МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

ИНЪЕКТОРЫ КОНЕЧНЫХ π-РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП

д-р физ.-мат. наук, проф. Н.Т. ВОРОБЬЕВ,
канд. физ.-мат. наук, доц. Е.Н. ЗАЛЕССКАЯ
(Витебский государственный университет им. П.М. Машерова)

Рассматривается локальный метод Хартли и его применение к решению задачи описания строения новых классов сопряженных $\mathfrak{F}$*-инъекторов* π*-разрешимых групп для произвольного непустого множества простых чисел* π*. Доказано, что любая конечная* π*-разрешимая группа* G *имеет единственный класс сопряженных* π*-нильпотентных инъекторов, каждый из которых является произведением* π'*-радикала группы* G *и нильпотентного* π*-инъектора некоторой* π*-холловской подгруппы из* G*. В частности, любая конечная* π*-разрешимая группа* G *имеет инъекторы ограниченной* π*-нильпотентной длины и любые два из них сопряжены в* G*.*

Введение. Основополагающей в теории классов конечных разрешимых групп является теорема Гашюца – Фишера – Хартли [1] о том, что в любой конечной разрешимой группе для любого класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ существуют $\mathfrak{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены. При этом в поле зрения многих исследователей находились задачи существования и сопряженности инъекторов в произвольных или частично разрешимых конечных группах.

Напомним, что если $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга, то подгруппу V группы G называют ее $\mathfrak{F}$-инъектором [2], если $V \cap N$ является максимальной из подгрупп группы N, принадлежащих $\mathfrak{F}$, для любой субнормальной подгруппы N из G.

В последующем многие результаты в теории классов групп посвящены приложениям этой теоремы как при изучении структуры классов групп, так и при описании свойств самих групп (см. главы IX – X [2]). В этом направлении Форстером [3] установлено существование $\mathfrak{N}$-инъекторов, где $\mathfrak{N}$ – класс всех нильпотентных групп, в классе $\mathfrak{E}$ всех конечных групп, а Блессенолем и Лауе [4] доказаны существование и сопряженность, а также получена характеризация в классе $\mathfrak{E}$ инъекторов для класса $\mathfrak{N}^*$ квазинильпотентных групп. Отдельные результаты о существовании при дополнительных ограничениях на класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ с условием $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}^*$ были доказаны в работе [5]. Позднее, В.С. Монаховым [6], было установлено существование инъекторов в классе $\mathfrak{E}$ для класса $\mathfrak{S}_\pi$ всех конечных разрешимых π-групп и, в частности, для класса $\mathfrak{S}$ всех конечных разрешимых групп. Ориентиром для поиска разрешимых $\mathfrak{X}$-инъекторов в классе $\mathfrak{E}$ служит

Проблема (Л.А. Шеметков [7]). Пусть $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{S}$ – класс Фиттинга. Верно ли, что каждая конечная неразрешимая группа обладает $\mathfrak{X}$-инъектором?

Понятно, из указанных выше результатов следует, что проблема Л.А. Шеметкова положительно решена только для $\mathfrak{X} \in \{\mathfrak{S}, \mathfrak{S}_\pi, \mathfrak{N}\}$.

Самостоятельный интерес представляет также задача отыскания классов сопряженных инъекторов в π-разрешимых группах. Перспективность такой задачи определяет известная в теории групп теорема С.А. Чунихина [8, 9] о существовании и сопряженности холловских π-групп ($\mathfrak{E}_\pi$-инъекторов) в π-разрешимой группе.

Классы сопряженных $\mathfrak{F}$-инъекторов в π-разрешимых группах для $\pi = \pi(\mathfrak{F})$ впервые были найдены Л.А. Шеметковым [10]. Из результата Л.А. Шеметкова [10] следует, что для любого класса Фиттинга $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{E}$ в $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимой группе G существуют $\mathfrak{F}$-инъекторы и любые два из них сопряжены в G. Напомним, что через $\pi(\mathfrak{F})$ мы обозначили здесь множество всех простых делителей всех групп из $\mathfrak{F}$.

Настоящая работа посвящена применению локального метода Хартли к решению задачи описания строения новых классов сопряженных $\mathfrak{F}$-инъекторов π-разрешимых групп для произвольного непустого множества простых чисел π.

Все рассматриваемые группы конечны. В определениях и обозначениях мы следуем [2].

