d\varphi} = \frac{EFb}{2a}\left[\frac{\left(1+\nu\right)}{k} - \left(1-\nu\right)\right] \tag{14}$$

Выражение (14) можно рассматривать как начальное условие задачи, определяющее стационарность или нестационарность ветви кривой равновесных состояний в точке бифуркации. На рисунке 3 приведены графики, характеризующие критическое состояние модели стержня согласно полученным зависимостям (9), (13), (14) для случая $\nu = 0.5$

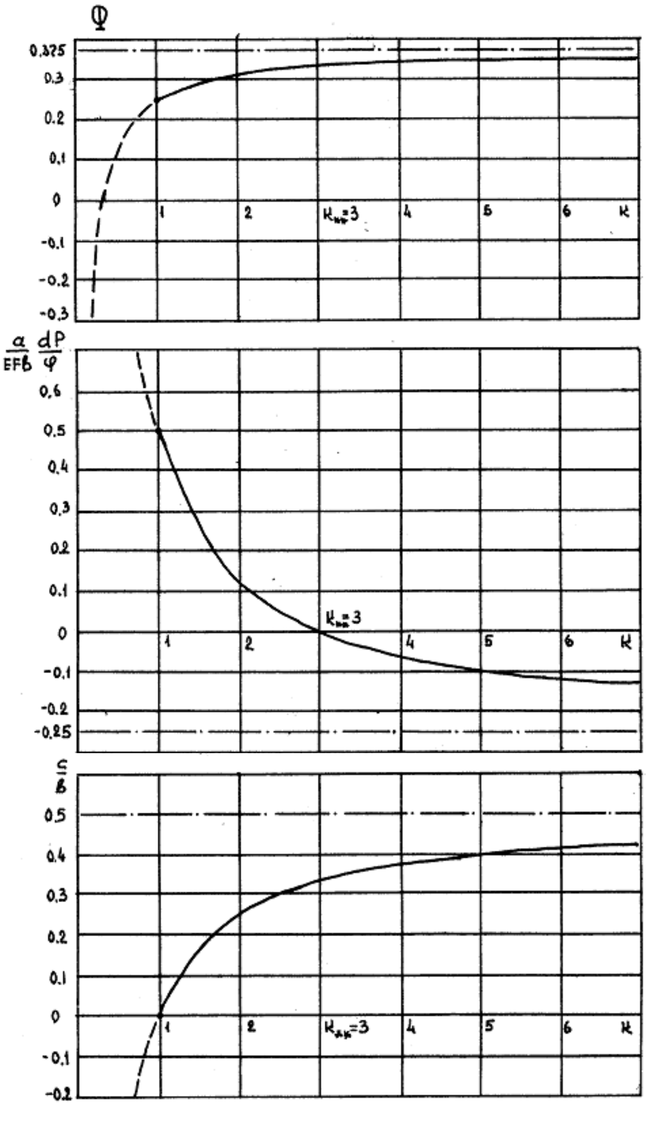


Рисунок 3. – Графики, характеризующие критическое состояние модели стрежня

Из графиков, приведенных на рисунке 3, следует:

1. При $k=1$, когда $c = 0,\ \ \frac{dP}{d\varphi} > 0$ и $P_{кр} = P_*$, происходит бифуркация процесса деформирования при наименьшем значении отпорности системы боковым отклонениям.

2. При $k = k_{**} = \dfrac{1+\nu}{1-\nu}$, когда $c = c_{**} = \dfrac{\nu}{1+\nu} b$, $\dfrac{dP}{d\varphi} = 0$ и, $P_{кр} = P_{**}$ происходит бифуркация форм равновесия при значении отпорности системы $\Phi\left(k_{**}, \nu\right) = \dfrac{\nu}{1+\nu}$.

3. При всех $k \in \left(1, k_{**}\right)$, когда $c \in \left(0, c_{**}\right)$, $\dfrac{dP}{d\varphi} > 0$ $c \in \left(0, c_{**}\right)$, $\dfrac{dP}{d\varphi} > 0$ и $P_{кр} \in \left(P_{*}, P_{**}\right)$ $P_{кр} \in \left(P_{*}, P_{**}\right)$, происходит бифуркация процесса деформирования при промежуточных значениях отпорности системы и в условиях увеличения действующей нагрузки.

4. При всех $k \in \left(k_{**}, \infty\right)$, когда $c \in \left(c_{**}, \dfrac{b}{2}\right)$, $\dfrac{dP}{d\varphi} < 0$ и $P_{кр} \in \left(P_{**}, \dfrac{EAb^2(1+\nu)}{4al}\right)$, происходит бифуркация процесса деформирования при промежуточных значениях отпорности системы, но с уменьшением действующей на систему нагрузки. Такой тип бифуркации возможен для стержней, входящих в состав разгружающихся систем [9], [10].

5. Все значения $k \in (0,1)$ несовместны с уравнениями равновесия. Соответствующие участки показаны пунктиром.

Заметим, что если при решении задачи упруго-пластической устойчивости с использованием разветвленческого критерия исходить из предположения о нестационарности внешней нагрузки (*dP*≠0), т.е. рассматривать бифуркацию процесса, то значение *k* в принципе не может быть определено из основных уравнений задачи. Оно определяется характером и интенсивностью внешнего возмущения. Самому неблагоприятному случаю соответствует значение *k*=1.

