УДК 521.1

РАЗВИТИЕ МЕТОДА СОБСТВЕННОГО ВРЕМЕНИ В ЗАДАЧЕ ДВУХ ТЕЛ

д-р физ.-мат. наук, доц. Ю.В. ТРУБНИКОВ
(Витебский государственный университет им. П.М. Машерова)

В данной работе получено параметрическое представление решений задачи двух тел в терминах параметра, который естественно назвать собственным временем данной динамической системы. Найденные соотношения позволяют в удобном аналитическом виде находить радиальную составляющую и декартовы координаты гравитирующих тел. Кроме того, соответствующие дифференциальные уравнения позволяют утверждать, что задача двух тел в эллиптическом случае эквивалентна задаче о линейном гармоническом осцилляторе, что, по нашему мнению, представляет интересный теоретический факт. Полученная явная зависимость декартовых координат от параметра дает возможность находить в явном виде различные характеристики движения: скорость, ускорение, кривизну орбиты, а в гиперболическом случае – угол между асимптотами, что представляет интерес в теории рассеяния.

Введение. Система дифференциальных уравнений, описывающая кеплеровское движение двух тел в прямоугольных декартовых координатах с центром в точке с массой m_0, имеет следующий вид [1, с. 434]:

$$\ddot{x} = -\frac{\mu x}{r^3}, \quad \ddot{y} = -\frac{\mu y}{r^3}, \quad \ddot{z} = -\frac{\mu z}{r^3}, \tag{1}$$

где $\mu = f\ \ m_0 + m_1\ \ , m_0, m_1$ – массы гравитирующих тел; f – гравитационная постоянная, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Основные классические методы аналитического интегрирования системы (1) – это метод Клеро – Лапласа и метод Бине. Метод Клеро – Лапласа состоит в переходе к цилиндрической системе координат

$$x = \rho\cos\lambda, \quad y = \rho\sin\lambda, \quad r = \sqrt{\rho^2 + z^2},$$

что приводит к системе уравнений [1, с. 430]:

$$\begin{cases} u''_{\lambda\lambda} + u = \dfrac{\mu}{c^2}\ \ 1 + s^2\ \ ^{-\frac{3}{2}}, \\ s''_{\lambda\lambda} + s = 0, \end{cases} \tag{2}$$

где $u = \dfrac{1}{\rho}, \quad s = \dfrac{z}{\rho}, \quad c$ – некоторая постоянная.

Система (2) представляет собой систему из двух дифференциальных уравнений с двумя неизвестными функциями u и s, после интегрирования которой время t определяется квадратурой в зависимости от долготы λ.

В методе Бине [1, с. 464] в качестве параметра берется величина

$$\omega = \omega_0 + c\int_{t_0}^{t}\frac{dt}{r^2}. \tag{3}$$

Такой подход приводит к дифференциальному уравнению:

$$\frac{d^2u}{d\omega^2} + u = \frac{\mu}{c^2},$$

где $u = \dfrac{1}{r}$; c – некоторая постоянная.

Однако можно получить более удобное параметрическое представление решений системы (1), если в качестве параметра выбрать параметр τ следующим образом:

$$\frac{dt}{d\tau} = r\left[t\ \ \tau\ \ \right], \tag{4}$$

и в этом цель настоящей статьи

Замена времени в задаче двух тел с произвольным потенциалом

Рассмотрим задачу движения двух тел с массами m_0 и m_1 в силовом поле с потенциалом $U\ \ r\ \ ,$ $r = \sqrt{\ x_1 - x_0\ \ ^2 +\ y_1 - y_0\ \ ^2 +\ z_1 - z_0\ \ ^2}$, зависящим лишь от расстояния между телами в абсолютной декартовой системе координат.

Система дифференциальных уравнений, описывающая движение, в абсолютных декартовых координатах будет иметь вид:

$$m_0\ddot{x}_0 = \frac{\partial U(r)}{\partial x_0} = \frac{dU(r)}{dr}\cdot\frac{\partial r}{\partial x_0} = -\frac{dU(r)}{dr}\cdot\frac{1}{r}\cdot(x_1 - x_0),$$

$$m_1\ddot{x}_1 = \frac{\partial U(r)}{\partial x_1} = \frac{dU(r)}{dr}\cdot\frac{\partial r}{\partial x_1} = \frac{dU(r)}{dr}\cdot\frac{1}{r}\cdot(x_1 - x_0).$$

Аналогичные уравнения получаются и для переменных y_0, y_1, z_0, z_1.

Таким образом,

$$\ddot{x}_1 - \ddot{x}_0 = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_0}\right)\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{dU(r)}{dr}\cdot(x_1 - x_0).$$

Это уравнение дает возможность перейти к относительной системе координат; положив

$$x = x_1 - x_0,\quad y = y_1 - y_0,\quad z = z_1 - z_0,$$

получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \ddot{x} = \dfrac{m_0 + m_1}{m_0 m_1}\cdot\dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{dU(r)}{dr}\cdot x, & (5.1)\\[2ex] \ddot{y} = \dfrac{m_0 + m_1}{m_0 m_1}\cdot\dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{dU(r)}{dr}\cdot y, & (5.2)\\[2ex] \ddot{z} = \dfrac{m_0 + m_1}{m_0 m_1}\cdot\dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{dU(r)}{dr}\cdot z. & (5.3) \end{cases}$$

Заметим, что квадратичная аппроксимация потенциала $U(r)$ приводит систему (5.1) – (5.3) к системе линейных дифференциальных уравнений, но это направление исследований отражено в работах [2 – 7].