1. π**-Нильпотентные инъекторы**

Пусть $\mathfrak{F}$ – класс Фиттинга. Следующие свойства $\mathfrak{F}$-инъекторов групп, вытекающие непосредственно из определения $\mathfrak{F}$-инъектора, сформулируем в виде леммы.

ЛЕММА 1.1 [2]. Для любой группы G справедливы следующие утверждения:

1) если V – $\mathfrak{F}$-инъектор группы G и $K \lhd G$, то $V \cap K$ $\mathfrak{F}$-инъектор группы K;

2) если V – $\mathfrak{F}$-инъектор G и $\alpha : G \to G\alpha$ – изоморфизм, то V^{α} – $\mathfrak{F}$-инъектор группы G^{α};

3) если V – $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа G и $V \cap M$ – $\mathfrak{F}$-инъектор M для любой максимальной нормальной подгруппы M группы G, то V – $\mathfrak{F}$-инъектор G.

Следующая лемма решает задачу нахождения π-нильпотентных инъекторов в любой π-разрешимой группе.

ЛЕММА 1.2. Любая конечная π-разрешимая группа G имеет единственный класс сопряженных π-нильпотентных инъекторов, каждый из которых является произведением π'-радикала группы G и $\mathfrak{N}_{\pi}$-инъектора некоторой π-холловской подгруппы из G.

Доказательство. Пусть G – контрпример минимального порядка и M – любая максимальная нормальная подгруппа группы G.

Рассмотрим два возможных случая.

1. π'*-радикал* $G_{\mathfrak{E}_{\pi'}}$ *группы* G *– единичная подгруппа*

Тогда $M_{\mathfrak{E}_{\pi'}} = 1$ и по индукции в M существует единственный класс сопряженных π-нильпотентых инъекторов, которые представляются в указанном в условии леммы виде, то есть в данном случае совпадают с $\mathfrak{N}_{\pi}$-инъекторами π-холловских подгрупп группы M.

Пусть F_1 – $\mathfrak{N}_{\pi}$-инъектор холловской π-подгруппы M_{π} группы M. Так как холловская π-подгруппа G_{π} группы G разрешима, то в ней по теореме Гашюца – Фишера – Хартли [1] существует $\mathfrak{N}_{\pi}$-инъектор V и любые два $\mathfrak{N}_{\pi}$-инъектора из G_{π} сопряжены в G_{π}. Но $M_{\pi} = M \cap G_{\pi} \lhd G_{\pi}$. Следовательно, по утверждению 1 леммы 1.1 $V \cap M_{\pi}$ – $\mathfrak{N}_{\pi}$-инъектор группы M_{π}. Ввиду сопряженности $\mathfrak{N}_{\pi}$-инъекторов группы M, мы можем считать, что $F_1 = V \cap M_{\pi}$. Поэтому лемма в случае 1 будет доказана, если покажем, что V – максимальная π-нильпотентная подгруппа группы G. Предположим, что $F_1 \subseteq V \subseteq V_1$, где V_1 – некоторая максимальная π-нильпотентная подгруппа из G. Так как $G_{\mathfrak{N}_{\pi}}$ и $(V_1)_{\mathfrak{E}_{\pi'}}$ нормальны в V_1 и $[(V_1)_{\mathfrak{E}_{\pi'}}, G_{\mathfrak{N}_{\pi}}] = 1$, то $(V_1)_{\mathfrak{E}_{\pi'}} \subseteq C_G(G_{\mathfrak{N}_{\pi}}) \subseteq G_{\mathfrak{N}_{\pi}}$ и поэтому $(V_1)_{\mathfrak{E}_{\pi'}} = 1$. Значит, $V_1 \in \mathfrak{N}_{\pi}$ и $V = V_1$ и в случае 1 лемма верна. Остается принять случай

2. π'*-радикал группы* G *– неединичная подгруппа.*

Пусть $G_1 = G / G_{\mathfrak{E}_{\pi'}}$. В этом случае в группе G_1 существует единственный класс сопряженных π-нильпотентных инъекторов вида $(G_1)_{\mathfrak{E}_{\pi'}} V_1$, где V_1 – $\mathfrak{N}_{\pi}$-инъектор некоторой холловской π-подгруппы из G_1. Так как $(G_1)_{\mathfrak{E}_{\pi'}} = 1$, то π-нильпотентные инъекторы группы G_1 совпадают с $\mathfrak{N}_{\pi}$-инъекторами ее холловской π-подгруппы $G_{\pi} G_{\mathfrak{E}_{\pi'}} / G_{\mathfrak{E}_{\pi'}}$, где G_{π} – некоторая холловская π-подгруппа группы G. Но G_{π} – разрешимая группа и поэтому по теореме Гашюца – Фишера – Хартли [1] в ней существует $\mathfrak{N}_{\pi}$-инъектор V.