На основании вышеизложенного можно сделать следующие выводы. Задачи об упруго-пластической потере устойчивости согласно двум подходам разветвленческой концепции в математическом отношении едины. Их можно формулировать как задачи на ветвление решений некоторой системы уравнений. В их число наряду с уравнениями равновесия должны включаться дополнительные уравнения, характеризующие отпорность стержневой системы отклонениям от исходной формы равновесия. Соответствующие критические нагрузки находятся из единого аналитического условия – условия ветвления решений этой системы уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Karman T. Untersuchungen uber Knickfestigkeit, Mitteilungen uber Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, VDI, Heft 81, 1909. - P.54-62.
2. Shanley F.R. Inelastic Column Theory, Journal of the Aeronautical Sciences, vol. 14, 1947, №5. – P.88-98.
3. Кайдалов Н.Н. Качественная теория неупругой устойчивости элементов судового корпуса. – Л.: Судостроение, 1972. – 174 с.
4. Клюшников В.Д. Бифуркация процесса деформирования и концепция продолжающегося нагружения // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1972. - №5. – С.86-94.
5. Симеонов В.С. Об устойчивости упруго-пластического стержня// Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1972. - №5. – С.112-114.
6. Шаповалов Л.А. О бифуркации форм равновесия упруго-пластического стержня и кольца в условиях продолжающегося нагружения// Прикладная математика и механика. 1971. – Т.35, ВЫП. 2. – С.104-109.
7. Шаповалов Л.А. Об одной простейшей модели сжатого упруго-пластического стержня в условиях продолжающегося нагружения// Тезисы IV Всесоюзной конференции по проблемам устойчивости в строительной механике. 1972. – С.42.
8. Пановко Я.Г. О современной концепции упруго-пластического продольного изгиба// В кн. «Проблемы устойчивости в строительной механике». – М.: Стройиздат, 1965. – С.92-103.
9. Ильюшин А.А. Об упруго-пластической устойчивости конструкций, включающих стержневые элементы // Инженерный сборник. 1960. – Т.27. – С.87-91.
10. Зубчанинов В.Г. Устойчивость стержней как элементов конструкций за пределом упругости// Инженерный сборник. 1960. – Т.27. – С.101-112.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«ПОЛОЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

# АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ КОМПЛЕКС: ПРОБЛЕМЫ, ПЕРСПЕКТИВЫ, ИННОВАЦИИ

ЭЛЕКТРОННЫЙ СБОРНИК СТАТЕЙ
III МЕЖДУНАРОДНОЙ НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ

(Новополоцк, 29–30 апреля 2021 г.)

*Текстовое электронное издание*

Новополоцк
Полоцкий государственный университет
2021

Об издании – 1, 2

1 – дополнительный экран – сведения об издании

УДК 72:624/628+69(082)

Одобрено и рекомендовано в качестве электронного издания
Советом инженерно-строительного факультета (протокол № 8 от 27.10.2021 г.)



**АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ КОМПЛЕКС: ПРОБЛЕМЫ, ПЕРСПЕКТИВЫ, ИННОВАЦИИ** [Электронный ресурс] : электрон. сб. ст. III междунар. науч. конф., Новополоцк, 29–30 апр. 2021 г. / Полоц. гос. ун-т ; Редкол.: Д. Н. Лазовский (председ.) [и др.]. – Новополоцк : Полоц. гос. ун-т, 2021. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM).

ISBN 978-985-531-779-2.

Рассмотрены вопросы архитектуры и градостроительства в современных условиях, прогрессивные методы проведения инженерных изысканий и расчета строительных конструкций. Приведены результаты исследований ресурсо- и энергосберегающих строительных материалов и технологий, энергоресурсосберегающие и природоохранные инновационные решения в инженерных системах зданий и сооружений. Проанализированы организационные аспекты строительства и управления недвижимостью, проблемы высшего архитектурного и строительного образования.

Для научных и инженерно-технических работников исследовательских, проектных и производственных организаций, а также преподавателей, аспирантов, магистрантов и студентов строительных специальностей учреждений образования.

*Сборник включен в Государственный регистр информационного ресурса.*
*Регистрационное свидетельство № 3671815379 от 26.04.2018 г.*

211440, ул. Блохина, 29, г. Новополоцк, Беларусь
тел. 8 (0214) 53 53 92, e-mail: a.bakatovich@psu.by; l.parfenova@psu.by

**№ госрегистрации 3671815379**
**ISBN 978-985-531-779-2**

2 – дополнительный титульный экран – производственно-технические сведения

Для создания текстового электронного издания «Архитектурно-строительный комплекс: Проблемы, перспективы, инновации» использованы текстовый процессор Microsoft Word и программа Adobe Acrobat XI Pro для создания и просмотра электронных публикаций в формате PDF.

**АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ КОМПЛЕКС:**
**ПРОБЛЕМЫ, ПЕРСПЕКТИВЫ, ИННОВАЦИИ**

ЭЛЕКТРОННЫЙ СБОРНИК СТАТЕЙ
III МЕЖДУНАРОДНОЙ НАУЧНОЙ КОНФЕРЕНЦИИ

(Новополоцк, 29–30 апреля 2021 г.)

Технический редактор *И. Н. Чапкевич.*
Компьютерная верстка *А. А. Прадидовой, С.Е. Рясовой.*
Компьютерный дизайн обложки *Е. А. Балабуевой.*

Подписано к использованию 09.11.2021.
Объем издания: 21,05 Мб. Тираж 3 диска. Заказ 420.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования «Полоцкий государственный университет».

Свидетельство о государственной регистрации
издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/305 от 22.04.2014.

ЛП № 02330/278 от 08.05.2014.

211440, ул. Блохина, 29,
г. Новополоцк,
Тел. 8 (0214) 59-95-41, 59-95-44
http://www.psu.by