

УДК 621.31739

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ МЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ПЬЕЗОПЛАСТИНЫ С ЦЕЛЬЮ РАЗРАБОТКИ ПЬЕЗОПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ

*канд. техн. наук, доц. В.И. ЗУБЦОВ
(Полоцкий государственный университет)*

Предложена математическая модель резонансных измерительных пьезопреобразователей, позволяющих решать весьма сложную задачу контроля напряжённого состояния внутри твёрдых сплошных сред. Обоснованы важнейшие характеристики данных пьезопреобразователей, обладающих управляемыми селективностью и электроупругостью, повышающие точность измерения.

В основе модели использована взаимосвязь механической нагрузки пьезоэлектриков и возникающей при этом напряженности электрического поля, а также характера взаимодействия контролируемых твердых сплошных сред с пьезопреобразователями. Кроме того, на основе математической модели можно обосновать факторы, влияющие на важнейшие для пьезопреобразователей контроля напряженного состояния внутри твердых сплошных сред характеристики: чувствительность, линейность, диапазон измерения, управляемые селективность, электроупругость и сжимаемость, а также частотные постоянные, используемые для описания физических процессов в пьезорезонансных системах.

Для построения модели пьезоэлектрического измерительного преобразователя механических напряжений необходимо составить его уравнение движения, выбрать соответствующее данному случаю уравнение пьезоэффекта, а также принять следующие допущения:

- частота упругих колебаний пьезопреобразователя определяется частотой упругих колебаний чувствительного элемента (ЧЭ) пьезопреобразователя;
- преобразователь, кроме ЧЭ, содержит большое число других элементов, влияние которых на резонансную частоту колебаний преобразователя незначительно;
- все механические напряжения, кроме механических напряжений в направлении движения преобразователя, равны нулю;
- амплитуда знакопеременных механических напряжений и деформаций не больше предельно допустимых значений.

Пусть в качестве чувствительного элемента используется пьезоэлектрическая прямоугольная пластина из пьезокерамики типа ЦТС, рис. 1 [1].

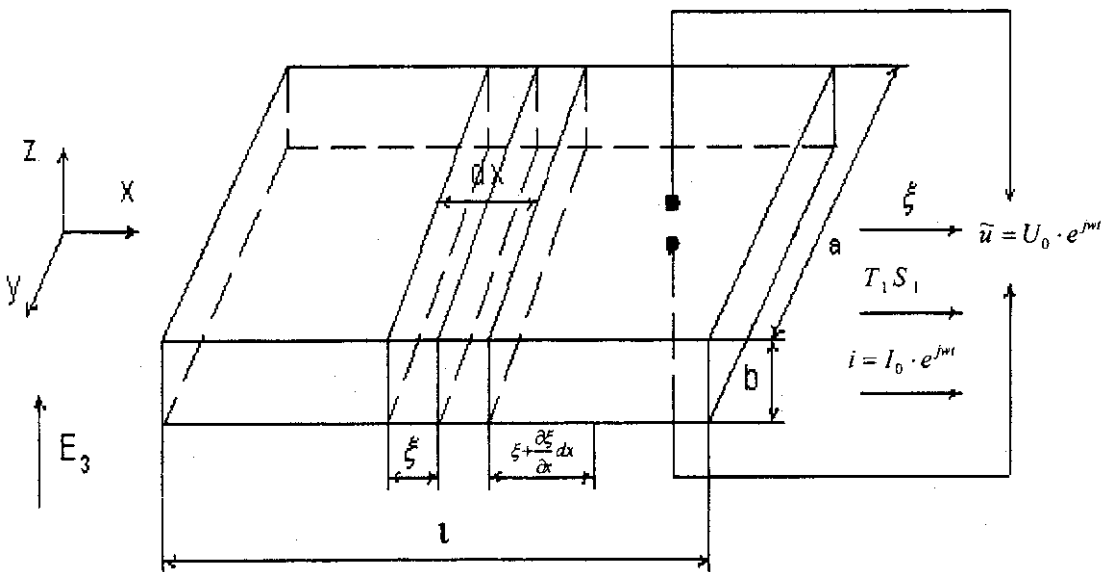


Рис. 1. Пьезоэлектрическая прямоугольная пластина

Запишем уравнения в общепринятых обозначениях [2-4], связывающие для элементарного объема механическое напряжение T и деформацию S с напряженностью электрического поля E и электрическим смещением D :

$$D^E = dT + \varepsilon^T \cdot E;$$

$$S^T = d_t E + S^E \cdot T,$$

где S – деформация пьезопластины; T – механическая нагрузка; D – электрическое смещение; E – напряженность электрического поля; d_t , S^E – пьезоэлектрические коэффициенты; ε^T – диэлектрическая проницаемость. Верхние индексы E и T обозначают постоянство соответственно напряжения электрического поля и механической нагрузки. Нижний индекс t обозначает операцию транспонирования матрицы.

