УДК 528.63

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В ГЕОДЕЗИИ ПЛОСКИХ ЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ С НАРУШЕНИЕМ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ

канд. техн. наук, доц. А.М. ДЕГТЯРЕВ
(Полоцкий государственный университет)

Рассмотрена возможность использования в геодезии плоских линейных преобразований, в которых нарушено условие ортогональности. Показано, что предложенная модель является более общей, чем существующие модели этого класса. Получены расчетные формулы элементов преобразования. Рассмотрен численный пример.

Линейные преобразования, являясь наиболее простыми как по форме, так и по содержанию, тем не менее, очень часто являются достаточными для описания модели какого-либо реального или математического процесса. Традиционно выделяют:

- эквивалентные преобразования (вращение или ротация и сдвиг или трансляция, не меняющие внутренней геометрической структуры объекта, а только положение);
- аффинные преобразования (вращение, сдвиг и неравномерное масштабирование или дилатация, где происходит ещё и пропорциональное изменение линейных размеров объекта, но с сохранением углов).

Рассмотрим общую схему линейных плоскостных преобразований. Пусть имеется точка с координатами (X_c, Y_c), на которую подействовали оператором преобразования Z, включающим все перечисленные выше изменения. Тогда имеем

$$\begin{pmatrix} X_н \\ Y_н \end{pmatrix} = Z \cdot \begin{pmatrix} X_c \\ Y_c \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где точка ($X_н$, $Y_н$) – результат линейного преобразования точки (X_c, Y_c).

Более детально (1) можно представить как

$$\begin{pmatrix} X_н \\ Y_н \end{pmatrix} = D \cdot R \cdot \begin{pmatrix} X_c \\ Y_c \end{pmatrix} + T, \tag{2}$$

здесь D – диагональная матрица изменения масштабов по осям (дилатационная матрица) вида $D = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}$;

R – матрица вращения (ротационная матрица) вида $R = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha)a \end{pmatrix}$ на угол α; T – вектор сдвига по осям (трансляционный вектор) вида $T = \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix}$.

Расписав (2) покомпонентно, получим

$$\begin{cases} X_н = a \cdot m_1 \cdot X_c - b \cdot m_1 \cdot Y_c + t_x = a' \cdot X_c + b' \cdot Y_c + t_x \\ Y_н = b \cdot m_2 \cdot X_c + a \cdot m_2 \cdot Y_c + t_y = c' \cdot X_c + d' \cdot Y_c + t_y \end{cases}, \tag{2'}$$

что является обычным представлением плоского аффинного преобразования [1]. Формула (2') сводится к (1) простым расширением:

$$\begin{pmatrix} X_н \\ Y_н \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} a' & b' & t_x \\ c' & d' & t_y \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} X_c \\ Y_c \\ \hline 1 \end{pmatrix}. \tag{2''}$$

Следует отметить, что при работе с такого рода преобразованием можно выделить прямую и обратную задачи. В прямой задаче по известному начальному состоянию объекта и известному оператору преобразования Z необходимо найти конечное состояние. Здесь используют формулы (2), (2'), (2''), и трудностей при вычислении не возникает. В обратной задаче известно начальное и конечное состояние объекта, а необходимо получить модель линейного преобразования *2*. Сразу следует оговориться, что мы получаем одну из возможных моделей перехода, степень адекватности которой реальному процессу требует дополнительных исследований и не является темой данной статьи. В обратной задаче возникают определенные трудности, так как обычно количество преобразуемых точек больше числа определяемых параметров, т.е. требуется решать переопределенную систему уравнений, например с использованием метода наименьших квадратов. Другая, по мнению автора, более значимая трудность состоит в том, что часто для определения составляющих оператора Z (т.е. характеристик вращения, сдвига и масштабирования) берут не все точки, а их часть. Очевидно, что она должна наилучшим образом представлять весь процесс преобразования. Но даже если использовать все точки, все равно возникают некоторые проблемы. Основная из них - неравномерность преобразования.

