УДК 512.542

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ЛОКАЛЬНЫХ ФОРМАЦИЙ *p*-РАЗЛОЖИМОГО ДЕФЕКТА 2

канд. физ.-мат. наук, доц. В.В. АНИСЬКОВ
(Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины)

Исследуется свойство локальных формаций p-разложимого дефекта 2. Формация – класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. Показано, что решетки разрешимых локальных формаций с p-разложимым дефектом 2 имеют достаточно простое строение. Этот факт позволяет широко использовать такие решетки в различных вопросах классификации локальных формаций конечных групп. В данной работе устанавливается одно решеточное свойство локальных формаций, имеющих p-разложимый дефект 2: тогда и только тогда разрешимая приводимая локальная формация Φ имеет p-разложимый дефект 2, когда она содержит ровно 2 различные неприводимые не p-разложимые локальные формации.

Введение. Группы, которые рассматриваются в данной работе, все предполагаются конечными. При необходимости, все интересующие определения и обозначения можно найти в [1 – 2]. Здесь же, в целях удобства чтения, определим некоторые из них, являющиеся основными для данной работы.

Если класс групп Φ замкнут относительно взятия гомоморфных образов и всегда из $G/N_1 \in \Phi$ и $G/N_2 \in \Phi$, где $N_1 \cap N_2 = 1$, следует, что $G \in \Phi$, то такой класс называется *формацией*. Отображение f класса Γ всех групп во множество всех формаций групп называется *локальным экраном*, если справедливы следующие условия: 1) $f(1) = \Gamma$; 2) $f(A) = f(B)$ для любого простого p и любых неединичных p-групп A и B; 3) $f(G) = \bigcap_{p\in\pi(G)} f(p)$ для любой неединичной группы G. Если для всех $p \in \pi(H/K)$, $G/C_G(H/K) \in f(p)$, то главный фактор H/K группы G называется f*-центральным*. Если Φ – класс всех групп с f-центральными главными факторами, то локальный экран f называется *локальным экраном формации* Φ. *Локальной* называется формация, обладающая хотя бы одним локальным экраном. В ряде случаев конструкции локальных экранов позволяют изучать свойства локальных формаций, на этих экранах построенных. Локальная формация, которая может быть представлена в виде объединения своих собственных локальных подформаций в решетке локальных формаций, называется *приводимой*. Локальная формация, которая таким свойством не обладает, называется *неприводимой*.

В работе [3], А.Н. Скиба ввел понятие H-дефекта локальной формации как длины решетки локальных формаций, заключенных между Φ и $\Phi \cap \mathrm{H}$. В этой же работе были получены результаты для класса всех нильпотентных групп, что послужило толчком к изучению решеток локальных формаций [4 – 9]. Пожалуй, самой главной особенностью таких решеток оказалось то обстоятельство, что в общем случае, они модулярны, но не дистрибутивны. В данной работе устанавливается некоторое свойство одной из них, которое было получено при проведении исследований в указанном направлении.

Предварительные результаты. В целях краткости изложения, будем использовать следующие обозначения: $\mathfrak{R}_p$ – формация всех p-разложимых групп; N_p – формация всех нильпотентных p-групп; $\Delta_{p'}$ – формация всех p'-групп; E – формация всех единичных групп. Доказательству результата работы предварим несколько вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 1. В формации $\Phi = \mathrm{H}_1 \vee_l \mathrm{H}_2 \vee_l \mathrm{M}$, где H_1 и H_2 – различные минимальные локальные не p-разложимые формации, а M – некоторая локальная p-разложимая формация, не существует других минимальных локальных не p-разложимых формаций, отличных от H_1 и H_2.

Доказательство. Предположим противное, т.е. что в формации Φ существует такая минимальная локальная не p-разложимая формация H_3, что $\mathrm{H}_3 \neq \mathrm{H}_1$ и $\mathrm{H}_3 \neq \mathrm{H}_2$. Пусть $\mathrm{M}_1 = \Phi \cap \mathfrak{R}_p$. Тогда $\Phi = \mathrm{H}_1 \vee_l \mathrm{H}_2 \vee_l \mathrm{M}_1$. Согласно лемме 20.2 [2], для любого $i \in \{1, 2, 3\}$, $\mathrm{H}_i \cap \mathrm{M}_1$ – максимальная локальная подформация формации H_i. Поэтому ввиду решеточного изоморфизма

$$\mathrm{H}_1 \vee_l \mathrm{H}_2 \vee_l \mathrm{M}_1 /_l\, \mathrm{H}_1 \vee_l \mathrm{M}_1 \approx \mathrm{H}_2 /_l\, \mathrm{H}_2 \cap \mathrm{M}_1,$$