Для данного случая вышеозначенные уравнения будут иметь вид:

$$D_3 = d_{31} \cdot T_1 + \varepsilon_{33}^T \cdot E_3; \quad (1)$$

$$S_1 = S_{11}^E \cdot T_1 + d_{t31} \cdot E_3. \quad (2)$$

С учётом принятых допущений коэффициент S_{11}^E , называемый упругой податливостью, для тонкой пластины является определяющей величиной, так как все компоненты механического напряжения, за исключением T_1 , равны нулю. Кроме того, в общепринятых обозначениях величина $\gamma_1^E = 1/S_{11}^E$, т.е. обратная упругой податливости и называемая модулем Юнга, широко используется на практике.

Составим уравнение движения для элементарного объема. Под воздействием механического движения T_1 левая боковая поверхность сместится на величину ξ , правая – на величину $\xi + \frac{d\xi}{dx} dx$ (см. рис. 1).

Результирующая деформация $S_1 = \frac{d\xi}{dx}$. Поэтому, если T_1 – напряжение, приложенное к левой боковой поверхности элементарного объема, то $T_1 + \frac{dT_1}{dx} dx$ – напряжение на правой его боковой поверхности.

Сила, действующая на элементарный объем, равна

$$F = \frac{dT_1}{dx} dx \cdot a \cdot b,$$

где $a \cdot b$ – площадь поперечного сечения пластины (a – ширина, b – толщина).

По закону Ньютона

$$\frac{dT_1}{dx} dx \cdot a \cdot b - \rho dx \cdot a \cdot b \frac{d^2\xi}{dt^2} = 0,$$

где ρ – плотность вещества пластины.

Таким образом,

$$\frac{dT_1}{dx} - \rho \frac{d^2\xi}{dt^2} = 0 \quad (3)$$

является уравнением движения чувствительного элемента преобразователя.

Используя уравнение (1) и первоначальные допущения, получим

$$\frac{dT_1}{dx} = \frac{1}{s_{11}^E} \cdot \frac{dS_1}{dx}.$$

С учетом того, что $S_1 = \frac{d\xi}{dx}$, полученное уравнение будет иметь вид

$$\frac{dT_1}{dx} = \frac{1}{s_{11}^E} \cdot \frac{d^2\xi}{dx^2}. \quad (4)$$

Из уравнений (3) и (4) и с учетом модуля Юнга γ_1^E получим уравнение, называемое в математической физике волновым:

$$\frac{\gamma_1^E d^2\xi}{\rho dx^2} = \frac{d^2\xi}{dt^2}.$$

Учитывая, что скорость распространения упругих колебаний равна $v = \sqrt{\gamma_{11}^E / \rho}$, полученное волновое уравнение перепишем в следующем виде:

$$\frac{d^2 \xi}{dx^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{d^2 \xi}{dt^2}. \quad (5)$$

Таким образом, из проведенного анализа следует, что пьезоэлектрические колебания пластины для данного случая описываются дифференциальным уравнением второго порядка в частных производных.

Уравнение (5) решается методом разделения переменных

$$\xi(x, t) = X(x) \cdot T(t), \quad \frac{1}{X(x)} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{1}{T(t)} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = -n^2. \quad (6)$$

Решения этих уравнений будут соответственно:

$$\begin{aligned} X &= A \cdot \cos nx + B \cdot \sin nx; \\ T &= C \cdot \cos nvt + D \cdot \sin nvt = M \cdot \cos(nvt + \varphi), \end{aligned} \quad (7)$$

где $n = m \cdot \pi / l$; ($m = 1, 2, 3, \dots$).

Так как механические напряжения действуют по синусоидальному закону с определенной частотой f , то движение чувствительного элемента преобразователя будут иметь колебательный характер.

Работа пьезо преобразователя механических напряжений основана на явлении механического резонанса и зависит от управления частотой путем изменения условий крепления его чувствительного элемента [5, 6] и условий акустического взаимодействия с окружающей средой. Эти условия являются важными факторами в работе пьезо преобразователя механических напряжений.

Для выявления условий креплений чувствительного элемента на функционирование преобразователя механических напряжений в условиях резонанса и математического описания происходящих при этом в нем электромеханических процессов необходимо выбрать граничные условия. Для этого колебания чувствительного элемента рассмотрим для двух случаев:

- 1) оба конца пластины закреплены;
- 2) оба конца пластины свободны.