Учитывая случай 1 и утверждение 2 леммы 1.1, подгруппа $VG_{\mathfrak{E}_{\pi'}} / G_{\mathfrak{E}_{\pi'}}$ является $\mathfrak{N}_{\pi}$-инъектором группы $G_{\pi} G_{\mathfrak{E}_{\pi'}} / G_{\mathfrak{E}_{\pi'}}$ и, следовательно, π-нильпотентным инъектором этой группы. Значит, $VG_{\mathfrak{E}_{\pi'}}$ – π-нильпотентная подгруппа группы G.

Покажем, что $VG_{\mathfrak{E}_{\pi'}}$ максимальная из π-нильпотентных подгрупп из G.

Предположим, что $VG_{\mathfrak{E}_{\pi'}} \subseteq F$, где F – максимальная π-нильпотентная подгруппа группы G. Тогда $F = F_{\mathfrak{E}_{\pi'}} F_{\pi}$, где $F_{\pi} \in \mathfrak{N}_{\pi}$ и является холловской π-подгруппой из F. По теореме вложения С.А. Чунихина [9] мы можем считать, что $F_{\pi} \subseteq G_{\pi}$. Но тогда $V \subseteq F_{\pi} \subseteq G_{\pi}$, и так как V является $\mathfrak{N}_{\pi}$-максимальной в G, то $V = F_{\pi}$. Из того, что $G_{\mathfrak{E}_{\pi'}} \lhd F$, следует, что $(F / G_{\mathfrak{E}_{\pi'}})_{\mathfrak{E}_{\pi'}} = F_{\mathfrak{E}_{\pi'}} / G_{\mathfrak{E}_{\pi'}}$. Но тогда $F / G_{\mathfrak{E}_{\pi'}} / (F / G_{\mathfrak{E}_{\pi'}})_{\mathfrak{E}_{\pi'}} \cong F / F_{\mathfrak{E}_{\pi'}} \cong F_{\pi} = V \in \mathfrak{N}_{\pi}$. Следовательно, группа $F / G_{\mathfrak{E}_{\pi'}}$ π-нильпотентна и $VG_{\mathfrak{E}_{\pi'}} / G_{\mathfrak{E}_{\pi'}} \subseteq F / F_{\mathfrak{E}_{\pi'}}$. Отсюда $F = G_{\mathfrak{E}_{\pi'}} V$, так как $VG_{\mathfrak{E}_{\pi'}} / G_{\mathfrak{E}_{\pi'}}$ максимальная из π-нильпотентных подгрупп группы G_1.

Итак, мы показали, что $G_{\mathfrak{E}_{\pi'}}V$ максимальная из π-нильпотентных подгрупп группы G. Поэтому чтобы доказать, что подгруппа $G_{\mathfrak{E}_{\pi'}}V$ является π-нильпотентным инъектором группы G, остается ввиду утверждения 3 леммы 1.1 выяснить, что $G_{\mathfrak{E}_{\pi'}}V \cap M$ π-нильпотентный инъектор группы M.

По индукции группа M имеет π-нильпотентные инъекторы вида $M_{\mathfrak{E}_{\pi'}}L$, где L – $\mathfrak{N}_{\pi}$-инъектор холловской π-подгруппы M_{π} группы M. Так как $M_{\pi} = M \cap G_{\pi} \triangleleft G_{\pi}$ и в M_{π} любые два $\mathfrak{N}_{\pi}$-инъектора сопряжены по теореме Гашюца – Фишера – Хартли [1], то по утверждению 1 леммы 1.1 $L_1 = V \cap M_{\pi}$. Но тогда из того, что $G_{\mathfrak{E}_{\pi'}}V \cap M \triangleleft G_{\mathfrak{E}_{\pi'}}V$ и группа $G_{\mathfrak{E}_{\pi'}}V$ – π-нильпотентная подгруппа, следует, что $G_{\mathfrak{E}_{\pi'}}V \cap M$ – π-нильпотентная подгруппа группы M, содержащая π-нильпотентный инъектор $M_{\mathfrak{E}_{\pi'}}L$. Следовательно, $M_{\mathfrak{E}_{\pi'}}L = G_{\mathfrak{E}_{\pi'}}V \cap M$ и подгруппа $G_{\mathfrak{E}_{\pi'}}V \cap M$ является π-нильпотентным инъектором группы M. Итак, существование π-нильпотентных инъекторов в π-разрешимых группах доказано.