формация $\mathrm{H}_1 \vee_l \mathrm{M}_1$ является максимальной локальной подформацией формации Φ. Поскольку $\mathfrak{R}_p$ является 2-кратно-локальной формацией, то согласно лемме 2 [6] в формации $\mathrm{H}_1 \vee_l \mathrm{M}_1$ не может содержаться формация H_3. Следовательно, $\Phi = \mathrm{H}_1 \vee_l \mathrm{H}_3 \vee_l \mathrm{M}_1$. Рассуждая аналогично, можно также получить, что $\Phi = \mathrm{H}_2 \vee_l \mathrm{H}_3 \vee_l \mathrm{M}_1$. Обозначим через h_1, h_2, h_3, m_1 минимальные локальные экраны соответственно формаций $\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2, \mathrm{H}_3, \mathrm{M}_1$. Ввиду теоремы 8.3 [2], а также леммы 1 [6] формация Φ имеет такой минимальный локальный экран f, что $f = h_1 \vee_l h_2 \vee_l m_1 = h_1 \vee_l h_3 \vee_l m_1 = h_2 \vee_l h_3 \vee_l m_1$. Отсюда, в частности, следует, что $h_1 \le f, h_2 \le f, h_3 \le f$.

Для описания каждого из экранов будем пользоваться теоремой 8.3 [2], согласно которой всякая локальная формация X обладает единственным минимальным локальным экраном x и при этом

$$x(q) = \begin{cases} form(A / F_p(A) \mid A \in \mathrm{X}), q \in \pi(\mathrm{X}); \\ \varnothing, q \notin \pi(\mathrm{X}). \end{cases}$$

Согласно пункту 18.20 [2] формация $\mathfrak{R}_p$ обладает таким внутренним локальным экраном t, что

$$t(q) = \begin{cases} \mathrm{N}_p, q = p; \\ \Delta_{p'}\ , q \ne p. \end{cases}$$

Поскольку $\mathrm{M}_1 \subseteq \mathfrak{R}_p$, то $m_1(q) \subseteq \Delta_{p'}$, если $q \ne p$. Кроме того, если воспользоваться указанным выше описанием минимального локального экрана, то получим, что $m_1(p) \subseteq \mathrm{E}$. Следовательно, экран f будет иметь следующие значения:

$$f(q) = \begin{cases} form(\{G_i / F_p(G_i)\} \cup \{G_j / F_p(G_j)\}), q = p; \\ form(\{G_i / F_q(G_i)\} \cup \{G_j / F_q(G_j)\} \cup m_1(q)), q \in \{\pi(G_i) \cup \pi(G_j)\} \setminus \{p\}; \\ m_1(q) \subset \Delta_{p'}, q \in \pi(\Phi) \setminus \{\pi(G_1) \cup \pi(G_2)\}; \\ \varnothing, q \notin \pi(\Phi), \end{cases}$$

где $i, j \in \{1,\ 2,\ 3\}$ и $i \ne j$. Согласно теореме 18.20 [2] $\mathrm{H}_i = lformG_i (i \in \{1,\ 2,\ 3\})$, где G_i – такая монолитическая группа, что $p \in \pi(G_i)$ и выполняется одно из следующих утверждений: 1) G_i – простая неабелева группа; 2) G_i – группа Шмидта; 3) $G_i = [P_i]H_i$, где $P_i = C_{G_i}(P_i)$ – минимальная нормальная подгруппа группы G_i, а H_i – простая неабелева p'-группа. Как замечено в [4], в случае, когда G_i – группа Шмидта, ее можно считать группой Шмидта с тривиальной группой Фраттини, т.е. $G_i = [R_i]Q_i$, где R_i и Q_i – силовские подгруппы группы G_i, причем Q_i – группа порядка q_i, а $R_i = C_{G_i}(R_i)$ – минимальная нормальная r_i-подгруппа группы G_i.

Для доказательства леммы нужно рассмотреть все возможные случаи, когда каждая из указанных групп G_i имеет один из перечисленных видов, и в каждом из них получить противоречие. Однако ввиду полученных выше вложений экранов достаточно, не ограничивая общности доказательства, рассмотреть только три ситуации: когда все три группы одного типа, когда все три группы разных типов и когда у двух групп типы совпадают и отличаются от типа третьей группы. Более того, в каждой из ситуаций различные случаи, различающиеся лишь упорядочением, эквивалентны.