Случай 1. При закрепленных концах пластины граничные условия запишутся так:

$$\xi(x, t) = X(0) \cdot T(t) = 0, \quad \xi(x, t) = X(l) \cdot T(t) = 0,$$

где l – длина пластины.

Решения будем искать только для интересующего нас случая резонансной частоты. Из выражений (6) и (7) следуют окончательные решения:

$$\xi(x, t) = B \cdot \sin\left(\frac{\omega}{v} x\right) \cdot e^{j(\omega t - \varphi)}, \quad (8)$$

где $\omega = \frac{m\pi v}{l}$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) – частота колебаний.

$$\frac{\partial \xi(x, t)}{\partial x} = \frac{\omega}{v} B \cdot \cos\left(\frac{\omega}{v} x\right) e^{j(\omega t - \varphi)} = S(x, t). \quad (9)$$

Для определения постоянной интегрирования B и электрического тока воспользуемся уравнениями пьезоэффекта (1) и (2):

$$S_1 = S_{11}^E \cdot T_1 + d_{31} \cdot E_3;$$

$$D_3 = d_{31} \cdot T_1 + \xi_{33} \cdot E_3.$$

Постоянную интегрирования запишем как

$$B = \frac{v}{\omega} \cdot \frac{U_0 \cdot \gamma_{11}^E d_{31}}{b}, \quad (10)$$

где U_0 – электрическое напряжение (см. рис. 1); b – толщина пластины; γ – модуль Юнга.

В пластине электрический ток \dot{I} определяем по формуле

$$\dot{I} = \int_0^{\ell} j \cdot \omega \cdot a \cdot D_3 \cdot dx, \quad (11)$$

где j – мнимая единица.

Опуская простейшие выкладки, приводим конечное выражение для тока:

$$\dot{I} = ja \left[\varepsilon_{33}^s \frac{U_0 \omega}{b} e^{j\alpha \ell} \cdot \ell - e_{31} \cdot \text{tg} \left(\frac{\omega}{v} \ell \right) e^{j(\alpha \ell - \varphi)} v \frac{U_0}{b} d_{31} \gamma_{11}^E \cdot e^{j(\alpha \ell - \varphi)} \right], \quad (12)$$

где e_{31} – пьезоэлектрический коэффициент.

Полная проводимость пьезопластины при гармонических колебаниях

$$Y = \frac{I}{U_0 e^{j\omega t}} = ja \left[\frac{\omega \varepsilon_{33}^s}{b} \ell - e_{31} v \text{tg} \left(\frac{\omega}{v} \ell \right) \cdot e^{-j\varphi} \frac{d_{31}}{b} \gamma_{11}^E \right]. \quad (13)$$

Из этого выражения можно найти резонансные и антирезонансные частоты.

Резонансные частоты определяются из условия: $Y \rightarrow \infty$.

Очевидно, что если $Y \rightarrow \infty$ и $\text{tg} \left(\frac{\omega}{v} \right) = \infty$, то

$$\frac{\omega}{v} \ell = \frac{\pi}{2} (2n + 1); \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad (14)$$

Низшая резонансная частота равна $\omega_r = \frac{v \cdot \pi}{2\ell}$.

Так как $\omega_r = 2\pi f_r$; $a \cdot v = \sqrt{\gamma_{11}^E / \rho}$, то

$$f_r = \frac{1}{4 \cdot \ell} \cdot \sqrt{\frac{\gamma_{11}^E}{\rho}} \quad \text{кГц}. \quad (15)$$

При $Y \rightarrow 0$ будет иметь место антирезонанс (частота, при которой реактивная составляющая эквивалентной схемы пьезопреобразователя становится равной нулю). Частота антирезонанса находится из (13) при условии

$$\frac{\omega \varepsilon_{33}^s \ell}{b} = e_{31} v \text{tg} \left(\frac{\omega \ell}{v} \right) \frac{d_{31}}{b} \gamma_{11}^E e^{-j\varphi}.$$

Тогда

$$\frac{\omega}{e^{-j\varphi} \cdot v} \ell \cdot \text{ctg} \left(\frac{\omega \ell}{v} \right) = \frac{e_{31} d_{31} \gamma_{11}^E}{\varepsilon_{33}^s} = \frac{d_{31}^2 \gamma_{11}^E}{\varepsilon_{33}^s}, \quad (16)$$

но

$$\frac{d_{31}^2 \gamma_{11}^E}{\varepsilon_{33}^s} = K_{св}^2,$$

где $K_{св}$ – коэффициент электромеханической связи, зависящий от физических свойств материала.