Очевидно, что большие и неравномерные отклонения модели от реальных значений по всему объекту будут свидетельствовать о плохом соответствии модели и реальности. Если класс преобразований выбран достаточно хорошо, то большие отклонения вероятнее всего из-за неравномерности реального преобразования, представленного равномерной моделью.

Решение обратной задачи в случае равномерных линейных плоских преобразований достаточно изучено и включено в учебники по математической обработке геодезических измерений [2, 3] и представлено в научных работах. Следует отметить, что в геодезии линейные преобразования в основном применяются для пересчета координат из одной системы в другую, представления модели деформаций разного рода объектов, таких как инженерное сооружение, геодезическая сеть или любая поверхность, заданная координатами, в фотограмметрии, ГИС и других отраслях науки, и получают все большее распространение.

Отмеченную выше трудность более адекватного описания моделью реального процесса при нарушении равномерности преобразования можно в какой-то мере преодолеть следующим образом. Матрица дилатаций D в (2) имеет диагональный вид. Это подразумевает, что изменение масштабов (если они есть) происходит по ортогональным направлениям, т.е. независимо, Очевидно, что более общей моделью дилатации будет представление ее в виде полной матрицы

$$D=\begin{pmatrix} m_1 & u \\ u & m_2 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где u – величина, связанная с нарушением ортогональности направлений изменения масштабов, и в частности их независимости.

При условии представления (3) расширенное плоское линейное преобразование можно представить как

$$\begin{aligned} K_н &= \begin{pmatrix} X_н \\ Y_н \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 & u \\ u & m_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_c \\ Y_c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} m_1 a + ub & -m_1 b + ua \\ ua + m_2 b & -ub + m_2 a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_c \\ Y_c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix} = \\ &= \begin{cases} (m_1 a + ub)\cdot X_c + (-m_1 b + ua)\cdot Y_c + t_x \\ (ua + m_2 b)\cdot X_c + (-ub + m_2 a)\cdot Y_c + t_y \end{cases} = \\ &= \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_c \\ Y_c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix} = N \cdot K_c + T \end{aligned} \tag{4}$$

Элементы ротационной матрицы $N=\begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{pmatrix}$ и вектора трансляций $T=\begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix}$ могут быть совершенно просто найдены по любому алгоритму из [2, 3] и другим, или методом растягивания, описанным ниже. Теперь возникает проблема по известным элементам n_{ij} матрицы N «вычленить» элементы преобразования поворота в виде угла α, масштабов m_1, m_2 и меры нарушения ортогональности u. Наличие последнего приводит к не ортогональным, или косым системам координат описания процесса преобразования, и усложняет процесс вычислений. Одним из достаточно простых подходов к решению возникшей проблемы может быть следующий: скомбинируем элементы матрицы N на основе (4) таким образом, чтобы можно было однозначно и просто вычислить один из искомых элементов. Предварительные вычисления показали, что целесообразнее использовать

$$\begin{cases} n_{11} + n_{22} = (m_1 + m_2)\cdot\cos(\alpha), \\ n_{12} - n_{21} = -(m_1 + m_2)\cdot\sin(\alpha). \end{cases} \tag{5}$$

Могут представлять интерес и соотношения вида

$$\begin{cases} n_{11}^2 + n_{12}^2 = u^2 + m_1^2, \\ n_{21}^2 + n_{22}^2 = u^2 + m_2^2. \end{cases} \tag{6}$$

Из системы (5) следует, что тангенс угла вращения есть отношение выражений

$$tg(\alpha) = -\left(\frac{n_{12} - n_{21}}{n_{11} + n_{22}}\right). \tag{7}$$

Из (6) следует, что евклидова норма матрицы N есть

$$\|N\|_E^2 = m_1^2 + 2u^2 + m_2^2 = \|D\|_E^2, \tag{8}$$

что говорит о «скрытой» эквивалентности структур матриц N и D.