Сопряженность π-нильпотентных инъекторов вытекает непосредственно из сопряженности $\mathfrak{N}_{\pi}$-инъекторов π-холловских подгрупп π-разрешимой группы.

Лемма доказана.

2. Н-классы и Н-функции

Отображение $h: \mathbf{P} \to \{$классы Фиттинга$\}$ назовем функцией Хартли или Н-функцией. Пусть π – некоторое непустое множество простых чисел и $LH(h) = \bigcap_{p\in\pi} h(p)\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p$, где h – некоторая Н-функция. Локальный класс Фиттинга $\mathfrak{H}$ мы назовем классом Хартли или Н-классом, если $\mathfrak{H} = LH(h)$ для некоторой Н-функции h. В этом случае мы будем говорить, что $\mathfrak{H}$ определяется локально Н-функцией h.

ЛЕММА 2.1. Каждый Н-класс определяется локально такой приведенной Н-функцией h ($\pi = \mathrm{Supp}(h) \neq \varnothing$), что для всех различных простых p и q из π имеет место включение $h(p) \subseteq h(q)\mathfrak{E}_{q'}$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{H}$ – класс Хартли. Тогда $\mathfrak{H} = LH(h_1)$ для некоторой приведенной Н-функции h_1. Следуя Хартли [11], построим групповую функцию ϕ такую, что

$$\phi(p) = \{G \mid G \cong H^{\mathfrak{E}_{p'}} (H \in h_1(p))\}$$

для всех $p \in \pi$.

Пусть X – группа из класса $\phi(p)$ ($p \in \pi$). Тогда $X \cong Y^{\mathfrak{E}_{p'}}$ для некоторой группы $Y \in h_1(p)$. Следовательно, $Y^{\mathfrak{E}_{p'}} \in h_1(p)$ и поэтому $X \in h_1(p)$. Таким образом, $\phi \leq h_1$. Отсюда следует, что

$$\phi(p)\mathfrak{E}_{p'} \subseteq h_1(p)\mathfrak{E}_{p'}.$$

Если же $Y_1 \in h_1(p)\mathfrak{E}_{p'}$, то $Y_1/(Y_1)_{h_1(p)} \in \mathfrak{E}_{p'}$ и поэтому, ввиду равенства $(Y_1^{\mathfrak{E}_{p'}})^{\mathfrak{E}_{p'}} = Y_1^{\mathfrak{E}_{p'}}$, следует, что $Y_1^{\mathfrak{E}_{p'}} \in \phi(p)$. Значит, $Y_1 \in \phi(p)\mathfrak{E}_{p'}$. Итак, мы установили справедливость для всех $p \in \pi$ равенства

$$\phi(p)\mathfrak{E}_{p'} = h_1(p)\mathfrak{E}_{p'}. \qquad (1)$$

Построим теперь функцию h следующим образом:

$$h(p) = \mathrm{Fit}\ \phi(p)$$

для всех $p \in \pi$. Пусть $\mathfrak{Y} = \bigcap_{p\in\pi} h(p)\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{N}_p$. Докажем, что $\mathfrak{Y} = \mathfrak{H}$. Так как $\phi \leq h_1$, то $h \leq h_1$ и имеет место включение $h(p)\mathfrak{E}_{p'} \subseteq h_1(p)\mathfrak{E}_{p'}$ для всех $p \in \pi$. Но тогда из равенства (1) следует, что

$$\mathrm{Fit}\ (h_1(p)\mathfrak{E}_{p'}) = h_1(p)\mathfrak{E}_{p'} = \mathrm{Fit}\ (\phi(p)\mathfrak{E}_{p'}).$$

Значит,

$$h_1(p)\mathfrak{E}_{p'} = \mathrm{Fit}\ (\phi(p)\mathfrak{E}_{p'}) \subseteq (\mathrm{Fit}\ \phi(p))\mathfrak{E}_{p'} = h(p)\mathfrak{E}_{p'}.$$

Итак, мы показали, что для всех $p \in \pi$ имеет место равенство:

$$h(p)\mathfrak{E}_{p'} = h_1(p)\mathfrak{E}_{p'}.$$

Следовательно, $\mathfrak{Y} = \mathfrak{H}$ и h – Н-функция, определяющая локально класс $\mathfrak{H}$. Так как $h \leq h_1$ и h_1 – приведенная Н-функция, определяющая локально $\mathfrak{H}$, то и h – приведенная Н-функция.

