

УДК 629.12.05:594.647

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПОДШИПНИКОВ КАЧЕНИЯ****д-р техн. наук, проф. Л.М. ЛЫНЬКОВ, И.Г. ДАВЫДОВ**  
(Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники)

*Исследованы особенности и эффективность применения метода конечных элементов для расчета напряженно-деформированного состояния подшипников качения. Проанализированы основные этапы практической реализации метода конечных элементов. Оценивались возможности применения различных типов конечных элементов для решения указанной задачи. Приведены результаты расчета матрицы жесткости для плоского треугольного элемента. Приведены результаты расчета напряженно-деформированного состояния подшипника качения по справочнику.*

Введение. Метод конечных элементов (МКЭ) - один из методов приближенного решения краевых задач, являющийся развитием метода Галеркина, который, как известно, обладает ограничениями при автоматизированных вычислениях. Однако при подходящем выборе системы простых базисных функций  $\psi$  в представлении приближенного решения  $u_n(x)$ , связанных с определенной на отрезке  $[a, b]$  системой точек (сеткой), этот метод трансформируется в численный процесс получения каркаса приближенного решения по заданной сетке. Технология построения каркаса оказывается близкой к той, которая присуща методу конечных разностей. Отсюда название такого численного процесса - проекционно-разностный, или проекционно-сеточный метод.

Возникновение метода конечных элементов связано с решением задач космических исследований (1950 г.). Дальнейшее развитие МКЭ получил после того, как было доказано (1963 г.), что его можно рассматривать как один из вариантов метода Рэлея - Ритца, который путем минимизации потенциальной энергии позволяет свести задачу к системе линейных уравнений равновесия. Связь МКЭ с процедурой минимизации позволила широко использовать его при решении задач в других областях техники. Известны решения с помощью этого метода задач распространения тепла, задач электромеханики, гидромеханики и, в частности, задач о течении жидкости в пористой среде.

Основная идея метода конечных элементов состоит в том, чтобы любую непрерывную величину, такую, как температура, давление и т.п., можно аппроксимировать дискретной моделью, которая строится на множестве кусочно-непрерывных функций определенных на конечном числе подобластей. Кусочно-непрерывные функции определяются с помощью значений непрерывной величины в конечном числе точек рассматриваемой области. В общем случае непрерывная величина заранее неизвестна, и нужно определить значения этой величины в некоторых внутренних точках области. Дискретную модель можно построить, если предположить, что известны числовые значения этой величины в некоторых внутренних точках области (в дальнейшем эти точки мы назовем «узлами»). После этого можно перейти к общему случаю.

Чаще всего при построении дискретной модели непрерывной величины поступают следующим образом [1,2]:

- в рассматриваемой области фиксируется конечное число точек. Эти точки называются узловыми точками или узлами;
- значения непрерывной величины в каждой узловой точке считается переменной, которая должна быть определена;
- область определения непрерывной величины разбивается на конечное число подобластей, называемых элементами. Эти элементы имеют общие узловые точки и в совокупности аппроксимируют форму области;
- непрерывная величина аппроксимируется на каждом элементе многочленом, который определяется с помощью узловых значений этой величины. Аппроксимирующие функции чаще всего выбираются в виде линейных, квадратичных или кубических полиномов. Для каждого элемента можно подбирать свой полином, но полиномы подбираются таким образом, чтобы сохранить непрерывность величины вдоль границ элемента. Полином, связанный с каждым элементом, называют функцией элемента;
- объединение конечных элементов в ансамбль. В этом ансамбле узловые значения неизвестной функции должны быть отрегулированы таким образом, чтобы обеспечить наилучшее приближение к истинному непрерывному распределению. Этот этап приводит к алгебраической системе линейных уравнений относительно узловых значений. Эта система является моделью искомой непрерывной функции;
- решение полученной системы, т.е. нахождение узловых значений;

- нахождение значения искомой величины в любой точке области по узловым значениям и функциям элементов.

В сплошной среде число точек связи бесконечно, и именно это составляет основную трудность получения численных решений в теории упругости. Понятие «конечных элементов» представляет собой попытку преодолеть эту трудность путем разбиения сплошного тела на отдельные элементы, взаимодействующие между собой только в узловых точках, в которых вводятся условные силы, эквивалентные поверхностным напряжениям, распределенным по границам элементов.

Методика расчета МКЭ. Для расчета напряженно-деформированного состояния конструкции необходимо разбить модель на мелкие части (конечные элементы) сравнительно простой формы, в пределах которых находится приближенное решение. Результатом расчета является поле напряжений и смещений (деформаций) в расчетной конструкции.