Поскольку для использованных в данном случае пьезоэлектриков разность между резонансной и антирезонансной частотами Δf невелика, можно написать $f_a = f_r + \Delta f$ и, следовательно, $\omega_a = \omega_r + 2\pi \Delta f$.

Подставим это выражение в (14) и учитывая, что

$$\frac{\omega \ell}{v} = \frac{\pi}{2}; \quad \text{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\text{ctg}\alpha \cdot \text{ctg}\beta - 1}{\text{ctg}\alpha + \text{ctg}\beta},$$

путем несложных преобразований с учетом того, что $\Delta f \ll f_r$, получим

$$K_{св}^2 = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\Delta f}{f_r} = 2.46 \frac{f_a - f_r}{f_r}. \quad (17)$$

Откуда антирезонансная частота равна

$$f_a = f_r \left(\frac{K_{cb}^2}{2.46} + 1 \right) = \frac{1}{4l} \left(\frac{K_{cb}^2}{2.46} + 1 \right) \cdot \sqrt{\gamma_{11}} / \rho \quad \text{кГц.} \quad (18)$$

Для установления зависимости частоты колебаний пьезопластины от условий ее крепления рассмотрим еще один случай.

Случай 2. Здесь механическая нагрузка на концах пьезопластины отсутствует. Искомые решения представляются в форме

$$\begin{aligned} \xi(x, t) &= X(x) \cdot T(t) = A(\cos nx + B \sin nx) \cdot \cos(nvt + \varphi); \\ \frac{d\xi}{dx} &= (-nA \sin nx + nB \cos nx) \cdot \cos(nvt + \varphi), \end{aligned} \quad (19)$$

где $\left(n = \frac{m\pi}{l} \right)$.

Примем за начало координат центр пластины ($X = 0$). В центре пластины деформация растяжения-сжатия отсутствует, следовательно, и напряжения растяжения-сжатия отсутствуют.

При таких граничных условиях выражения (19) примут вид:

$$\begin{aligned} \xi(x, t) &= B \cdot \sin(\omega x / v) \cdot e^{-j(\omega t - \varphi)}; \\ S(x, t) &= \left(\frac{\omega}{v} \right) \cdot B \cdot \cos(\omega x / v) \cdot e^{j(\omega t - \varphi)}; \\ S(x, t) &= \left(\frac{\omega}{v} \right) \cdot B \cdot \cos(\omega x / v) \cdot e^{j(\omega t - \varphi)}. \end{aligned} \quad (20)$$

Воспользовавшись уравнениями пьезоэффекта для данного случая

$$\begin{aligned} T_1 &= \gamma_{11}^E \cdot S_1 - e_{31} E_3; \\ D_3 &= e_{31} \cdot S_1 + \epsilon_{33}^E E_3, \end{aligned} \quad (21)$$

находим постоянную интегрирования

$$B = \frac{v U_0 \cdot e_{31}}{\omega \gamma_{11}^E} \cos\left(\frac{\omega}{v} \cdot \frac{l}{2}\right). \quad (22)$$

Выражение для электрического тока, протекающего через пластину, в этом случае представим как

$$i = \int_{-l/2}^{+l/2} j\omega a D_3 dx. \quad (23)$$

С учетом (20) для $S(x, t)$, (21) для D_3 и (22) выражение (23) после простых преобразований будет иметь вид:

$$i = j\omega a \left\{ 2 \cdot \frac{e_{31}^2 \cdot v}{\gamma_{11}^E \cdot \omega \cdot b} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega \cdot l}{v \cdot 2}\right) U + \frac{\epsilon_{33}^E \cdot l \cdot U}{b} \right\}. \quad (24)$$

Полная проводимость пластины при гармонических колебаниях равна

$$Y = \frac{i}{U_0 \cdot e^{j\omega t}} = j\omega a \left[2 \frac{e_{31}^2 v}{\gamma_{11}^E \omega b} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega l}{2v}\right) + \frac{\epsilon_{33}^E \ell \cdot e^{-j\varphi}}{b} \right]. \quad (25)$$

Резонансная частота ($Y \rightarrow \infty$) определяется из условия $\operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{v} \cdot \frac{l}{2}\right) = \infty$,

откуда $\frac{\omega}{v} \cdot \frac{l}{2} = \frac{\pi}{2} (2n + 1) \quad (n = 0, 1, 2, 3 \dots)$.