Рассмотрим первую ситуацию. Пусть все три группы являются простыми неабелевыми. Поскольку p делит порядок каждой из них, то $F_p(G_i) = 1$ для любого $i \in \{1,\ 2,\ 3\}$. Следовательно, получаем равенство $form(\{G_1\} \cup \{G_3\}) = form(\{G_1\} \cup \{G_2\})$. Поэтому группа G_3 является прямым произведением изоморфных копий группы G_2. Это означает, что $H_3 = H_2$, и приходим к противоречию с нашим предположением.

Пусть все три группы являются группами Шмидта. Достаточно рассмотреть два случая: когда у одной из них нормальной является p-подгруппа, а у двух других нормальны p'-подгруппы и наоборот. Причем и здесь не нужно учитывать упорядочение.

Пусть в G_3 нормальна p-подгруппа. Рассмотрим вначале случай, когда в G_1 и G_2 нормальны соответственно q_1-подгруппа и q_2-подгруппа. Тогда $F_p(G_1) = G_1$ и $F_p(G_2) = G_2$. Следовательно, $form(G_3 / F_p(G_3)) \subseteq \mathrm{E}$, что может быть возможно только в том случае, когда G_3 является p-разложимой группой. Следовательно, рассматриваемый случай невозможен.

Пусть теперь в G_1 нормальна p-подгруппа, а в G_2 – q_2-подгруппа. Тогда $F_p(G_2) = G_2$ и получим равенство $form(G_3 / F_p(G_3)) = form(G_1 / F_p(G_1))$. Следовательно, $q_3 = q_1$. Тогда $F_q(G_1) = F_q(G_3) = 1$ и поэтому $form(G_1 / F_q(G_1)) = form(G_3 / F_q(G_3))$. Это означает, что $lformG_3 = lformG_1$, т.е. $H_3 = H_1$. Получаем противоречие с предположением. Поэтому рассматриваемый случай невозможен.

Рассмотрим теперь случай, когда $G_i = [P_i]H_i$, где $P_i = C_{G_i}(P_i)$ – минимальная нормальная подгруппа группы G_i, а H_i – простая неабелева p'-группа для любого $i \in \{1, 2, 3\}$. Так как $P_i = C_{G_i}(P_i)$ для любого $i \in \{1, 2, 3\}$, то для значений экранов на p получим равенство:

$$form(\{H_1\} \cup \{H_3\}) = form(\{H_1\} \cup \{H_2\}) .$$

Поскольку H_i все являются простыми неабелевыми группами, то, как и выше: $H_3 \approx H_2$. Отсюда, в частности, следует, что $\pi(H_3) = \pi(H_2)$. Пусть $t \in \pi(H_2) \setminus \pi(H_1)$. Поскольку H_2 – p'-группа, то $t \neq p$, поэтому $F_t(G_3) = F_t(G_2) = 1$ и $F_t(G_1) = G_1$. Поэтому на t получаем следующее соотношение значений экранов: $formG_3 \subseteq form(\{G_2\} \cup m_1(t))$.

Согласно следствию 8.6 [2] для максимального внутреннего локального экрана h формации $\mathfrak{R}_p$ выполняется равенство $h(t) = \mathrm{N}_t m_1(t)$. Значит, G_3 – монолитическая группа из $form(\{G_2\} \cup m_1(t)) \setminus h(t)$. Следовательно, согласно теореме 3.37 [2] группа G_3 – гомоморфный образ группы G_2. Но P_1 – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G_1 и $p \in \pi(P_1)$. Следовательно, $G_3 \approx G_2$. Значит $H_3 \approx H_1$, и получаем противоречие.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда все три группы являются группами разных типов. Пусть G_3 – простая неабелева группа, G_1 – группа Шмидта, $G_2 = [P_2]H_2$, где $P_2 = C_{G_2}(P_2)$ – минимальная нормальная подгруппа группы G_2, а H_2 – простая неабелева p'-группа. Поскольку $F_p(G_3) = G_3$, а $F_p(G_2) = P_2$, то получаем соотношение: $formG_3 \subseteq form(\{G_1 / F_p(G_1)\} \cup H_2)$.

Предположим, что в G_1 нормальна силовская p-подгруппа. Тогда $G_1 / F_p(G_1)$ и H_2 – p'-группы, поэтому рассматриваемый случай невозможен. Если же предположить, что в G_1 нормальна силовская р'-подгруппа, то $F_p(G_1) = G_1$, и снова приходим к противоречию.