Таким образом, решение задачи с применением МКЭ можно разделить на следующие основные этапы [2]:

1) идентификация задачи, создание чертежа конструкции и определение прикладываемых нагрузок. На этом этапе необходимо четко представлять модель и прикладываемые к ней нагрузки. Для облегчения второго этапа целесообразно создать чертеж исходной конструкции (рис. 1);

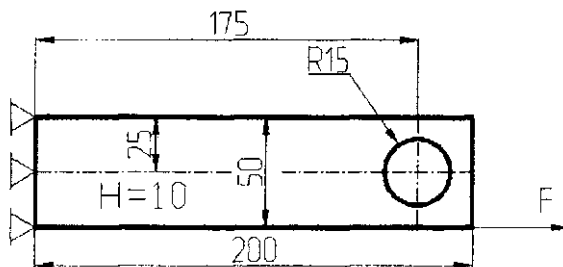


Рис. 1. Чертеж исходный конструкции

2) создание геометрии модели, пригодной для метода конечных элементов. На данном этапе по имеющемуся чертежу создается модель исходной конструкции с учетом симметрии и дальнейшего разбиения на сетку конечных элементов (рис. 2);

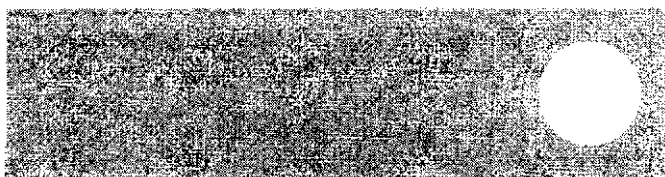


Рис. 2. Форма конструкции

3) разбиение модели на сетку конечных элементов. На этом этапе необходимо определиться с видом и размером конечного элемента, подходящего для решения поставленной задачи. Имеются несколько типовых форм конечных элементов, в которых поле смещений определяется по смещениям узлов с помощью некоторых интерполяционных функций. Для обеспечения работы метода построенная модель делится на конечные элементы простой формы (рис. 3);

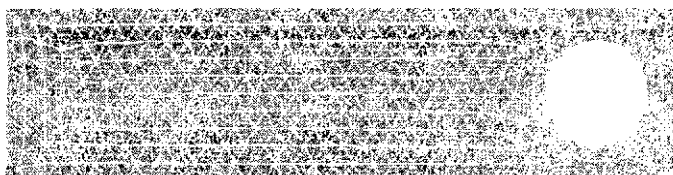


Рис. 3. Форма конструкции, разбитая на конечные элементы

4) приложение к модели граничных условий (закрепление на границе или граничные нагрузки). Правильное приложение нагрузок и граничных условий представляет определенные трудности, так как должно, с одной стороны, обеспечиваться необходимое количество степеней свободы, а с другой стороны - сходимость метода. В нашем случае пластина закреплена по левому краю, а к нижнему правому углу приложена растягивающая сила (рис. 4);

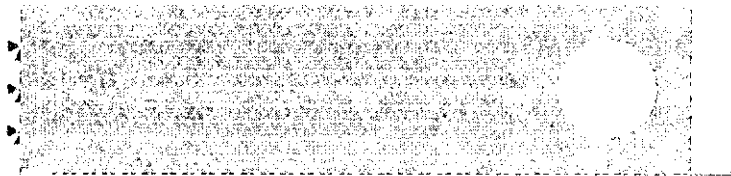


Рис. 4. Форма конструкции, разбитая на конечные элементы с приложенными граничными условиями

5) численное решение системы уравнений (автоматически). Данный этап до появления мощных вычислительных машин представлял серьезную проблему. Сейчас, как правило, выполняется автоматически и особых трудностей не вызывает (за исключением систем с плохо обусловленной матрицей жесткости, т.е. с неправильно приложенными граничными условиями);

6) анализ результатов. Если системы уравнений решались автоматически, то этап анализа результатов существенно облегчается имеющимися мощными инструментальными средствами визуализации результатов. С помощью постпроцессорной обработки можно, к примеру, построить графики распределения суммарных перемещений (рис. 5), распределения эквивалентных (по Мизесу) напряжений (рис. 6).



Рис. 5. Результат расчета поля распределения суммарных перемещений



Рис. 6. Результат расчета распределения эквивалентных (по Мизесу) напряжений

**Выбор и обоснование типа применяемого конечного элемента.** Конечные элементы могут быть линейными (элементы первого порядка) или параболическими (элементы второго порядка). Линейные элементы имеют прямые стороны и узлы только в углах. Таким образом, минимальное число узлов трехмерного элемента равно 4. Параболические элементы могут иметь промежуточный узел вдоль каждой из сторон, благодаря чему стороны элемента могут быть криволинейными (параболическими). При равном количестве элементов параболические элементы дают большую точность вычислений, так как они точно воспроизводят криволинейную геометрию модели и имеют более точные функции формы (аппроксимирующие функции). Однако расчет с применением конечных элементов высоких порядков требует больших компьютерных ресурсов и большего машинного времени.