Используя представление косинуса и синуса через тангенс угла и вида (7), получим

$$\begin{cases} \cos(\alpha) = \dfrac{(n_{11} + n_{22})}{\sqrt{(n_{11} + n_{22})^2 + (n_{12} - n_{21})^2}} = a \\ \sin(\alpha) = \dfrac{-(n_{12} - n_{21})}{\sqrt{(n_{11} + n_{22})^2 + (n_{12} - n_{21})^2}} = b. \end{cases} \tag{9}$$

Рассмотрим построчно матрицу N из (4), учитывая, что элементы a и b теперь известны

$$\begin{cases} am_1 + bu = n_{11} \\ -bm_1 + au = n_{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} n_{11} \\ n_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_1 \\ u \end{pmatrix}, \tag{10}$$

и

$$\begin{cases} au + bm_2 = n_{21} \\ -bu + am_2 = n_{22} \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} n_{21} \\ n_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ m_2 \end{pmatrix}. \tag{10'}$$

Решение систем (10) и (10′) не вызывает трудностей, так как матрица вращений R ортогональна и $R^{-1} = R^T$. Исходя из этого в качестве решения соответственно имеем

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_{11} \\ n_{12} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} m_1 = \cos(\alpha) \cdot n_{11} - \sin(\alpha) \cdot n_{12} \\ u = \sin(\alpha) \cdot n_{11} - \cos(\alpha) \cdot n_{12} \end{cases} \tag{11}$$

и

$$\begin{pmatrix} u \\ m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_{21} \\ n_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} u = \cos(\alpha) \cdot n_{21} - \sin(\alpha) \cdot n_{22} \\ m_2 = \sin(\alpha) \cdot n_{21} - \cos(\alpha) \cdot n_{22}. \end{cases} \tag{11'}$$

Не сложно показать, что выражения для величины u в (11) и (11′) эквивалентны, т.е. получены с контролем. В качестве другого контроля могут служить выражения (6) или (8).

Формулы (11) и (11′) объединяем в одну структуру:

$$D = \begin{pmatrix} m_1 & u \\ u & m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_{11} & n_{21} \\ n_{12} & n_{22} \end{pmatrix} = R \cdot N^T. \tag{12}$$

Обозначив $K = \sqrt{(n_{11} + n_{22})^2 + (n_{12} - n_{21})^2}$ и используя представление (9), формулу (12) можно представить в виде:

$$D = \frac{1}{K} \cdot \left\{ \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n_{22} & -n_{21} \\ -n_{12} & n_{11} \end{pmatrix} \right\} \cdot \begin{pmatrix} n_{11} & n_{21} \\ n_{12} & n_{22} \end{pmatrix}. \tag{12'}$$

Более удобный для программирования в любом матричном пакете вид, с выражением только через матрицу N, можно получить, используя матрицу перестановок $P=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$:

$$D=\frac{1}{K}\cdot\left(N+PNP^{T}\right)\cdot N^{T}. \qquad (12'')$$

Таким образом, последовательность получения элементов расширенного линейного преобразования можно свести к следующим шагам:

– по набору точек начального и конечного состояния объекта $K_н$ и K_c используя любой известный алгоритм, получаем элементы матрицы N и вектора T;

– используя формулу (7), находим элемент вращения α, а по (9) или непосредственно, элементы матрицы вращения a и b;

– по любой из формул: (11), (11'), (12), (12'), (12″) находим оставшиеся элементы изменения масштабов m_1, m_2 и отклонение от ортогональности u.

Следует отметить, что матрица дилатации в виде (3) нарушает в линейном преобразовании свойство сохранения углов, что значительно расширяет область применения предложенной модели при незначительных дополнительных затратах.

Матрицу D можно преобразовать как

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{m_1}} & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{m_2}}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}m_1 & u\\ u & m_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{m_1}} & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{m_2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \frac{u}{\sqrt{m_1\cdot m_2}}\\ \frac{u}{\sqrt{m_1\cdot m_2}} & 1\end{pmatrix}. \qquad (13)$$

Из (13) следует, что величина $u'=\frac{u}{\sqrt{m_1\cdot m_2}}$ есть косинус угла между осями, по которым происходит дилатационное изменение. Эта величина также может являться коэффициентом взаимной связи (условной «ковариацией») между направлениями воздействий.