Третья, последняя, ситуация рассматривается аналогично. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. В разрешимой формации $\Phi = \mathrm{H} \vee_l \mathrm{M}$, где H – неприводимая локальная формация p-разложимого дефекта 2, а M – некоторая локальная p-разложимая формация, существует единственная минимальная локальная не р-разложимая формация.

Доказательство. Как и выше, согласно теореме 2 [4] $\mathrm{H} = lformG$, где $G = [R]H$ – монолитическая группа с монолитом $R = C_G(R)$, и выполняется одно из следующих условий: 1) H – группа Шмидта с тривиальной подгруппой Фраттини, причем если p делит $|H|$ и не делит $|R|$, то в H нормальна силовская p-подгруппа; 2) H – циклическая примарная группа порядка $q^2, q \neq p$; 3) H – неабелева группа порядка q^3 простой нечетной экспоненты $q \neq p$.

Минимальный локальный экран f формации Φ имеет такие же значения, как и в лемме 2:

$$f(q) = \begin{cases} form(G / F_p(G)), q = p; \\ form(\{G / F_p(G)\} \cup m_1(q)), q \in \pi(G) \cup \setminus \{p\}; \\ m_1(q) \subseteq \Delta_{p'}, q \in \pi(\Phi) \setminus \pi(G); \\ \varnothing, q \notin \pi(\Phi). \end{cases}$$

Пусть H – группа Шмидта с тривиальной подгруппой Фраттини и $p \in \pi(R)$. Пусть $H = [Q]S$, где $Q = C_H(Q)$ – t-группа, а S – группа порядка p. Тогда экран f имеет следующие значения:

$$f(q) = \begin{cases} formH, q = p; \\ form(\{S\} \cup m_1(q)), q = t; \\ m_1(q) \subseteq \Delta_{p'}, q \in \pi(\Phi) \setminus \{p, t\}; \\ \varnothing, q \notin \pi(\Phi). \end{cases}$$

Поскольку формация Φ не p-разложима, то в ней содержится хотя бы одна минимальная локальная не p-разложимая формация. Действительно, пусть $\mathrm{H}_1 = lformG_1$, где $G_1 = [P_1]T_1$ – группа Шмидта с тривиальной подгруппой Фраттини. Пусть $P_1 = C_{G_1}(P_1)$ – t-группа, а T_1 – группа порядка p.

Тогда минимальный локальный экран h_1 формации Φ_1 будет иметь следующие значения:

$$h_1(q) = \begin{cases} \mathrm{E}, q = p; \\ formT_1, q = t; \\ \varnothing, q \notin \{p, t\}. \end{cases}$$

Поскольку $S \approx H/Q \in formH,$ то $h_1(t) = formT_1 \subseteq f(t) = form(\{S\} \cup m_1(t)).$ Кроме того, $h_1(p) \subseteq f(p)$. Поэтому $\mathrm{H}_1 \subseteq \Phi$. Следовательно, H_1 и есть та минимальная локальная не p-разложимая формация, которая содержится в формации Φ. Предположим, что в Φ содержится еще одна минимальная локальная не p-разложимая формация $\mathrm{H}_2 = lformG_2$. Пусть h_2 – ее минимальный локальный экран. Поскольку формация Φ разрешима, то G_2 – группа Шмидта с тривиальной подгруппой Фраттини. Пусть $G_2 = [P_2]T_2$, $P_2 = C_{G_2}(P_2)$ – t_2-группа, а T_2 – группа порядка p. Тогда $h_2(t_2) = formT_2$. Для того чтобы $H_2 \subseteq \Phi$, нужно, чтобы $h_2(t) \leq f(t_2)$. Следовательно, $t_2 = t$. Но тогда приходим к тому, что $\mathrm{H}_1 = \mathrm{H}_2$. Пусть теперь P_2 – p-группа, а T_2 – группа порядка t_2. Тогда $h_2(p) = formT_2$. Поэтому должно быть, что $formT_2 \subseteq formH$. Поскольку $|\pi(T_2)| = 1$, а $|\pi(H)| = 2$, то, более точно: $formT_2 \subset formH$. Согласно лемме 18.2 [2] $formQ$ – единственная максимальная подформация формации $formH$. Значит, $formT_2 \subseteq formQ$. Однако Q – группа порядка p, а T_2 является p'-группой. Приходим к противоречию. Следовательно, $\mathrm{H} \not\subset \Phi$.