Пусть теперь L – группа из класса $h_1(p)$ и q – любое отличное от p простое число из π. Так как $p \cap q = \varnothing$, то $\mathsf{N}_q \subseteq \mathsf{E}_{p'}$ и поэтому $L^{\mathsf{E}_{p'}} \subseteq L^{\mathsf{N}_q}$. Но $L \in \mathsf{H}$ и, значит, $L / L_{h_1(q)\mathsf{E}_{q'}} \in \mathsf{N}_q$. Следовательно, $L^{\mathsf{N}_q} \subseteq L_{h_1(q)\mathsf{E}_{q'}}$. Значит, $L^{\mathsf{N}_q} \in h_1(q)\mathsf{E}_{q'}$ и поэтому мы можем считать, что для всех групп из класса $h_1(p)$ их $\mathsf{E}_{p'}$-корадикалы содержатся в классе $h_1(q)\mathsf{E}_{q'}$. Тогда, если R – некоторая группа из класса $\phi(p)$, то $R \cong V^{\mathsf{E}_{p'}}$ для некоторой группы $V \in h_1(p)$ и поэтому $R \in h_1(q)\mathsf{E}_{q'}$. Следовательно, $\phi(p) \subseteq h_1(q)\mathsf{E}_{q'}$.

Но тогда, ввиду определения оператора " Fit ", имеем:

$$h(p) = \mathrm{Fit}\phi(p) \subseteq \mathrm{Fit}\,(h_1(q)\mathsf{E}_{q'}) = h_1(q)\mathsf{E}_{q'} = h(q)\mathsf{E}_{q'}.$$

Лемма доказана.

Пусть $G_h = \prod_{p\in\pi} G_{h(p)}$ – h-радикал группы G. Напомним, что через N^{π} мы обозначаем класс всех π-нильпотентных групп и π-нильпотентный радикал группы G обозначают $G_{\mathsf{N}^{\pi}}$ или $F_{\pi}(G)$. Группу G называют N^{π}-скованной, если

$$C_G(F_{\pi}(G)) \subseteq F_{\pi}(G).$$

ЛЕММА 2.2. Пусть $\mathsf{H} = LH(h)$, $\pi = \mathrm{Supp}(h) \neq \varnothing$ и G – такая группа, что G/G_h N^{π}-скована (в частности, π-разрешима). Тогда и только тогда подгруппа V, содержащая G_{H}, принадлежит H-класссу H, когда V/G_h – π-нильпотентная группа.

Доказательство. Если $V \in \mathsf{H}$ и $G_{\mathsf{H}} \subseteq V$, то $V_{h(p)} \cap G_{\mathsf{H}} = (G_{\mathsf{H}})_{h(p)} = G_{h(p)}$ и поэтому $[V_{h(p)}, G_{\mathsf{H}}] \subseteq G_{h(p)}$. Следовательно, $V_{h(p)} \subseteq C_G(G_{\mathsf{H}}/G_{h(p)})$ для всех простых $p \in \pi$.

Покажем, что $G_{\mathsf{H}}/G_h = F_{\pi}(G/G_h)$. Пусть $F_{\pi}(G/G_h) = L/G_h$. Выясним, что $L = G_{\mathsf{H}}$. Так как $G_{\mathsf{H}} \in \mathsf{H}$ и $(G_{\mathsf{H}})_{h(p)} = G_{h(p)}$, то группа $G_{\mathsf{H}}/G_{h(p)}$ p-нильпотентна для всех простых $p \in \pi$. Следовательно, G_{H}/G_h π-нильпотентна и поэтому $G_{\mathsf{H}}/G_h \subseteq L/G_h$ и $G_{\mathsf{H}} \subseteq L$.