Достоверность расчетов по МКЭ зависит от многих факторов, в том числе и от количества конечных элементов. Однако если напряжения не меняются значительно в пределах модели, то количество конечных элементов несущественно влияет на точность вычисления напряжений.

Очевидно, что чем меньше линейный размер конечного элемента, тем большее количество элементов в модели, при этом время вычислений существенно возрастает, а ошибки анализа уменьшаются. Однако ошибки уменьшаются не до нуля, так как с увеличением числа элементов накапливаются ошибки округления в ЭВМ,

На рис. 7 изображен трехмерный линейный конечный элемент с 8-ю узлами, каждый из которых имеет по три степени свободы. В процессе решения задачи с применением этого элемента необходимо

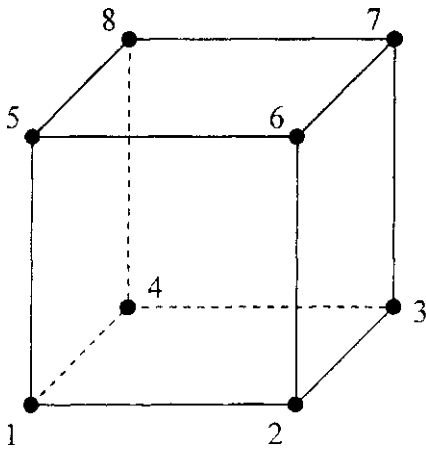


Рис. 7. Графическое изображение трехмерного линейного конечного элемента с 8-ю узлами

рассмотреть 24 узловые смещения и столько же узловых сил. Таким образом, размерность матрицы жесткости  $[K]$ , связывающей вектор узловых смещений с вектором узловых сил, будет  $[24 \times 24]$ .

На рис. 8 представлена трехмерная модель подшипника, разбитая на конечные элементы [3, 4]. Модель выполнена точно по чертежу с учетом зазора. Для моделирования применялся пакет Solid Works.

На рис. 9 изображена внешняя поверхность шарика, составленная из треугольников. В трехмерном пространстве это тетраэдр. Каждый тетраэдр является конечным элементом, имеющим свой порядковый номер.

В каждом узле неизвестными являются перемещения по осям  $O_x, O_y, O_z$ , т.е. деформации, и в итоге смещения. Обозначим перемещения в узле с номером  $i$  через  $u_i, v_i$  и  $w_i$  (по осям  $O_x, O_y, O_z$  соответственно). Пусть  $n$  – число узлов в выбранном разбиении. Тогда общее число неизвестных будет равно  $2n$ .

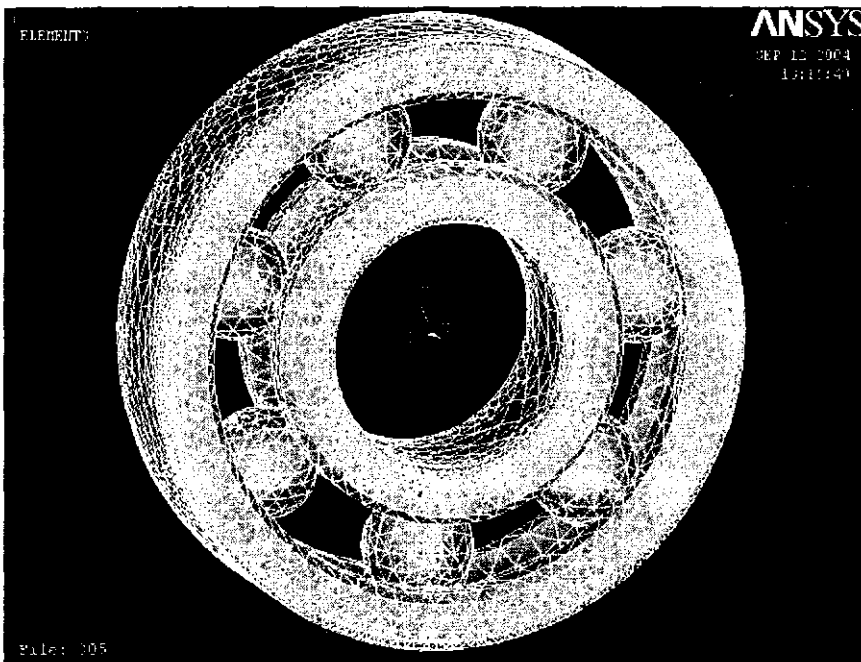


Рис. 8. Графическое изображение трехмерной модели подшипника, разбитой на конечные элементы

На рис. 10 представлено схематическое изображение  $n$ -ного тетраэдрического конечного элемента. Локальная нумерация узлов (1, 2, 3, 4) выбирается против часовой стрелки. В целях упрощения вывода матрицы жесткости рассматривалась одна из граней тетраэдрического конечного элемента.