Рассмотрим теперь случай, когда H является p'-группой Шмидта. Пусть Q – t-группа, а S – группа порядка s. Тогда экран f будет иметь следующие значения:

$$f(q) = \begin{cases} formH, q = p; \\ form(\{S\} \cup m_1(q)), q = t; \\ m_1(q) \subseteq \Delta_{p'}, q \in \pi(\Phi) \setminus \{p, t\}; \\ \varnothing, q \notin \pi(\Phi). \end{cases}$$

Пусть P_1 – p-группа. а T_1 – группа порядка s. Тогда экран h_1 будет иметь следующие значения:

$$h_1(q) = \begin{cases} formT_1, q = p; \\ \mathrm{E}, q = s; \\ \varnothing, q \notin \{p, s\}. \end{cases}$$

Поскольку $T_1 \approx S \approx H/Q$, то $h_1(p) = formT_1 \subseteq formH = f(p).$ Очевидно, что $\mathrm{H}_1 \subseteq \Phi$. Пусть P_2 – p-группа, а T_2 – группа порядка t_2. Тогда $h_2(p) = formT_2$. Следовательно, для того чтобы $H_2 \subseteq F$, нужно, чтобы $t_2 = s$. Но тогда получим, что $H_2 = H_1$. Пусть теперь P_2 – t-группа, а T_2 – группа порядка p. Тогда $h_2(t_2) = formT_2$. Но в рассматриваемом случае $f(q) \subseteq \Delta_{p'}$ для всех q. Поэтому $H_2 \not\subset F$.

Рассмотрим случай, когда R – t-группа, Q – p-группа, а S – группа порядка t. В этом случае экран f будет иметь следующие значения:

$$f(q) = \begin{cases} formS, q = p; \\ form(\{H\} \cup m_1(q)), q = t; \\ m_1(q) \subseteq \Delta_{p'}, q \in \pi(\Phi) \setminus \{p, t\}; \\ \varnothing, q \notin \pi(\Phi). \end{cases}$$

Пусть P_1 – p-группа, а T_1 – группа порядка t. Тогда

$$h_1(q) = \begin{cases} formT_1, q = p; \\ \mathrm{E}, q = t; \\ \varnothing, q \notin \{p, t\}. \end{cases}$$

Следовательно, легко убедиться в том, что $\mathrm{H}_1 \subseteq \Phi$. Если P_2 – p-группа, то $h(p) = formT_2$ и поэтому T_2 – группа порядка t. Но тогда получим $\mathrm{H}_1 = \mathrm{H}_2$. Пусть тогда P_2 – t_2-группа, а T_2 – группа порядка p.

Тогда
$$h_2(q)=\begin{cases}\mathrm{E}, q=p;\\ formT_2, q=t_2;\\ \varnothing, q\notin\{p,t_2\}.\end{cases}$$

Значит, по тем же соображениям, что и выше, приходим к тому, что $\mathrm{H}_2\not\subset\Phi$.

Пусть R – t-группа, Q – p-группа, а S – группа порядка s. В этом случае экран f будет иметь следующие значения:
$$f(q)=\begin{cases}formS, q\in\{p,s\};\\ form(\{H\}\cup m_1(q)), q=t;\\ m_1(q)\subseteq\Delta_{p'}, q\in\pi(\Phi)\setminus\{p,t,s\};\\ \varnothing, q\notin\pi(\Phi).\end{cases}$$

Пусть P_1 – p-группа, а T_1 – группа порядка s. Тогда
$$h_1(q)=\begin{cases}formT_1, q=p;\\ \mathrm{E}, q=s;\\ \varnothing, q\notin\{p,s\}.\end{cases}$$

Очевидно, что $\mathrm{H}_1\subseteq\Phi$. Если P_2 – p-группа, то снова получаем, что $\mathrm{H}_1=\mathrm{H}_2$. Пусть тогда P_2 – t_2-группа, а T_2 – группа порядка p. Тогда
$$h_2(q)=\begin{cases}\mathrm{E}, q=p;\\ formT_2, q=t_2;\\ \varnothing, q\notin\{p,t_2\}.\end{cases}$$

Снова получаем, что $\mathrm{H}_2\not\subset\Phi$. Пусть $G=[R]H$, где $R=C_G(R)$ – p-группа, а H – циклическая примарная группа порядка t^2, причем $t\neq p$. В этом случае
$$f(q)=\begin{cases}formH, q=p;\\ m_1(q)\subseteq\Delta_{p'}, q\in\pi(\Phi)\setminus\{p\};\\ \varnothing, q\notin\pi(\Phi).\end{cases}$$