Докажем, что $L \subseteq G_{\mathsf{H}}$. Для этого достаточно выяснить, что $L \in \mathsf{H}$. Так как L/G_h – π-нильпотентная группа, то, используя изоморфизм $L/L_{h(p)}G_h \cong L/G_h / L_{h(p)}G_h/G_h$ получаем, что $L/L_{h(p)}G_h \in \mathsf{E}_{p'}\mathsf{N}_p$ и поэтому также $L/L_{h(p)} / L_{h(p)}G_h/L_{h(p)} \in \mathsf{E}_{p'}\mathsf{N}_p$ для всех простых $p \in \pi$. Следовательно, для того, чтобы показать, что L – группа из H, остается установить, что $L_{h(p)}G_h/L_{h(p)}$ является p'-группой для каждого простого $p \in \pi$.

Так как $G_h \lhd L$, то $G_{h(p)} = (G_h)_{h(p)} = G_h \cap L_{h(p)} \subseteq L_{h(p)}$. Пусть q – любое простое из π, отличное от p. Так как $G_{h(p)}G_{h(q)}/G_{h(p)} \cong G_{h(q)}/G_{h(q)} \cap G_{h(p)}$, то $G_{h(p)}G_{h(q)}/G_{h(p)} \cong G_{h(q)}/(G_{h(q)})_{h(p)}$.

Но h – такая H-функция, что $h(q) \subseteq h(p)\mathsf{E}_{p'}$ для всех различных p и q из π. Следовательно, $G_{h(q)} \in h(p)\mathsf{E}_{p'}$ и поэтому $G_{h(q)}/(G_{h(q)})_{h(p)} \in \mathsf{E}_{p'}$.

Значит, для любых различных p и q множества π подгруппа $G_{h(q)}G_{h(p)}/G_{h(p)}$ является p'-группой. Следовательно, $G_h/G_{h(p)} \in \mathsf{E}_{p'}$. Но тогда ввиду изоморфизмов

$$L_{h(p)}G_h/L_{h(p)} \cong G_h/G_h \cap L_{h(p)} \cong G_h/G_{h(p)} / G_h \cap L_{h(p)}/G_{h(p)}$$

следует, что $L_{h(p)}G_h/L_{h(p)}$ является p'-группой для всех $p \in \pi$. Итак, мы показали, что $L \in \mathsf{H}$ и $G_{\mathsf{H}}/G_h = F_{\pi}(G/G_h)$.

Но тогда из того, что группа G/G_h N^{π}-скованна, вытекает, что $C_{G/G_h}(G_{\mathsf{H}}/G_h) \subseteq G_{\mathsf{H}}/G_h$. Следовательно, $C_G(G_{\mathsf{H}}/G_h) \subseteq G_{\mathsf{H}}$. Но $C_G(G_{\mathsf{H}}/G_{h(p)}) \subseteq C_G(G_{\mathsf{H}}/G_h)$. Значит, $V_{h(p)} \subseteq G_{\mathsf{H}}$ и поэтому $V_{h(p)} = G_{h(p)}$ для всех простых $p \in \pi$. Но тогда из $V \in \mathsf{H}$ вытекает, что $V/G_{h(p)} = V/V_{h(p)}$ p-нильпотентна для всех $p \in \pi$. Отсюда V/G_h π-нильпотентна.

Обратно, если V/G_h – π-нильпотентная группа, то рассуждая аналогично, как и выше (см. доказательство включения $L \subseteq G_{\mathsf{H}}$), получаем $V \in \mathsf{H}$.

Лемма доказана.

3. $\mathfrak{H}$-Инъекторы

ЛЕММА 3.1. Пусть $\mathfrak{H} = LH(h)$, $\pi = \mathrm{Supp}(h) \neq \varnothing$ и G – такая группа, что G/G_h $\mathfrak{N}^{\pi}$-скованна и $\pi(G_h) \subseteq \pi$. Если V/G_h π-нильпотентный инъектор группы G/G_h, то V – $\mathfrak{H}$-инъектор группы G.

Доказательство. Докажем лемму индукцией по порядку группы G. Пусть G – группа минимального порядка, для которой лемма неверна и M – любая максимальная нормальная подгруппа группы G. Предположим, что p и q – различные простые числа из π и покажем, что $G_h / G_{h(q)}$ является q'-группой для всех простых $q \in \pi$.