ТЕОРЕМА 1. Подстановка (4) приводит уравнение для радиальной составляющей к виду:

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} = hr + \frac{m_0 + m_1}{m_0 m_1}\cdot\frac{d}{dr}\cdot\left[r^2 U(r)\right], \tag{6}$$

где постоянная энергии h определяется равенством:

$$h = \dot{x}^2(0) + \dot{y}^2(0) + \dot{z}^2(0) - \frac{2(m_0 + m_1)}{m_0 m_1}\cdot U\left[r(0)\right]. \tag{7}$$

При этом уравнения для координат будут иметь вид:

$$r(\tau)x''(\tau) - r'(\tau)x'(\tau) - \frac{m_0 + m_1}{m_0 m_1}\cdot r^2(\tau)\cdot\frac{dU(r)}{dr}\cdot x(\tau) = 0; \tag{8.1}$$

$$r(\tau)y''(\tau) - r'(\tau)y'(\tau) - \frac{m_0 + m_1}{m_0 m_1}\cdot r^2(\tau)\cdot\frac{dU(r)}{dr}\cdot y(\tau) = 0; \tag{8.2}$$

$$r(\tau)z''(\tau) - r'(\tau)z'(\tau) - \frac{m_0 + m_1}{m_0 m_1}\cdot r^2(\tau)\cdot\frac{dU(r)}{dr}\cdot z(\tau) = 0. \tag{8.3}$$

Штрихом здесь обозначена производная по параметру τ.

Доказательство. Умножим обе части уравнения (5.1) на $\dot{x}$ (соответственно (5.2) на $\dot{y}$, (5.3) на $\dot{z}$) и сложим полученные равенства, тогда

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z} = \frac{m_0 + m_1}{m_0 m_1}\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{dU(r)}{dr}\cdot(x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}) = \frac{m_0 + m_1}{m_0 m_1}\cdot\frac{dU\left[r(t)\right]}{dt},$$

т.е.

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dt}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z} = \frac{m_0 + m_1}{m_0 m_1}\cdot\frac{dU\left[r(t)\right]}{dt}.$$

Таким образом, интеграл энергии будет иметь вид:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \frac{2(m_0 + m_1)}{m_0 m_1}\cdot U\left[r(t)\right] + h. \tag{9}$$

В терминах параметра τ данное равенство запишется в виде:

$$\frac{1}{r^2(\tau)}\cdot\left[x'^2(\tau)+y'^2(\tau)+z'^2(\tau)\right]=\frac{2(m_0+m_1)}{m_0m_1}\cdot U\left[r(\tau)\right]+h. \qquad (10)$$

Далее из системы (5.1) – (5.3) получаем

$$x\ddot{x}=\frac{m_0+m_1}{m_0m_1}\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{dU(r)}{dr}\cdot x^2; \qquad y\ddot{y}=\frac{m_0+m_1}{m_0m_1}\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{dU(r)}{dr}\cdot y^2; \qquad z\ddot{z}=\frac{m_0+m_1}{m_0m_1}\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{dU(r)}{dr}\cdot z^2.$$

Сложим эти три уравнения, тогда

$$x\ddot{x}+y\ddot{y}+z\ddot{z}=\frac{m_0+m_1}{m_0m_1}\cdot r\cdot\frac{dU(r)}{dr}. \qquad (11)$$

Из (9) и (11) получаем следующее уравнение:

$$\frac{d^2}{dt^2}(r^2)=\frac{d}{dt}(2x\dot{x}+2y\dot{y}+2z\dot{z})=2(x\ddot{x}+y\ddot{y}+z\ddot{z})+2(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)=$$

$$=\frac{2(m_0+m_1)}{m_0m_1}\cdot\frac{rdU(r)}{dr}+\frac{4(m_0+m_1)}{m_0m_1}\cdot U(r)+2h,$$

т.е.

$$\frac{d^2}{dt^2}(r^2)=\frac{2(m_0+m_1)}{m_0m_1}\cdot\left[r\frac{dU}{dr}+2U(r)\right]+2h. \qquad (12)$$

С другой стороны,

$$\frac{d^2}{dt^2}(r^2)=2(\dot{r})^2+2r\ddot{r}. \qquad (13)$$

Приравнивая правые части равенств (12) и (13) найдем, что

$$(\dot{r})^2+r\ddot{r}=\frac{m_0+m_1}{m_0m_1}\cdot\left[r\frac{dU(r)}{dr}+2U(r)\right]+h. \qquad (14)$$

Далее заметим:

$$r'(\tau)=\frac{dr}{d\tau}=\frac{dr}{dt}\cdot\frac{dt}{d\tau}=\dot{r}r,$$

$$\frac{d^2r}{d\tau^2}=\ddot{r}r^2+(\dot{r})^2r=r\left[\ddot{r}r+(\dot{r})^2\right]. \qquad (15)$$

Из равенств (14) и (15) получаем:

$$\frac{d^2r}{d\tau^2}=r\left[\ddot{r}r+(\dot{r})^2\right]=r\left\{\frac{m_0+m_1}{m_0m_1}\cdot\left[r\frac{dU(r)}{dr}+2U(r)\right]+h\right\}=hr+\frac{m_0+m_1}{m_0m_1}\cdot\left[r^2\cdot\frac{dU(r)}{dr}+2rU(r)\right]=$$

$$=hr+\frac{m_0+m_1}{m_0m_1}\cdot\frac{d}{dr}\left[r^2\cdot U(r)\right],$$

т.е. имеет место уравнение (6).