Низшая резонансная частота:

$$\omega_r = \frac{\pi v}{l}$$

или

$$f_r = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{\gamma_{11}}{\rho}}, \text{ кГц.} \quad (26)$$

Выражение для антирезонансной частоты:

$$f_a = \frac{1}{2l} \left(\frac{K^2}{2.46} + 1 \right) \sqrt{\frac{\gamma_{11}}{\rho}}, \text{ кГц.} \quad (27)$$

Выражения (26) и (27), записанные соответственно для закрепленного на концах преобразователя:

$$f_r \cdot l = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\gamma_{11}}{\rho}}, \text{ кГц;} \quad (28)$$

для незакрепленного преобразователя:

$$f_r \cdot l = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\gamma_{11}}{\rho}}, \text{ кГц,} \quad (29)$$

принято называть частотными постоянными

$$f_r \cdot l = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\gamma_{11}}{\rho}}, \text{ кГц} \quad (30)$$

и, очевидно, что (29) для антирезонанса можно записать как

$$f_a \cdot l = \frac{1}{2} \left(\frac{K^2}{2.46} + 1 \right) \sqrt{\frac{\gamma_{11}}{\rho}}, \text{ кГц.} \quad (31)$$

Выражения (28) и (29) для частотных постоянных пьезопреобразователя показывают, что условия крепления преобразователя влияют на частоту колебаний. Преобразователь со свободными концами ЧЭ колеблется с частотой в 2 раза большей, чем преобразователь с закрепленными концами [1].

Установлено, что повышение частоты колебаний датчиков, работающих в резонансном режиме, именно в 2 раза, приводит к максимальному увеличению их чувствительности S_r [5].

Согласно теореме Котельникова, увеличение в 2 раза частоты колебаний (резонансных в данном случае) позволяет передавать информацию без искажения, с максимальной скоростью и с минимальными потерями, что приводит к максимальному увеличению S_r пьезопреобразователя механических напряжений. В пьезорезонансном устройстве измеряемые статические механические напряжения внутри деформируемых сред преобразуются за счет использования внешнего источника переменного напряжения и подключается ко входу аналогово-цифрового преобразователя (АЦП). В результате чего получается последовательность дискретных значений сигнала, взятых через определенный интервал времени.

Важной задачей является проблема рационального выбора интервала дискретизации, поскольку при очень малом его интервале может оказаться неоправданно большое число отсчетов и, наоборот, при большом интервале могут быть большие информационные потери. При проектировании измерительных устройств получения информации о напряженном состоянии деформируемых сред с требуемой точностью первоочередной задачей является определение интервала дискретизации, при котором будет максимальная чувствительность при минимальных потерях информации. В основе решения этой задачи лежит обобщенная теорема отсчетов, связывающая величину интервала дискретизации с ошибкой воспроизведения исходного сигнала, т.е. определяющая соотношение спектральных свойств непрерывного и дискретного сигналов.

Пусть $X(t)$ – непрерывный сигнал, у которого спектр $S_x(f)$ ограничен максимальной частотой F . Тогда спектр дискретного сигнала получается суммированием смещенных спектров исходного сигнала:

$$S_D(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_x \left(f - \frac{n}{\Delta t} \right)$$

где Δt – интервал дискретизации; n – число точек дискретизации.

Очевидно, что максимальное значение интервала дискретизации, при котором возможно точное восстановление исходного непрерывного сигнала (или отсутствие потерь информации), равно $1/2F$, что соответствует теореме Котельникова.

Пьезоэлектрический преобразователь обладает управляемой избирательностью на определенную компоненту механической нагрузки, в данном случае напряжения (например, нормальную компоненту вдоль оси X) [6].

В действительности пьезопреобразователь при измерении какой-то одной компоненты напряжения, например T_1 в среде подвергается воздействию и других компонент тензора механических напряжений, которые будут мешающими факторами.

Избирательность пьезопреобразователей достигается за счет того, что направление вектора электрического поля, возбуждающего пьезоэлемент, совпадает с направлением измеряемой компоненты механического напряжения. При этом используются два пьезоэлемента (рис. 2): нижний, который возбуждается электрическим способом и вынуждает колебаться верхний, возбуждаемый измеряемой компонентой механического напряжения.