Действительно, так как h – такая функция, что $h(p) \subseteq h(q)\mathfrak{E}_{q'}$, то ввиду изоморфизма $G_{h(q)}G_{h(p)} / G_{h(q)} \cong G_{h(p)} / (G_{h(p)})_{G_{h(q)}}$ следует, что $G_{h(p)}G_{h(q)} / G_{h(q)} \in \mathfrak{E}_{q'}$. Тогда ввиду произвольности выбора чисел p и q из множества π следует, что $G_h / G_{h(q)} \in \mathfrak{E}_{q'}$.

Пусть $M_h = \prod_{p\in\pi} M_{h(p)}$. Так как $(G_h \cap M)G_{h(q)} / G_{h(q)} \cong G_h \cap M / M_{h(q)}$, то $G_h \cap M / M_{h(q)}$ является q'-группой для всех простых $q \in \pi$.

Следовательно, $G_h \cap M / M_h \in \bigcap_{q\in\pi} \mathfrak{E}_{q'} = \mathfrak{E}_{\pi'}$. Значит, $G_h \cap M / M_h \in \mathfrak{E}_{\pi} \cap \mathfrak{E}_{\pi'} = (1)$ и поэтому $G_h \cap M = M_h$.

Рассмотрим два возможных случая.

1. Группа $G_h \subseteq M$.

Тогда $G_h = M_h$. Так как V/G_h – π-нильпотентный инъектор группы G/G_h, то по утверждению 1 леммы 1.1 подгруппа $V \cap M / G_h$ является $\mathfrak{N}^{\pi}$-инъектором группы M/G_h. Но в данном случае $M_h = G_h$ и поэтому $V \cap M / M_h$ – $\mathfrak{N}^{\pi}$-инъектор группы M/M_h. Следовательно, по индукции подгруппа $V \cap M$ – $\mathfrak{H}$-инъектор группы M. Так как $V/G_h \in \mathfrak{N}^{\pi}$, то по лемме 2.2 $V \in \mathfrak{H}$.

Докажем, что V – $\mathfrak{H}$-максимальная подгруппа группы G.

Предположим, что $V \subset V_1$, где V_1 – $\mathfrak{H}$-максимальная подгруппа группы G. Тогда $V \cap M = V_1 \cap M$, так как в противном случае мы получили бы противоречие с тем, что $V \cap M$ $\mathfrak{H}$-максимальна в M.

Итак, в данном случае V_1 $\mathfrak{H}$-максимальна в G и $V_1 \cap M$ $\mathfrak{H}$-инъектор группы M для любой максимальной нормальной подгруппы M группы G. Следовательно, по утверждению 3 леммы 1.1 подгруппа V_1 – $\mathfrak{H}$-инъектор группы G. Но тогда $G_{\mathfrak{H}} \subseteq V_1$ и по лемме 2.2 $V_1/G_h \in \mathfrak{N}^{\pi}$ и $V/G_h \subset V_1/G_h$. Последнее противоречит тому, что V/G_h $\mathfrak{N}^{\pi}$-максимальна в G/G_h.

Следовательно, $V = V_1$ и V – $\mathfrak{H}$-инъектор группы G. Полученное противоречие исключает случай 1. Остается принять случай

2. Группа $G_h \not\subseteq M$.

В этом случае ввиду максимальности M следует, что $G = G_h M$. Так как

$$G/G_h \cong M/G_h \cap M = M/M_h,$$

то по утверждению 2 леммы 1.1, получаем, что подгруппа $V \cap M / M_h$ является $\mathfrak{N}^{\pi}$-инъектором группы M/M_h. Следовательно, по индукции $V \cap M$ – $\mathfrak{H}$-инъектор группы M. По лемме 2.2 $V \in \mathfrak{H}$ и аналогично, как и в случае 1, V $\mathfrak{H}$-максимальна в G.

Значит, ввиду произвольности выбора максимальной нормальной подгруппы M группы G, по утверждению 3 леммы 1.1 следует, что V – $\mathfrak{H}$-инъектор группы G. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Лемма доказана.

Пусть $\mathfrak{H}$ – класс Хартли, определяемый локально постоянной H-функцией h, такой, что $h(p) = \mathfrak{X}$ для всех простых $p \in \pi$ ($\pi = \mathrm{Supp}(h) \neq \varnothing$), где $\mathfrak{X}$ – некоторый непустой класс Фиттинга, и $\mathfrak{S}^{\pi}$ – класс Фиттинга всех π-разрешимых групп.