Для вывода уравнения (8.1) отметим, что

$$\frac{dx\left[t(\tau)\right]}{d\tau}=\frac{dx\left[t(\tau)\right]}{dt}\cdot\frac{dt}{d\tau}=\dot{x}r(\tau),$$

и

$$\frac{d^2x\left[t(\tau)\right]}{d\tau^2}=\ddot{x}r^2(\tau)+\dot{x}r'(\tau)=r^2(\tau)\cdot\frac{m_0+m_1}{m_0m_1}\cdot\frac{1}{r(\tau)}\cdot\frac{dU(r)}{dr}\cdot x(\tau)+\dot{x}r'(\tau)=$$

$$=r(\tau)\cdot\frac{m_0+m_1}{m_0m_1}\cdot\frac{dU(r)}{dr}\cdot x(\tau)+\frac{x'(\tau)r'(\tau)}{r(\tau)}.$$

Умножив обе части последнего уравнения на $r(\tau)$, получим уравнение (8.1). Аналогично выводятся уравнения (8.2) и (8.3). Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если

$$U(r)=\frac{fm_0m_1}{r},$$

то уравнение (6) приводится к виду

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} = hr + f\ \ m_0 + m_1\ \ . \tag{16}$$

При этом уравнения для координат преобразуются следующим образом:

$$r\ \tau\ x''\ \tau\ - r'\ \tau\ x'\ \tau\ + \mu x\ \tau\ = 0, \tag{17.1}$$

$$r\ \tau\ y''\ \tau\ - r'\ \tau\ y'\ \tau\ + \mu y\ \tau\ = 0, \tag{17.2}$$

$$r\ \tau\ z''\ \tau\ - r'\ \tau\ z'\ \tau\ + \mu z\ \tau\ = 0. \tag{17.3}$$

Доказательство. Действительно, в этом случае

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} = hr + \frac{m_0 + m_1}{m_0 m_1} \cdot \frac{d}{dr} \cdot \left[r^2 \cdot \frac{f m_0 m_1}{r} \right] = hr + f\ \ m_0 + m_1\ \ .$$

Далее из (8.1)

$$rx'' - r'x' - \frac{m_0 + m_1}{m_0 m_1} \cdot r^2 \left(-\frac{f m_0 m_1}{r^2} \right) \cdot x = rx'' - r'x' + f\ \ m_0 + m_1\ \ \cdot x = 0.$$

Уравнения (17.1) – (17.3) представляют собой линейные дифференциальные уравнения второго порядка с переменными коэффициентами.

Следствие доказано.

Случай эллиптического движения. Решение двухточечных краевых задач. Рассмотрим краевую задачу для уравнения (16).

ЛЕММА 1. Пусть $r\ \tau_0\ = r_0,\quad r\ \tau_1\ = r_1,\quad \sin\omega\ \ \tau_1 - \tau_0\ \ne 0,$ тогда решение $r\ \tau$ двухточечной краевой задачи для уравнения (16) будет иметь вид:

$$r\ \tau\ = a \sin\ \ \omega\tau + \alpha\ + \frac{\mu}{\omega^2}, \tag{18}$$

где

$$a\cos\alpha = -\frac{1}{\sin\omega\ \ \tau_1 - \tau_0} \cdot\ \ \rho_0 \cos\omega\tau_1 - \rho_1 \cos\omega\tau_0\ \ ; \tag{19}$$

$$a\sin\alpha = \frac{1}{\sin\omega\ \ \tau_1 - \tau_0} \cdot\ \ \rho_0 \sin\omega\tau_1 - \rho_1 \sin\omega\tau_0\ \ ; \tag{20}$$

$$a^2 = \frac{1}{\sin^2\omega\ \ \tau_1 - \tau_0} \cdot \left[\rho_0^2 + \rho_1^2 - 2\rho_0\rho_1 \cos\omega\ \ \tau_1 - \tau_0\ \ \right]; \tag{21}$$

$$\rho_0 = r_0 - \frac{\mu}{\omega^2}, \quad \rho_1 = r_1 - \frac{\mu}{\omega^2}; \tag{22}$$

$$\omega^2 = -h.$$

Доказательство. Функция

$$r\ \tau\ = a\sin\ \ \omega\tau + \alpha\ + \frac{\mu}{\omega^2}$$

является решением уравнения (16), остается найти неизвестные $a\cos\alpha$, $a\sin\alpha$ из системы алгебраических линейных уравнений

$$\begin{cases} \sin\omega\tau_0 a\cos\alpha + \cos\omega\tau_0 a\sin\alpha = \rho_0, \\ \sin\omega\tau_1 a\cos\alpha + \cos\omega\tau_1 a\sin\alpha = \rho_1. \end{cases} \tag{23}$$

Решая систему (23) по правилу Крамера, получаем требуемый результат.

ТЕОРЕМА 2. Решение краевой задачи $x\ \tau\quad x\ \tau_0\ = x_0,\quad x\ \tau_1\ = x_1$ для уравнения (17.1) имеет вид:

$$x\ \tau\ = b\sin\ \ \omega\tau + \beta\ + c, \tag{24}$$

где

$$b\cos\beta = -\frac{1}{\sin\omega\ \ \tau_1 - \tau_0} \cdot \left[\ \ x_0 - c\ \ \cos\omega\tau_1 -\ \ x_1 - c\ \ \cos\omega\tau_0 \right]; \tag{25}$$

$$b\sin\beta=\frac{1}{\sin\omega(\tau_1-\tau_0)}\cdot\left[(x_0-c)\sin\omega\tau_1-(x_1-c)\sin\omega\tau_0\right]; \qquad (26)$$

$$c=\frac{\omega^2\left[\rho_0x_0+\rho_1x_1-(\rho_0x_1+\rho_1x_0)\cos\omega(\tau_1-\tau_0)\right]}{2\left[\sin^2\frac{\omega(\tau_1-\tau_0)}{2}\right]\left[2\mu\cos^2\frac{\omega(\tau_1-\tau_0)}{2}+\omega^2(\rho_0+\rho_1)\right]}; \qquad (27)$$

$$\rho_0=r_0-\frac{\mu}{\omega^2},\quad \rho_1=r_1-\frac{\mu}{\omega^2},\quad \omega^2=-h.$$