Эти процессы описываются уравнениями пьезоэффекта:

$$P^E = dT + \epsilon^T E; \tag{32}$$

$$S^T = dE + S^E T.$$

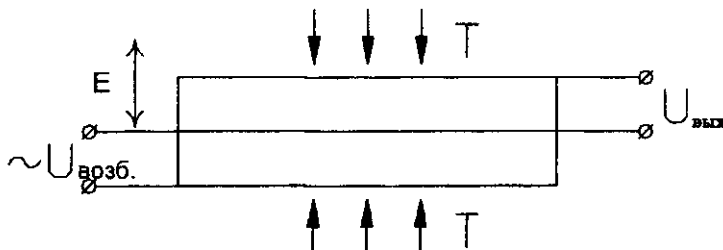


Рис. 2. Схема работы пьезопреобразователя

Уравнения (32) для данного случая будут иметь вид:

$$P_i^E = d_{ij} \cdot T_j; \tag{33}$$

$$S_j^T = d_{ij} E_i,$$

где P_i^E и S_j^T – компоненты тензоров поляризации и деформации; t – транспонирование матрицы. Верхние индексы E и T имеют тот же смысл, что и для выражений (1) и (2). Индексы ij – принимают следующие значения: $i = 1 - 3; j = 1 - 6$.

Первое выражение из уравнений (33) характеризует работу пьезоэлемента, возбуждаемого механическим напряжением. Второе – работу пьезоэлемента, возбуждаемого электрическим полем.

С учетом известной матрицы пьезомодулей, например, для пьезокерамики типа ЦТС [3]:

$$d_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & d_{13} \\ 0 & 0 & d_{13} \\ 0 & 0 & d_{33} \\ 0 & d_{15} & 0 \\ d_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{34}$$

Уравнение для пьезоэлемента, возбуждаемого электрическим полем, после преобразований представляем как

$$\begin{aligned} S_1 &= d_{31} \cdot E_1 \\ S_2 &= d_{32} \cdot E_3 \\ S_3 &= d_{33} \cdot E_3 \\ S_4 &= d_{24} \cdot E_2 \\ S_5 &= d_{15} \cdot E_1 \\ S_6 &= 0 \end{aligned} \tag{35}$$

Уравнение для пьезоэлемента, возбуждаемого механическим напряжением, также после преобразований представляем в виде:

$$\begin{aligned} P_1 &= d_{15} \cdot T_3; \\ P_3 &= d_{31} \cdot T_1 + d_{31} \cdot T_2 + d_{33} \cdot T_3. \end{aligned} \quad (36)$$

Из уравнений (35) и (36) следует, что для измерения интересующей нас компоненты механического напряжения, например, T_3 , действующей по оси Z , нужно возбудить деформацию одного пьезоэлемента в направлении оси Z , т.е. S_3 , которая возбуждается только вектором напряженности электрического поля E_3 (35) для S_3 . Тогда в другом пьезоэлементе, колеблющемся в этом же направлении под действием измеряемой компоненты механического напряжения T_3 , совпадающей с направлением электрического поля E_3 , возникает вектор поляризации P_3 (36) для P_3 .

Действующие компоненты механического напряжения T_1 и T_2 также вызывают в пьезоэлементе поляризацию и, следовательно, заряды. Однако эти заряды быстро стекают и не могут быть измерены, ввиду статического режима работы пьезоэлемента в направлении действия T_1 и T_2 . Динамический же режим работы пьезоэлемента обеспечивается только в направлении измеряемой компоненты механического напряжения T_1 .

Таким образом, за счет выбора направления вектора напряженности электрического поля E , совпадающего с направлением измеряемой компоненты напряжения T , достигается избирательность пьезообразователей.

В основе работы этих устройств лежат два резонансных условия: резонанс и антирезонанс.

Указанные условия резонанса являются достаточно строгими, когда потери в контуре невелики [3, 4]. При внешнем механическом напряжении на устройство, равным нулю, максимум и минимум частотной характеристики имеют ярко выраженный характер (рис. 3). Увеличение напряжения приводит к их сглаживанию и некоторому смещению. Следовательно, от действия нагрузки $U_{\text{вых}}$ на резонансной частоте уменьшается, а на антирезонансной увеличивается.

В результате эксперимента установлено, что на антирезонансной частоте устройство имеет несколько меньшую чувствительность (примерно на 25 – 30 %), чем на резонансной, но обладает большим линейным участком выходной характеристики (примерно на 55 – 60 %) [6, 7].

Увеличение линейности преобразования пьезообразователя на f_a объясняется тем, что на f_a по мере стремления проводимости пьезообразователя к нулю ($Y \rightarrow 0$) уменьшается его диэлектрическая проницаемость ϵ (13), а следовательно, увеличивается K_{CB} (37). На f_r , наоборот, по мере увеличения проводимости пьезообразователя $Y \rightarrow \infty$ его ϵ увеличивается, а следовательно уменьшается K_{CB} . Увеличение K_{CB} пьезообразователя на f_a компенсирует «завал» его характеристики из-за насыщения пьезоэлемента. Под «завалом» здесь будем понимать отклонение от «идеального» упругого режима работы из-за механического гистерезиса, являющегося следствием несовершенства структуры материала пьезоэлектрика, ползучести или вязкого и упругого последствий. Под насыщением понимается следующее. При зажатии пьезообразователя уменьшается деформация пьезоэлемента от действия обратного пьезоэффекта. В результате в чувствительном пьезоэлементе уменьшается прирост зарядов на его поверхности, а следовательно, и выходного напряжения преобразователя [6].