При ортогональном (независимом) воздействии вместо (3) имеем диагональную матрицу, а из (6)

$$m_1^2=n_{11}^2+n_{12}^2;\quad m_2^2=n_{21}^2+n_{22}^2;$$

$$\cos(\alpha)=\frac{n_{11}}{m_1}=\frac{n_{22}}{m_2};\ \sin(\alpha)=\frac{-n_{12}}{m_1}=\frac{n_{21}}{m_2};\ \mathrm{tg}(\alpha)=\frac{-n_{12}}{n_{11}}=\frac{n_{21}}{n_{22}}. \qquad (14)$$

Таким образом, получены известные формулы плоского аффинного преобразования [2, 3] как частный случай косого линейного преобразования (4). Если в общей модели $m_1=m_2=m$ – модель равных дилатаций, то угол поворота может быть получен, например, как $\mathrm{tg}(\alpha)=\frac{n_{21}}{n_{11}}$, а масштаб как $m=\frac{n_{11}}{\cos(\alpha)}=-\frac{n_{12}}{\sin(\alpha)}$ или любым другим представлением из (4). Эти формулы наиболее известны [1].

Рассмотрим практический пример из [3]. Исходные данные в виде начальных, конечных и преобразованных координат представлены в таблице.

Исходные данные

№ точки	Начальные координаты		Конечные координаты		Преобразованные координаты	
	X, м	Y, м	X, м	Y, м	X, м	Y, м
1	83182.75	51400.47	83168.10	51425.16	84084.87	58350.56
2	75890.35	55930.37	75874.38	55952.94	76849.48	62251.75
3	82699.94	40904.41	82688.34	40928.96	83443.29	47836.13
4	93556.84	59750.54	93539.76	59778.25	94600.61	67563.15
5	82489.42	61340.41	82471.87	61364.90	83540.13	68210.24

При использовании начальных и конечных координат, применение предложенного алгоритма дает в пределах ошибок вычислений те же результаты что и в [3]. Кроме всего прочего, элементы матрицы D показывают, что масштабы по осям отличаются от единицы на величину порядка 10^{-7}, а мера не ортогональности $-5\cdot10^{-8}$.

Если начальные координаты преобразовать с параметрами $\alpha = 2°$, матрицей $D' = \begin{pmatrix} m_1 & u \\ u & m_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0004 & 0.05 \\ 0.05 & 1.0002 \end{pmatrix}$ и вектором трансляций $T = \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.50 \\ 0.60 \end{pmatrix}$, то получим преобразованные координаты таблицы.

Решение обратной задачи точно дает использованные параметры преобразования. Но здесь более интересна другая ситуация. Пусть после получения матрицы N в качестве модели была принята ортогональная с изменением масштабов. Тогда $u = 0$, $m_1 = 1.00165$, $m_2 = 1.00145$, что значительно отличается от исходных параметров, Возникают трудности и с вычислением угла поворота. Как показали вычисления, только формула (7) может быть корректно использована для этих целей. Формулы (14) для угла дают совершенно разные результаты. Но с другой стороны, эти отличия и свидетельствуют о наличии не ортогональности в преобразовании (4), которое мы приняли равным нулю.

В заключение можно сказать, что предложенная модель является более общей по сравнению с существующими из класса линейных, так как позволяет учесть неперпендикулярность в координатных системах, часто присутствующую в реальных процессах, но не учитываемую существующими моделями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров А.Д., Нецветаев Н.Ю. Геометрия. - М.: Наука, 1990. - 672 с.
2. Михайлович К. Геодезия. - М.: Недра, 1984. - 427 с.
3. Маркузе Ю.И. Основы уравнительных вычислений. - М.: Недра, 1990. - 240 с.