Доказательство. Будем искать функцию $x(\tau)$ в виде

$$x(\tau)=b\sin(\omega\tau+\beta)+c, \qquad (28)$$

где b, c, β – некоторые постоянные. Подставив выражение (28) и соответствующие производные в уравнение (17.1), получим

$$\left[a\sin(\omega\tau+\alpha)+\frac{\mu}{\omega^2}\right]\left[-b\omega^2\sin(\omega\tau+\beta)\right]-\left[a\omega\cos(\omega\tau+\alpha)\right]\left[b\omega\cos(\omega\tau+\beta)\right]+\mu b\sin(\omega\tau+\beta)+\mu c=$$

$$=-ab\omega^2\sin(\omega\tau+\alpha)\sin(\omega\tau+\beta)-\mu b\sin(\omega\tau+\beta)-ab\omega^2\cos(\omega\tau+\alpha)\cos(\omega\tau+\beta)+\mu b\sin(\omega\tau+\beta)+\mu c=$$

$$=-ab\omega^2\cos(\alpha-\beta)+\mu c=0.$$

В результате по отношению к переменным b,c,β мы имеем систему из трех уравнений

$$\begin{cases}-ab\omega^2\cos(\alpha-\beta)+\mu c=0, & (29.1)\\ b\sin(\omega\tau_0+\beta)+c=x_0, & (29.2)\\ b\sin(\omega\tau_1+\beta)+c=x_1. & (29.3)\end{cases}$$

Выразим из уравнений (29.2), (29.3) величины $b\cos\beta, b\sin\beta$:

$$b\cos\beta=-\frac{1}{\sin\omega(\tau_1-\tau_0)}\cdot\left[(x_0-c)\cos\omega\tau_1-(x_1-c)\cos\omega\tau_0\right], \qquad (30)$$

$$b\sin\beta=\frac{1}{\sin\omega(\tau_1-\tau_0)}\cdot\left[(x_0-c)\sin\omega\tau_1-(x_1-c)\sin\omega\tau_0\right]. \qquad (31)$$

Введя следующие обозначения:

$$s=\sin\omega(\tau_1-\tau_0),\quad s_0=\cos\omega\tau_0,\quad s_1=\cos\omega\tau_1,\quad t_0=\sin\omega\tau_0,\quad t_1=\sin\omega\tau_1,$$

подставим выражения (30) и (31) в уравнение (29.1), тогда с учетом равенств (19) и (20) получим:

$$-\omega^2(a\cos\alpha\cdot b\cos\beta+a\sin\alpha\cdot b\sin\beta)+\mu c=-\omega^2\left\{\frac{1}{s}(\rho_0s_1-\rho_1s_0)\cdot\frac{1}{s}\left[x_0s_1-x_1s_0+c(s_0-s_1)\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{s}(\rho_0t_1-\rho_1t_0)\cdot\frac{1}{s}\left[x_0t_1-x_1t_0+c(t_0-t_1)\right]\right\}+\mu c=-\frac{\omega^2}{s^2}\left[(\rho_0s_1-\rho_1s_0)(x_0s_1-x_1s_0)+(\rho_0s_1-\rho_1s_0)(s_0-s_1)c+\right.$$

$$\left.+(\rho_0t_1-\rho_1t_0)(x_0t_1-x_1t_0)+(\rho_0t_1-\rho_1t_0)(t_0-t_1)c\right]+\mu c=0,$$

т.е.

$$\left\{\mu-\frac{\omega^2}{s^2}\left[(\rho_0s_1-\rho_1s_0)(s_0-s_1)+(\rho_0t_1-\rho_1t_0)(t_0-t_1)\right]\right\}c=$$

$$=\frac{\omega^2}{s^2}\left[(\rho_0s_1-\rho_1s_0)(x_0s_1-x_1s_0)+(\rho_0t_1-\rho_1t_0)(x_0t_1-x_1t_0)\right]. \qquad (32)$$

Упростим каждое из выражений

$$(\rho_0s_1-\rho_1s_0)(s_0-s_1)+(\rho_0t_1-\rho_1t_0)(t_0-t_1); \qquad (33)$$

$$(\rho_0s_1-\rho_1s_0)(x_0s_1-x_1s_0)+(\rho_0t_1-\rho_1t_0)(x_0t_1-x_1t_0). \qquad (34)$$

Раскрывая скобки и группируя нужным образом, получаем:

$$(\rho_0s_1-\rho_1s_0)(s_0-s_1)+(\rho_0t_1-\rho_1t_0)(t_0-t_1)=\rho_0s_0s_1-\rho_0s_1^2-\rho_1s_0^2+\rho_1s_0s_1+\rho_0t_0t_1-\rho_0t_1^2-\rho_1t_0^2+\rho_1t_0t_1=$$

$$=-(\rho_0+\rho_1)+(\rho_0+\rho_1)\cos\omega(\tau_1-\tau_0)=-(\rho_0+\rho_1)\left[1-\cos\omega(\tau_1-\tau_0)\right]=-2(\rho_0+\rho_1)\sin^2\frac{\omega(\tau_1-\tau_0)}{2}; \qquad (35)$$

$$(\rho_0s_1-\rho_1s_0)(x_0s_1-x_1s_0)+(\rho_0t_1-\rho_1t_0)(x_0t_1-x_1t_0)=\rho_0x_0s_1^2-\rho_0x_1s_0s_1-\rho_1x_0s_0s_1+\rho_1x_1s_0^2+$$

$$+\rho_0x_0t_1^2-\rho_0x_1t_0t_1-\rho_1x_0t_0t_1+\rho_1x_1t_0^2=\rho_0x_0+\rho_1x_1-(\rho_0x_1+\rho_1x_0)\cos\omega(\tau_1-\tau_0). \qquad (36)$$