Кроме того, диэлектрическая проницаемость зажатого пьезоэлемента ϵ^S меньше, чем свободного ϵ^T [4]. Это особенно проявляется на f_a :

$$\epsilon^S = \epsilon^T (1 - K_{ce}^2); \quad (K_{ce} < 1). \quad (37)$$

Это также компенсирует «завал» характеристики пьезообразователя на f_a из-за зажатия пьезоэлемента.

Более высокая чувствительность пьезообразователя на f_r , чем на f_a , объясняется тем, что пьезообразователь на f_r имеет минимальное сопротивление, а на f_a – максимальное.

Итак, диапазон линейности преобразования можно расширить за счет возбуждения пьезообразователя на f_a . Диапазон линейности преобразователя на f_a больше, чем на f_r из-за увеличения K_{CB} пьезообразователя на f_a . Кроме того, при зажатии пьезообразователя на f_a также увеличивается его K_{CB} . Все это компенсирует «завал» характеристики пьезообразователя из-за насыщения пьезоэлемента.

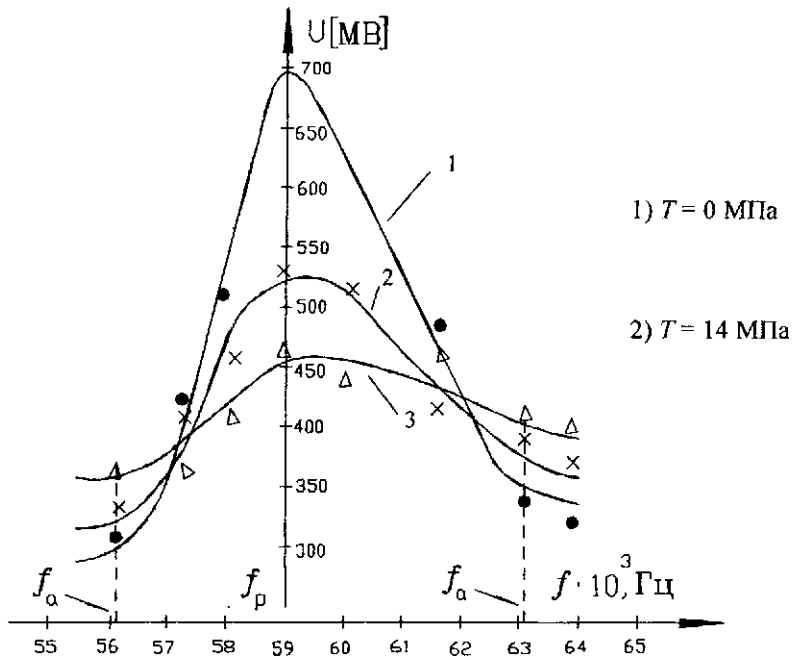


Рис. 3. Экспериментальные характеристики пьезопреобразователя при различных механических напряжениях

Покажем, что электроупругость и сжимаемость данных пьезопреобразователей управляемые. Сжимаемость - величина обратная модулю объемной упругости, который равен отношению механических напряжений к коэффициенту объемного расширения [6].

Рассмотрим зависимость между коэффициентами, характеризующими механические свойства пьезоэлектрика (упругая податливость s , являющаяся величиной обратной модулю упругости γ , пьезомодуль d , характеризующий превращение электрической энергии пьезоэлектрика в механическую и наоборот) и электрическими свойствами пьезоэлектрика (диэлектрическая проницаемость ϵ).

Если соединить электроды и создать механическое напряжение при $E = 0$, то выражения (1) и (2) будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} S^E &= s^E T \\ D^E &= P^E = dT \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Здесь S^E – деформация при напряженности поля $E = 0$; D – смещения при $E = 0$; P – поляризованность при $E = 0$.