Пусть P_1 – p-группа, а T_1 – группа порядка t. Тогда
$$h_1(q)=\begin{cases}formT_1, q=p;\\ \mathrm{E}, q=s;\\ \varnothing, q\notin\{p,s\}.\end{cases}$$

Следовательно, $\mathrm{H}_1\subseteq\Phi$. Случай, когда P_2 – p-группа приведет к тому, что $\mathrm{H}_1=\mathrm{H}_2$. Если же P_2 – t_2-группа, а T_2 – группа порядка p, то получим, что $h_2(t_2)=formT_2$, и поэтому $\mathrm{H}_2\not\subset\Phi$. Случай, когда H – группа порядка t^3 простой нечетной экспоненты $t\neq p$ аналогичен. Лемма доказана.

ЛЕММА 3. В разрешимой формации $\Phi=\mathrm{H}_1\vee_l \mathrm{M}$, где H_1 – некоторая неприводимая локальная формация p-разложимого дефекта 2, а M – некоторая локальная p-разложимая формация, не существует других неприводимых локальных формаций p-разложимого дефекта 2, кроме формации H_1.

Доказательство. Предположим, что в формации Φ существует еще одна неприводимая локальная формация H_2 с p-разложимым дефектом 2. Согласно теореме 2 [4], для $i\in\{1,2\}$, $H_i=lformG_i$, где $G_i[R_i]H_i$ – монолитическая группа с монолитом $R_i=C_{G_i}(R_i)$ и выполняется одно из следующих условий: 1) H_i – группа Шмидта с тривиальной подгруппой Фраттини, причем если p делит порядок H_i и не делит порядок R_i, то в H_i нормальна силовская p-подгруппа; 2) H_i – циклическая примарная группа порядка q^2, где $q\neq p$; 3) H_i – неабелева группа порядка q^3 простой нечетной экспоненты $q\neq p$.

Пусть $\mathrm{M}_1=\Phi\cap\mathfrak{R}_p$. Понятно, что $\Phi=\mathrm{H}_1\vee_l \mathrm{M}_1$ и что $\mathrm{H}_2\vee_l \mathrm{M}_1\subseteq\mathrm{H}_1\vee_l \mathrm{M}_1$. Поскольку формация H_1 неприводима, то она обладает единственной максимальной локальной подформацией, которая имеет p-разложимый дефект 1. Следовательно, $\mathrm{H}_1'=\mathrm{H}_1''\vee_l \mathrm{M}'$, где H_1'' – минимальная локальная не p-разложимая формация, а M' – некоторая локальная p-разложимая формация.

Очевидно, что $\mathrm{H}_1'' \vee_l \mathrm{M}' = \mathrm{H}_1' \vee_l (\mathrm{H}_1 \cap \mathfrak{R}_p)$. Поэтому ввиду решеточного изоморфизма

$$\mathrm{H}_1 \vee_l \mathrm{M}_1 /_l \mathrm{H}_1' \vee_l \mathrm{M}_1 \approx (\mathrm{H}_1 \vee_l \mathrm{M}_1) \cap \mathrm{H}_1 /_l (\mathrm{H}_1' \vee_l \mathrm{M}_1) \cap \mathrm{H}_1 \approx \mathrm{H}_1 /_l \mathrm{H}_1' \vee_l (\mathrm{H}_1 \cap \mathfrak{R}_p)$$

получаем, что $\mathrm{H}_1' \vee_l (\mathrm{H}_1 \cap \mathfrak{R}_p)$ – максимальная локальная подформация формации $\mathrm{H} \vee_l \mathrm{M}_1$. Поскольку p-разложимый дефект формации H_2 равен 2, то $\mathrm{H}_2 \not\subset \mathrm{H}_1' \vee_l (\mathrm{H}_1 \cap \mathfrak{R}_p)$. Следовательно, ввиду приводимости формации Φ, получаем, что $\Phi = \mathrm{H}_2 \vee_l \mathrm{M}_1$, и, так же как и при доказательстве предыдущей леммы, легко строим минимальный локальный экран f формации Φ:

$$f(q) = \begin{cases} form(G_i / F_p(G_i)), q = p; \\ form(\{G_i / F_p(G_i)\} \cup m_1(q)), q \in \pi(G_i) \cup \backslash \{p\}; \\ m_1(q) \subseteq \Delta_{p'}, q \in \pi(\Phi) \setminus \pi(G); \\ \varnothing, q \notin \pi(\Phi). \end{cases}$$

Очевидно, что при $q = p$ получим следующее равенство значений экранов:

$$form(G_1 / Fp(G_1)) = form(G_2 / Fp(G_2)).$$

Рассмотрим вначале ситуацию, когда группы G_1 и G_2 являются группами разных типов. При этом, как и в предыдущей лемме, не будем учитывать упорядочение.