Подставляя выражения (35) и (36) в уравнение (32), найдем выражение для c:

$$c=\frac{\frac{\omega^2}{s^2}\left[\rho_0x_0+\rho_1x_1-(\rho_0x_1+\rho_1x_0)\cos\omega(\tau_1-\tau_0)\right]}{\mu+\dfrac{2\omega^2(\rho_0+\rho_1)\sin^2\frac{\omega(\tau_1-\tau_0)}{2}}{4\sin^2\frac{\omega(\tau_1-\tau_0)}{2}\cos^2\frac{\omega(\tau_1-\tau_0)}{2}}}=$$

$$=\frac{2\omega^2\left[\rho_0x_0+\rho_1x_1-(\rho_0x_1+\rho_1x_0)\cos\omega(\tau_1-\tau_0)\right]\cos^2\frac{\omega(\tau_1-\tau_0)}{2}}{4\sin^2\frac{\omega(\tau_1-\tau_0)}{2}\cos^2\frac{\omega(\tau_1-\tau_0)}{2}\left[2\mu\cos^2\frac{\omega(\tau_1-\tau_0)}{2}+\omega^2(\rho_0+\rho_1)\right]}=$$

$$=\frac{\omega^2\left[\rho_0x_0+\rho_1x_1-(\rho_0x_1+\rho_1x_0)\cos\omega(\tau_1-\tau_0)\right]}{2\sin^2\frac{\omega(\tau_1-\tau_0)}{2}\left[2\mu\cos^2\frac{\omega(\tau_1-\tau_0)}{2}+\omega^2(\rho_0+\rho_1)\right]}.$$

Теорема доказана.

Заметим, что формулы (18), (21), (24) – (27) позволяют по двум наблюдениям находить $r_{\max}, r_{\min}, x_{\max}, x_{\min}$ (аналогично $y_{\max}, y_{\min}, z_{\max}, z_{\min}$).

СЛЕДСТВИЕ 2. Справедливы равенства

$$r_{\max}=\frac{\mu}{\omega^2}+\frac{1}{\left|\sin\omega(\tau_1-\tau_0)\right|}\cdot\left[\rho_0^2+\rho_1^2-2\rho_0\rho_1\cos\omega(\tau_1-\tau_0)\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{37}$$

$$r_{\min}=\frac{\mu}{\omega^2}-\frac{1}{\left|\sin\omega(\tau_1-\tau_0)\right|}\cdot\left[\rho_0^2+\rho_1^2-2\rho_0\rho_1\cos\omega(\tau_1-\tau_0)\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{38}$$

$$x_{\max}=c+\frac{1}{\left|\sin\omega(\tau_1-\tau_0)\right|}\cdot\left[(x_0-c)^2+(x_1-c)^2-2(x_0-c)(x_1-c)\cos\omega(\tau_1-\tau_0)\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{39}$$

$$x_{\min}=c-\frac{1}{\left|\sin\omega(\tau_1-\tau_0)\right|}\cdot\left[(x_0-c)^2+(x_1-c)^2-2(x_0-c)(x_1-c)\cos\omega(\tau_1-\tau_0)\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{40}$$

где c определяется равенством (27).

Доказательство. Равенства (37), (38) непосредственно вытекают из вида радиальной составляющей (18). Для доказательства равенств (39), (40) заметим, что

$$b^2=b^2\cos^2\beta+b^2\sin^2\beta=\frac{1}{s^2}\left(\left[(x_0-c)s_1-(x_1-c)s_0\right]^2+\left[(x_0-c)t_1-(x_1-c)t_0\right]^2\right)=$$

$$=\frac{1}{s^2}\left[(x_0-c)^2s_1^2-2(x_0-c)(x_1-c)s_0s_1+(x_1-c)^2s_0^2+(x_0-c)^2t_1^2-2(x_0-c)(x_1-c)t_0t_1+(x_1-c)^2t_0^2\right]=$$

$$=\frac{1}{s^2}\cdot\left[(x_0-c)^2+(x_1-c)^2-2(x_0-c)(x_1-c)\cos\omega(\tau_1-\tau_0)\right].$$

Следствие доказано.

Случай параболического движения. В случае параболического движения $h=0$ и, таким образом, уравнение (16) будет иметь вид:

$$\frac{d^2r}{d\tau^2}=\mu. \tag{41}$$

ТЕОРЕМА 3. В параболическом случае решение двухточечной краевой задачи будет иметь вид:

$$r(\tau)=\frac{\mu\tau^2}{2}+\left[\frac{r_1-r_0}{\tau_1-\tau_0}-\frac{\mu}{2}(\tau_1+\tau_0)\right]\tau+\frac{r_0\tau_1-r_1\tau_0}{\tau_1-\tau_0}+\frac{1}{2}\mu\tau_0\tau_1. \tag{42}$$

Доказательство. Действительно, из уравнения (41) следует, что

$$\frac{dt}{d\tau}=r(\tau)=\frac{\mu\tau^2}{2}+\mu_1\tau+\mu_0, \tag{43}$$

где постоянные μ_0,μ_1 определяются из системы уравнений

$$\begin{cases}\mu_1\tau_0+\mu_0=r_0-\dfrac{\mu\tau_0^2}{2},\\ \mu_1\tau_1+\mu_0=r_1-\dfrac{\mu\tau_1^2}{2}.\end{cases} \tag{44}$$

Таким образом,

$$\mu_0=\frac{r_0\tau_1-r_1\tau_0}{\tau_1-\tau_0}+\frac{1}{2}\mu\tau_0\tau_1,\quad \mu_1=\frac{r_1-r_0}{\tau_1-\tau_0}-\frac{\mu}{2}(\tau_1+\tau_0).$$