Тогда имеет место

ТЕОРЕМА 3.2. Для любой группы G из класса $\mathfrak{X}\mathfrak{S}^{\pi}$ (в частности, любой π-разрешимой группы) справедливы следующие утверждения:

1) в G существуют $\mathfrak{H}$-инъекторы и любые два из них сопряжены в G;

2) каждый H-инъектор V из G – подгруппа вида $G_{\mathsf{X}\mathsf{E}_{\pi'}}L$, где L – такая подгруппа группы G, что V/G_{X} – некоторый N_{π}-инъектор π-холловской подгруппы группы G/G_{X}.

Доказательство. Так как G/G_{X} π-разрешимая группа, то по лемме 1.2 в G/G_{X} существует π-нильпотентный инъектор V/G_{X}. Отсюда, ввиду $\pi(G_{\mathsf{X}}) \subseteq \pi(\mathsf{H}) = \mathbf{P}$, по лемме 3.1 V – H-инъектор группы G. Если F/G_{X} – некоторый другой π-нильпотентный инъектор группы G/G_{X}, то по лемме 1.2 V/G_{X} и F/G_{X} сопряжены в G/G_{X}. Отсюда V и F сопряжены в G и первое утверждение теоремы доказано.

Применяя снова лемму 1.2, получаем, что π-нильпотентный инъектор $V/G_{\mathsf{X}} = (G/G_{\mathsf{X}})_{\mathsf{E}_{\pi'}}(L/G_{\mathsf{X}})$, где L/G_{X} – некоторый N_{π}-инъектор π-холловской подгруппы из G/G_{X}. Теперь, ввиду того, что $(G/G_{\mathsf{X}})_{\mathsf{E}_{\pi'}} = G_{\mathsf{X}\mathsf{E}_{\pi'}}/G_{\mathsf{X}}$, мы имеем $V = G_{\mathsf{X}\mathsf{E}_{\pi'}}L$.

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3.3. В любой конечной π-разрешимой группе существует единственный класс сопряженных $\mathsf{X}\mathsf{N}^{\pi}$-инъекторов. В частности, любая конечная π-разрешимая группа имеет инъекторы ограниченной π-нильпотентной длины и любые два из них сопряжены.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fischer, B. Injektoren endlicher auflosbarer Gruppen / B. Fischer, W. Gaschutz, B. Hartley // Math. Z. – 1967. – Bd. 102, № 5. – S. 337 – 339.
2. Doerk, K. Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin-New York: Waltor de Gryeter, 1992. – 892 p.
3. Forster, P. Nilpotent injectors in finite groups / P. Forster // Bull. Austral. Math. Soc. – 1985. – Vol. 32, № 4. – P. 293 – 297.
4. Blessenohl, D. Fittingklassen endlicher Gruppen in denen gewisse Haupfaktoren einfach sind / D. Blessenohl, H. Laue // J. Algebra. – 1979. – № 56. – S. 516 – 532.
5. Iranzo, M.J. F-constraint with respect to a Fitting class / M.J. Iranzo, F. Perez Monasor // Arch. Math. – 1986. – № 46. – P. 205 – 210.
6. Монахов, В.С. Существование разрешимых инъекторов в конечных группах / В.С. Монахов // Докл. АН Беларуси. – 1992. – Т. 36, № 6. – С. 494 – 496.
7. Коуровская тетрадь (нерешенные вопросы теории групп). – 11-е изд. – Новосибирск: ИМ РАН, 1990. – 125 с.
8. Чунихин, С.А. О силовских свойствах конечных групп / С.А. Чунихин // Докл. АН БССР. – 1950. – Т. 73, № 1. – С. 29 – 32.
9. Чунихин, С.А. Подгруппы конечных групп / С.А. Чунихин. – Минск: Наука и техника, 1964.
10. Шеметков, Л.А. О подгруппах π-разрешимых групп / Л.А. Шеметков // Конечные группы. – Минск: Наука и техника, 1975. – С. 207 – 212.
11. Hartley, B. On Fisher's dualization of formation theory / B. Hartley // Proc. London. Math. Soc. – 1969. – Vol. 3, № 2. – P. 193 – 207.

Поступила 03.02.2010

INJECTORS OF FINITE Π-SOLUBLE GROUPS

N. VOROB'EV, E. ZALESSKAYA

In this paper structure of injectors of finite π-soluble groups is desscribed with the help of Hartley functions. In particular the existence and conjugacy of π-nilpotent injectors in finite π-soluble groups are proved.