Пусть H_1 – группа Шмидта с тривиальной подгруппой Фраттини. Тогда во всех логически возможных случаях получаем, что $|\pi(G_1 / Fp(G_1))| = 2$. Пусть H_2 – либо циклическая группа порядка q^2, либо неабелева группа порядка q^2 простой нечетной экспоненты q. Тогда в любом случае получим, что $|\pi(G_2 / Fp(G_2))| = 1$. Следовательно, ввиду полученного выше равенства значений экранов приходим к противоречию.

Если H_1 – циклическая группа порядка q^2, то $G_1 / Fp(G_1)$ – абелева группа, а, если H_2 – неабелева группа порядка q^3 простой нечетной экспоненты q, то $G_2 / Fp(G_2)$ – неабелева. Следовательно, рассматриваемый случай ввиду отмеченного равенства также невозможен.

Пусть теперь H_1 и H_2 – группы Шмидта с тривиальной подгруппой Фраттини. Если $p \in \pi(H_1)$, то $p \in \pi(G_1 / Fp(G_1))$. Если же $p \notin \pi(H_2)$, то $p \notin \pi(G_2 / Fp(G_2))$. Получаем противоречие с тем же равенством. Следовательно, рассматриваемый случай невозможен. Предположим, что H_1 и H_2 – обе pd-группы и пусть в H_1 нормальна силовская p-подгруппа, а в H_2 – нет. Тогда в обоих случаях (когда $|\pi(G_1)| = 2$ и когда $|\pi(G_1)| = 3$), получаем, что $p \in \pi(G_2 / Fp(G_2))$ и $p \notin \pi(G_1 / Fp(G_1))$. Это означает, что мы снова приходим к противоречию с нашим равенством экранов. Пусть теперь в обеих группах H_1 и H_2 нормальны силовские p-подгруппы, но $|\pi(G_1)| = 3$, а $|\pi(G_2)| = 2$. Тогда получаем соотношение $form(G_1 / Fq(G_1)) \subseteq form(\mathrm{E} \cup m_1(q)) \subseteq \Delta_{p'}$, которое противоречит тому, что $p \in \pi(G_1 / Fq(G_1))$.

В случаях, когда G_1 и G_2 – группы одного типа, в каждом из логически возможных случаев получим, что эти группы либо изоморфны, либо порождают одну и ту же локальную формацию. Лемма доказана.

Основной результат. ТЕОРЕМА. Тогда и только тогда разрешимая приводимая локальная формация Φ имеет p-разложимый дефект 2, когда она содержит ровно 2 различные неприводимые не p-разложимые локальные формации.

Доказательство. Необходимость. Пусть разрешимая приводимая локальная формация Φ имеет p-разложимый дефект 2. Тогда, согласно теореме 2 [4] возможен один из следующих случаев: 1) $\Phi = \mathrm{M} \vee_l \mathrm{H}_1 \vee_l \mathrm{H}_2$, где M – некоторая локальная p-разложимая формация, а H_1 и H_2 – различные минимальные локальные не p-разложимые формации; 2) $\Phi = \mathrm{M} \vee_l \mathrm{H}_1$, где M – некоторая локальная p-разложимая формация, а H_1 – неприводимая локальная формация p-разложимого дефекта 2.

Прежде заметим, что в любом случае, в формации Φ не может содержаться неприводимой локальной формации, p-разложимый дефект которой больше, чем 2, поскольку это противоречит определению p-разложимого дефекта.

Пусть выполняется первое условие. Поскольку минимальные локальные не p-разложимые формации являются неприводимыми [2], то остается показать, что других неприводимых не p-разложимых формаций, кроме H_1 и H_2 в формации Φ не содержится. Действительно, согласно лемме 1 в формации Φ не может содержаться другой минимальной локальной не p-разложимой формации, кроме H_1 и H_2. Допустим, что в формации Φ содержится какая-нибудь неприводимая локальная формация p-разложимого дефекта 2 и обозначим такую формацию через H. Согласно лемме 2 равенство $\Phi = \mathrm{H} \vee_l \mathrm{M}$ невозможно, поскольку в формации $\mathrm{H} \vee_l \mathrm{M}$ может содержаться единственная минимальная локальная не p-разложимая формация. Пусть, например, это формация H_1. Но тогда, поскольку формация Φ приводима, то $\Phi = \mathrm{M} \vee_l \mathrm{H} \vee_l \mathrm{H}_1$. В этом случае согласно теореме [10] Φ – локальная формация p-разложимого дефекта 3. Полученное противоречит условию теоремы. Следовательно, в рассматриваемом случае в формации Φ содержатся ровно 2 различные неприводимые не p-разложимые локальные формации.