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполняется условие:

$$\mu(\tau_1+\tau_0)^2-2(r_0+r_1)\neq 0. \tag{45}$$

Тогда решение краевой задачи

$$x(\tau_0)=x_0,\quad x(\tau_1)=x_1$$

в параболическом случае будет иметь вид:

$$x(\tau)=a\tau^2+b\tau+c, \tag{46}$$

где

$$a=\frac{\Delta_1}{\Delta},\quad b=\frac{\Delta_2}{\Delta},\quad c=\frac{\Delta_3}{\Delta}, \tag{47}$$

$$\Delta=\frac{1}{2}(\tau_1+\tau_0)\left[\mu(\tau_1+\tau_0)^2-2(r_0+r_1)\right], \tag{48}$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}0&-\mu_1&\mu\\ x_0&\tau_0&1\\ x_1&\tau_1&1\end{vmatrix},\qquad \Delta_2=\begin{vmatrix}2\mu_0&0&\mu\\ \tau_0^2&x_0&1\\ \tau_1^2&x_1&1\end{vmatrix},\qquad \Delta_3=\begin{vmatrix}2\mu_0&-\mu_1&0\\ \tau_0^2&\tau_0&x_0\\ \tau_1^2&\tau_1&x_1\end{vmatrix},$$

$$\mu_0=\frac{r_0\tau_1-r_1\tau_0}{\tau_1-\tau_0}+\frac{1}{2}\mu\tau_0\tau_1,\quad \mu_1=\frac{r_1-r_0}{\tau_1-\tau_0}-\frac{\mu}{2}(\tau_1+\tau_0).$$

Доказательство. Подставляя выражение

$$x(\tau)=a\tau^2+b\tau+c$$

в уравнение

$$r(\tau)x''(\tau)-r'(\tau)x'(\tau)+\mu x(\tau)=0,$$

получаем:

$$2a\left(\frac{\mu\tau^2}{2}+\mu_1\tau+\mu_0\right)-(\mu\tau+\mu_1)(2a\tau+b)+\mu(a\tau^2+b\tau+c)=a\mu\tau^2+2a\mu_1\tau+2a\mu_0-$$

$$-2a\mu\tau^2-\mu b\tau-2a\mu_1\tau-\mu_1 b+a\mu\tau^2+\mu b\tau+\mu c=2\mu_0 a-\mu_1 b+\mu c.$$

Таким образом, система для нахождения коэффициентов $b,\ c,\ \beta$ будет иметь вид:

$$\begin{cases}2\mu_0 a-\mu_1 b+\mu c,\\ a\tau_0^2+b\tau_0+c=x_0,\\ a\tau_1^2+b\tau_1+c=x_1.\end{cases}$$

Найдем определитель Δ этой системы:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2\mu_0&-\mu_1&\mu\\ \tau_0^2&\tau_0&1\\ \tau_1^2&\tau_1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2\mu_0&-\mu_1&\mu\\ \tau_0^2&\tau_0&1\\ \tau_1^2-\tau_0^2&\tau_1-\tau_0&0\end{vmatrix}=$$

$$=(\tau_1-\tau_0)\begin{vmatrix}2\mu_0&-\mu_1&\mu\\ \tau_0^2&\tau_0&1\\ \tau_0+\tau_1&1&0\end{vmatrix}=(\tau_1-\tau_0)\left(\mu\begin{vmatrix}\tau_0^2&\tau_0\\ \tau_0+\tau_1&1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}2\mu_0&-\mu_1\\ \tau_0+\tau_1&1\end{vmatrix}\right)=$$

$$=(\tau_1-\tau_0)\left[\mu(\tau_0^2-\tau_0^2-\tau_0\tau_1)-(2\mu_0+\mu_1\tau_0+\mu_1\tau_1)\right]=-(\tau_1-\tau_0)\left[\mu\tau_0\tau_1+2\mu_0+\mu_1(\tau_0+\tau_1)\right]=$$

$$=-(\tau_1-\tau_0)\left[\mu\tau_0\tau_1+\frac{2(r_0\tau_1-r_1\tau_0)}{\tau_1-\tau_0}+\mu\tau_0\tau_1+\frac{(r_1-r_0)(\tau_0+\tau_1)}{\tau_1-\tau_0}-\frac{\mu(\tau_0+\tau_1)^2}{2}\right]=$$

$$=-\left[2\mu\tau_0\tau_1(\tau_1-\tau_0)+2r_0\tau_1-2r_1\tau_0+r_1\tau_0+r_1\tau_1-r_0\tau_0-r_0\tau_1-\frac{\mu}{2}(\tau_0+\tau_1)^2(\tau_1-\tau_0)\right]=$$

$$=-\left[2\mu\tau_0\tau_1(\tau_1-\tau_0)+(r_0+r_1)(\tau_1-\tau_0)-\frac{\mu}{2}(\tau_0+\tau_1)^2(\tau_1-\tau_0)\right]=\frac{\tau_1-\tau_0}{2}\left[\mu(\tau_1-\tau_0)^2-2(r_0+r_1)\right].$$

Далее применяем правило Крамера.

Теорема доказана.

Случай гиперболического движения. В случае гиперболического движения $h>0,$ но уравнение для радиальной составляющей $r(\tau)$ имеет тот же вид:

$$\frac{d^2r}{d\tau^2}=hr+\mu.$$

ТЕОРЕМА 5. В гиперболическом случае решение двухточечной краевой задачи

$$r(\tau_0)=r_0,\quad r(\tau_1)=r_1$$

будет иметь вид:

$$r(\tau)=c_1e^{\omega\tau}+c_2e^{-\omega\tau}-\frac{\mu}{\omega^2}, \tag{49}$$

где

$$c_1=\frac{1}{2\operatorname{sh}\omega(\tau_1-\tau_0)}\cdot\left[\left(r_1+\frac{\mu}{\omega^2}\right)e^{-\omega\tau_0}-\left(r_0+\frac{\mu}{\omega^2}\right)e^{-\omega\tau_1}\right], \tag{50}$$

$$c_2=\frac{1}{2\operatorname{sh}\omega(\tau_1-\tau_0)}\cdot\left[\left(r_0+\frac{\mu}{\omega^2}\right)e^{\omega\tau_1}-\left(r_1+\frac{\mu}{\omega^2}\right)e^{\omega\tau_0}\right], \tag{51}$$

$$\omega=\sqrt{h}.$$

Доказательство. Система для нахождения коэффициентов c_1,c_2 определяется краевыми условиями:

$$\begin{cases} c_1e^{\omega\tau_0}+c_2e^{-\omega\tau_0}=r_0+\dfrac{\mu}{\omega^2},\\ c_1e^{\omega\tau_1}+c_2e^{-\omega\tau_1}=r_1+\dfrac{\mu}{\omega^2}.\end{cases}$$