Затем разомкнем электроды и при отсутствии механического напряжения ($T = 0$), когда кристалл может деформироваться свободно, подадим ток с напряженностью, равной E . В этом случае получим

$$\left. \begin{aligned} S^T &= dE \\ D^E &= \epsilon_a^T E \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Здесь S^T – деформация при $T = 0$, отличающаяся от S^E , а D^T также отличается от D^E . Если затем принять, что при разомкнутых электродах напряженность поля E и механическое напряжение T воздействуют одновременно, а смещения $D = 0$, то между E и T будет существовать зависимость

$$T = -\frac{\epsilon_a^T}{d} E$$

или
$$s^d = \left(s^e - \frac{d^2}{\epsilon_a^T} \right) T = s^d T. \quad (40)$$

Следовательно, в этом случае s^d меньше, чем s^e [4]. Очевидно, что посредством электрического поля E можно изменять упругую податливость s пьезоэлектрика, т.е. управлять его сжимаемостью.

Если затем принять, что E и T воздействуют одновременно, а деформация $S = 0$, т.е. образец зажат и не деформируется, то при этом между механическим напряжением T и напряженностью электрического поля E будет существовать зависимость $T = -\frac{d}{S^E} E$, причем смещение D определяется выражением

$$D^S = \left(\varepsilon_a^T - \frac{d^2}{S^E} \right) E = \varepsilon_a^S E. \quad (41)$$

Абсолютные диэлектрические проницаемости ε_a^S зажатою образца в этом случае, понятно, меньше, чем ε_a^T свободного образца. Очевидно, что посредством электрического поля E можно также изменять и диэлектрическую проницаемость пьезоэлектрика. Из-за чего следует, что электроупругость управляема. Таким образом, сжимасность и электроупругость управляемы. Это естественно, поскольку упругие коэффициенты пьезоэлектриков зависят от электрических условий так же, как их коэффициенты диэлектрических проницаемостей от механических условий.

Управление жёсткостью и электроупругостью пьезопреобразователей особенно важно при исследованиях сред с нелинейной зависимостью $S = f(T)$, где модуль упругости изменяется при изменениях T . При этом, погрешность измерения уменьшается, так как уменьшается искажение силового поля вокруг пьезо преобразователей,

С позиций физики твердого тела, материаловедения, теорий упругости, пластичности и ползучести исследование статической прочности материалов и элементов различных конструкций представляет огромный интерес. Решение подобных задач существенно упрощается, когда имеются экспериментальные данные, полученные в результате статических испытаний образцов материалов. Применение широко распространенных ультразвуковых методов и традиционного метода контроля напряженного состояния посредством тензорезисторов, дает обобщенную информацию о величине и характере распределения механических напряжений по сечению объекта контроля, а это недостаточная для практических целей точность. Таким образом, встает вопрос создания метода и аппаратуры для непосредственного измерения напряжений внутри материалов. С этой целью был разработан метод и гамма пьезорезонансных преобразователей непосредственного измерения механических напряжений внутри деформируемых сред с целью прогнозирования их прочности [6].

Однако зависимость между механическим напряжением и напряженностью электрического поля, используемая в технике измерений переменных, а также статических давлений и усилий с помощью пьезоэффекта, не может быть использована для измерения статических механических напряжений внутри твердых деформированных сред. Поэтому разработанные параметрические пьезопреобразователи, на которые получены авторские свидетельства и патенты, реализуют метод измерения механических напряжений внутри деформируемых сред, благодаря оригинальным конструкциям, дающим возможность исключать акустическое взаимодействие преобразователя с контролируемой средой, в которую он помещен, управлять избирательностью к измеряемой компоненте механического напряжения и электроупругостью с целью увеличения точности измерения.

Таким образом, в результате теоретического изучения, т.е. математического моделирования, пьезопреобразователей механических напряжений, созданы новые измерительные устройства для решения весьма сложной задачи: контроля напряженного состояния внутри деформируемых сред.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зубцов В.И. Разработка пьезоэлектрических преобразователей для измерения статических механических напряжений в твердых сплошных средах: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. - Мн., 1988. - 18 с.
2. Осадчий Е.П. Проектирование датчиков для измерения механических величин. - М.: - Машиностроение, 1979. - 579 с.
3. Малов В.В. Пьезорезонансные датчики. - М.: Энергия, 1978.-245 с.
4. Окадзаки К. Пособие по электротехническим материалам. - М.: Машиностроение, 1979. - 432 с.
5. Зубцов В.И. Пьезоэлектрические устройства для получения информации о напряженном состоянии внутри сплошных сред // Приборы и системы управления контроля диагностики. - 2002. - № 11.-С. 34-37.
6. Зубцов В.И. Пьезоэлектрический контроль прочности. - Новополоцк: ПГУ, 1991. - 147 с.
7. Зубцов В.И. Физические основы работы пьезорезонансных аналоговых преобразователей и расширение диапазона линейности измерения // Приборы и системы управления контроля диагностики. - 2000. -№ 2. -С. 35 -38.