Пусть теперь выполняется второе условие. Тогда получим, что в формации Φ содержится неприводимая локальная формация p-разложимого дефекта 2, в которой в свою очередь содержится некоторая минимальная локальная не p-разложимая формация. Согласно лемме 2 и лемме 3 других неприводимых локальных не p-разложимых формаций в формации Φ не существует. Таким образом, доказательство необходимости завершено.

Достаточность. Пусть некоторая разрешимая локальная формация Φ содержит ровно две различные неприводимые локальные не p-разложимые формации. Тогда согласно теореме 2 [4] p-разложимый дефект формации Φ не может быть меньше, чем 2. Если же предположить, что этот дефект больше, чем 2, то согласно теореме [10] в формации Φ будут содержаться более чем 2 неприводимые локальные не p-разложимые формации. Получаем противоречие с условием теоремы. Следовательно, p-разложимый дефект формации Φ равен 2. Теорема доказана.

Заключение. Полученный в работе результат позволяет сделать вывод о том, что решетки разрешимых локальных формаций, которые имеют p-разложимый дефект 2, имеет достаточно простое строение. Этот факт позволяет широко использовать такие решетки в различных вопросах классификации локальных формаций конечных групп.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука, 1978. – 267 с.
2. Шеметков, Л.А. Формации алгебраических систем / А.А. Шеметков, А.Н. Скиба. – М.: Наука, 1989. – 253 с.
3. Скиба, А.Н. Классификация локальных формаций конечных групп с нильпотентным дефектом 2 / А.Н. Скиба, Е.А. Таргонский // Мат. заметки. – 1987. – Т. 41, № 4. – С. 490 – 499.
4. Скиба, А.Н. О локальных формациях с ограниченным *p*-разложимым дефектом / А.Н. Скиба // Изв. вузов. Математика. – 1991. – № 4. – С. 63 – 69.
5. Аниськов, В.В. Некоторые общие свойства локальных формаций с заданным Х-дефектом / В.В. Аниськов. – Гомель: Изд-во ГГУ, 1994. – № 20. – 14 с. – (Препринт).
6. Джехад, Джарадин. Элементы высоты 3 решетки *p*-насыщенных формаций / Джарадин Джэхад // Вопросы алгебры. – 1996. – Вып. 9. – С. 119 – 132.
7. Сафонов, В.Г. О разрешимых локальных формациях нильпотентного дефекта 3 / В.Г. Сафонов // Весці АН Беларусі. – 1996. – № 3. – С. 8 – 12.
8. Жевнова, Н.Г. ω-локальные формации с булевой решеткой ω-локальных подформаций / Н.Г. Жевнова // Докл. АН Беларуси. – 1997. – Т. 41, № 5. – С. 15 – 19.
9. Аниськов, В.В. О приводимых локальных формациях с заданным Н-дефектом / В.В. Аниськов // Весці АН Беларусі. – 1997. – № 4. – С. 65 – 68.
10. Аниськов, В.В. Разрешимые приводимые локальные формации *p*-разложимого дефекта 3 / В.В. Аниськов // Изв. Гомельск. гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2009. – № 5(56). – Ч. 2. – С. 91 – 94.

Поступила 16.11.2009

ON ONE PROPERTY OF LOCALIZED FORMATIONS OF p-DISSOLVABLE DEFECT 2

V. ANISKOV

The property of localized formations of p-dissolvable defect 2 is under consideration. A formation is a class of groups, closed with the relation to captures of homomorphic images and final subdirect products. It is shown that lattices of resolvable localized formations with p-dissolvable defect 2 have quite simple structure. This fact allows to use such lattices in different issues of classification of localized formations of final groups. In the given work one latticial property of localized formation with p-dissolvable defect 2 is determined: then and only then the resolvable reducible localized formation Φ has p-dissolvable defect 2, when it contains equally 2 different irreducible not p-dissolvable localized formations.