Покажем, что определитель Δ этой системы не равен нулю. Действительно,

$$\Delta=\begin{vmatrix} e^{\omega\tau_0} & e^{-\omega\tau_0}\\ e^{\omega\tau_1} & e^{-\omega\tau_1}\end{vmatrix}=2\operatorname{sh}\omega(\tau_1-\tau_0)\neq 0. \tag{52}$$

ТЕОРЕМА 6. Пусть выполнено условие:

$$\omega^2(\rho_0+\rho_1)\neq 2\mu\operatorname{ch}^2\left[\frac{\omega(\tau_1-\tau_0)}{2}\right], \tag{53}$$

где

$$\rho_0=r_0+\frac{\mu}{\omega^2},\quad \rho_1=r_1+\frac{\mu}{\omega^2}, \tag{54}$$

тогда решение $x(\tau)$ двухточечной краевой задачи

$$x(\tau_0)=x_0,\quad x(\tau_1)=x_1$$

выражается следующим образом:

$$x(\tau)=ae^{\omega\tau}+be^{-\omega\tau}+c, \tag{55}$$

где $a=\dfrac{\Delta_1}{\Delta},\quad b=\dfrac{\Delta_2}{\Delta},\quad c=\dfrac{\Delta_3}{\Delta},$

$$\Delta=\begin{vmatrix}2c_2\omega^2 & 2c_1\omega^2 & \mu\\ e^{\omega\tau_0} & e^{-\omega\tau_0} & 1\\ e^{\omega\tau_1} & e^{-\omega\tau_1} & 1\end{vmatrix},\quad \Delta_1=\begin{vmatrix}0 & 2c_1\omega^2 & \mu\\ x_0 & e^{-\omega\tau_0} & 1\\ x_1 & e^{-\omega\tau_1} & 1\end{vmatrix},\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}2c_2\omega^2 & 0 & \mu\\ e^{\omega\tau_0} & x_0 & 1\\ e^{\omega\tau_1} & x_1 & 1\end{vmatrix},\quad \Delta_3=\begin{vmatrix}2c_2\omega^2 & 2c_1\omega^2 & 0\\ e^{\omega\tau_0} & e^{-\omega\tau_0} & x_0\\ e^{\omega\tau_1} & e^{-\omega\tau_1} & x_1\end{vmatrix},$$

c_1, c_2 определяется равенствами (50), (51).

Доказательство. Покажем прежде всего, что при выполнении условия

$$2c_1\omega^2b+2c_2\omega^2a+\mu c=0 \tag{56}$$

функция $x(\tau)$, определяемая равенством (55), является решением уравнения (17.1). Действительно,

$$\left(c_1e^{\omega\tau}+c_2e^{-\omega\tau}-\frac{\mu}{\omega^2}\right)(a\omega^2e^{\omega\tau}+b\omega^2e^{-\omega\tau})-(\omega c_1e^{\omega\tau}-\omega c_2e^{-\omega\tau})(a\omega e^{\omega\tau}-b\omega e^{-\omega\tau})+$$

$$+\mu(ae^{\omega\tau}+be^{-\omega\tau}+c)=c_1\omega^2ae^{2\omega\tau}+c_1\omega^2b+c_2\omega^2a+c_2\omega^2be^{-2\omega\tau}-\mu ae^{\omega\tau}-\mu be^{-\omega\tau}-$$

$$-c_1\omega^2ae^{2\omega\tau}+c_1\omega^2b+c_2\omega^2a-c_2\omega^2be^{-2\omega\tau}+\mu ae^{\omega\tau}+\mu be^{-\omega\tau}+\mu c=2c_1\omega^2b+2c_2\omega^2a+\mu c=0.$$

Таким образом, для нахождения коэффициентов a, b, c получается система уравнений

$$\begin{cases}2c_2\omega^2a+2c_1\omega^2b+\mu c=0,\\ e^{\omega\tau_0}a+e^{-\omega\tau_0}b+c=x_0,\\ e^{\omega\tau_1}a+e^{-\omega\tau_1}b+c=x_1.\end{cases} \tag{57}$$

Покажем, что определитель Δ системы (57) не равен нулю. Действительно,

$$\Delta=\begin{vmatrix}2c_2\omega^2 & 2c_1\omega^2 & \mu\\ e^{\omega\tau_0} & e^{-\omega\tau_0} & 1\\ e^{\omega\tau_1} & e^{-\omega\tau_1} & 1\end{vmatrix}=2c_2\omega^2(e^{-\omega\tau_0}-e^{-\omega\tau_1})-2c_1\omega^2(e^{\omega\tau_0}-e^{\omega\tau_1})+\mu(e^{\omega\tau_0}e^{-\omega\tau_1}-e^{-\omega\tau_0}-e^{\omega\tau_1})=$$

$$=\frac{2\omega^2}{2\operatorname{sh}\omega(\tau_1-\tau_0)}\cdot(\rho_1e^{\omega\tau_0}-\rho_1e^{\omega\tau_1})(e^{-\omega\tau_0}-e^{-\omega\tau_1})+\frac{2\omega^2}{2\operatorname{sh}\omega(\tau_1-\tau_0)}\cdot(\rho_0e^{-\omega\tau_1}-\rho_1e^{-\omega\tau_0})(e^{\omega\tau_0}-e^{\omega\tau_1})-$$

$$-2\mu\operatorname{sh}\omega(\tau_1-\tau_0)=-\frac{\omega^2}{\operatorname{sh}\omega(\tau_1-\tau_0)}\cdot(\rho_1-\rho_1e^{\omega\tau_0}e^{-\omega\tau_1}-\rho_0e^{\omega\tau_1}e^{-\omega\tau_0}+\rho_0-\rho_0e^{\omega\tau_0}e^{-\omega\tau_1}+\rho_0+\rho_1-\rho_1e^{-\omega\tau_0}e^{\omega\tau_1})-$$

$$-2\mu\operatorname{sh}\omega(\tau_1-\tau_0)=-\frac{\omega^2}{\operatorname{sh}\omega(\tau_1-\tau_0)}\cdot\left[2(\rho_0+\rho_1)-2(\rho_0+\rho_1)\operatorname{ch}\omega(\tau_1-\tau_0)\right]-2\mu\operatorname{sh}\omega(\tau_1-\tau_0)=$$

$$=-\frac{2\omega^2(\rho_0+\rho_1)}{\operatorname{sh}\omega(\tau_1-\tau_0)}\cdot\left[1-\operatorname{ch}\omega(\tau_1-\tau_0)\right]-2\mu\operatorname{sh}\omega(\tau_1-\tau_0)=\frac{4\omega^2(\rho_0+\rho_1)\operatorname{sh}^2\left[\frac{\omega(\tau_1-\tau_0)}{2}\right]}{\operatorname{sh}\omega(\tau_1-\tau_0)}-2\mu\operatorname{sh}\omega(\tau_1-\tau_0)=$$

$$=\frac{2}{\operatorname{sh}\omega(\tau_1-\tau_0)}\cdot\left\{2\omega^2(\rho_0+\rho_1)\operatorname{sh}^2\left[\frac{\omega(\tau_1-\tau_0)}{2}\right]-\mu\operatorname{sh}^2\omega(\tau_1-\tau_0)\right\}=$$

$$=\frac{4\operatorname{sh}^2\left[\frac{\omega(\tau_1-\tau_0)}{2}\right]}{\operatorname{sh}\omega(\tau_1-\tau_0)}\cdot\left\{\omega^2(\rho_0+\rho_1)-2\mu\operatorname{ch}^2\left[\frac{\omega(\tau_1-\tau_0)}{2}\right]\right\}.$$

Из условия (53) следует, что определитель системы (57) не равен нулю. Далее осталось применить правило Крамера.

Теорема доказана.

Заключение. Построен алгоритм замены времени особым параметром, который естественно назвать собственным временем динамической системы, в задаче двух тел с произвольным потенциалом, зависящим только от расстояния между телами. Для ньютоновского потенциала такая конструкция приводит к явной параметрической зависимости как радиальной составляющей, так и декартовых координат движущихся тел в случае эллиптического, параболического и гиперболического движений. Другое эффективное направление линеаризации уравнений задачи многих тел основано на чебышевской аппроксимации потенциала и отражено в работах [2 – 7]. Метод собственного времени динамической системы будет полезен в космологии, квантовой и небесной механике, в частности, для развития теории движения искусственных спутников Земли и т. д.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубошин, Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы / Г.Н. Дубошин. – М.: Наука, 1975. – 800 с.
2. Трубников, Ю.В. Решение задачи трех тел с предварительной чебышевской аппроксимацией / Ю.В. Трубников, А.М. Воронов // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений: тр. междунар. матем. конф., посв. 100-летию со дня рожд. акад. Ф.Д. Гахова, Минск, 13 − 19 сент. 2006 г.; Ин-т математики НАН Беларуси; редкол.: А.А. Килбас, С.В. Рогозин. – Минск, 2006. – С. 134 – 138.
3. Трубников, Ю.В. Аппроксимативный метод решения задачи многих тел / Ю.В. Трубников, А.М. Воронов // Весн. Віцебск. дзярж. ун-та. – 2008. – № 2(48). – С. 130 − 138.
4. Трубников, Ю.В. Аппроксимация силовой функции общей задачи многих тел в метрике L_2 / Ю.В. Трубников, А.М. Воронов // Вестн. Полоц. гос. ун-та. Сер. С. Фундаментальные науки. – 2008. – № 3. – С. 133 − 140.
5. Трубников, Ю.В. Чебышевская аппроксимация силовой функции общей задачи многих тел / Ю.В. Трубников, А.М. Воронов // Математические идеи П.Л. Чебышева и их приложение к современным проблемам естествознания: тез. 4-й междунар. матем. конф., Обнинск, 14 − 18 мая 2008 г. / Российский фонд фундаментальных исследований, Обнинский гос. техн. ун-т атомной энергетики, Матем. ин-т им. В.А. Стеклова РАН, Ин-т матем. моделирования РАН, МГУ им. М.В. Ломоносова, Ин-т прикл. матем. им. Келдыша РАН, Ин-т вычисл. матем. РАН; редкол.: В.А. Галкин [и др.]. – Обнинск, 2008. – С. 78 – 79.
6. Трубников, Ю.В. Аппроксимативный метод решения задачи многих тел / Ю.В. Трубников, А.М. Воронов // X Белорус. матем. конф.: тез. междунар. науч. конф., Минск, 3 − 7 нояб. 2008 г.; Тр. Ин-та математики НАН Беларуси; редкол.: А.А. Килбас, С.В. Рогозин. – Минск, 2006. – С. 134 – 138.
7. Трубников, Ю.В. Метод чебышевской аппроксимации потенциала в задаче многих тел / Ю.В. Трубников, А.М. Воронов. – Витебск: Изд-во УО «ВГУ им. П.М. Машерова», 2009. – 187 с.

Поступила 28.01.2010

THE DEVELOPMENT OF PROPER TIME METHOD IN TWO-BODY PROBLEM

Y. TRUBNIKOV

The parametric representation of the solutions is obtained for two-body problem in terms of parameter, which can be naturally named as a proper time of the given dynamical system. The found correlations allow to approximate the radial component and Cartesian coordinates of the gravitating bodies.

Moreover, the appropriate differential equations make it possible to assert that the elliptic case of the two-body problem is equivalent to the harmonic oscillator problem.