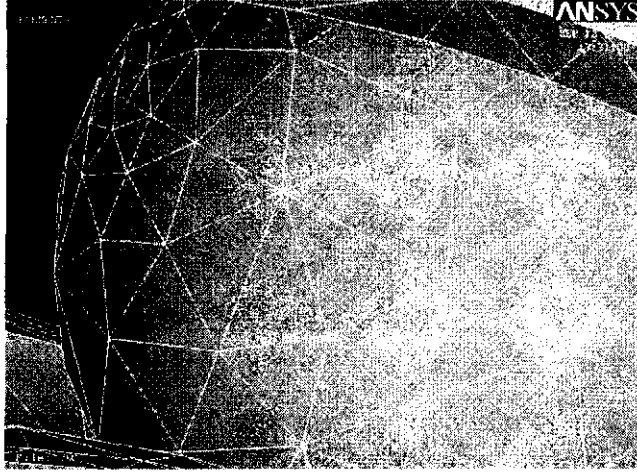


Рис. 9. Графическое изображение внешней поверхности шарика

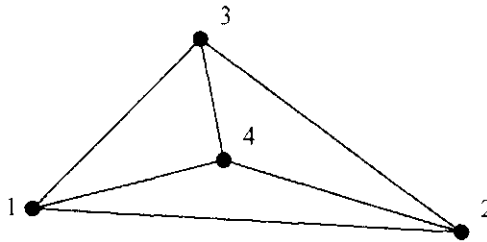


Рис. 10. Схематическое изображение тетраэдрического конечного элемента

**Результаты расчета матрицы жесткости.** Приведены результаты расчета матрицы жесткости для плоского треугольного элемента [2]. Матрица жесткости  $[K]$  связывает векторы узловых смещений  $\{U\}$  и нагрузок  $\{F\}$ . Матрица жесткости  $K = (\Delta V) \cdot B^T C B$  является симметричной диагональной матрицей, что существенно облегчает ее обработку. Для треугольного конечного элемента матрица  $[K]$  имеет размерность  $6 \times 6$ .

Вычислив матричные произведения в выражении для матрицы жесткости, получим

$$K = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{pmatrix}.$$

Эта матрица симметрична относительно главной диагонали и ее элементы равны

$$\begin{aligned} K_{11} &= \alpha(\beta \cdot x_{32}^2 + y_{23}^2); & K_{12} &= \alpha \cdot w \cdot x_{32} \cdot y_{23}; & K_{13} &= \alpha(\beta \cdot x_{31} \cdot x_{32} + y_{23} \cdot y_{31}); \\ K_{14} &= \alpha(w \cdot x_{13} \cdot y_{23} + \beta \cdot x_{32} \cdot y_{31}); & K_{15} &= \alpha(\beta \cdot x_{21} \cdot x_{32} + y_{12} \cdot y_{23}); & K_{16} &= \alpha(w \cdot x_{21} \cdot x_{23} + \beta \cdot x_{32} \cdot y_{12}); \\ K_{22} &= \alpha(x_{32}^2 + \beta \cdot y_{23}^2); & K_{23} &= \alpha(\beta \cdot x_{13} \cdot y_{23} + w \cdot x_{32} \cdot y_{31}); & K_{24} &= \alpha(x_{13} \cdot x_{32} + \beta \cdot y_{23} \cdot y_{31}); \\ K_{25} &= \alpha(\beta \cdot x_{21} \cdot x_{23} + w \cdot x_{32} \cdot y_{12}); & K_{26} &= \alpha(x_{21} \cdot x_{32} + \beta \cdot y_{12} \cdot y_{23}); & K_{33} &= \alpha(\beta \cdot x_{13}^2 + y_{31}^2); \\ K_{34} &= \alpha \cdot w \cdot x_{13} \cdot y_{31}; & K_{35} &= \alpha(\beta \cdot x_{13} \cdot x_{21} + y_{12} \cdot y_{31}); & K_{36} &= \alpha(\beta \cdot x_{13} \cdot x_{12} + w \cdot x_{21} \cdot y_{31}); \\ K_{44} &= \alpha(x_{13}^2 + \beta \cdot y_{31}^2); & K_{45} &= \alpha(w \cdot x_{13} \cdot x_{12} + \beta \cdot x_{21} \cdot y_{31}); & K_{46} &= \alpha(x_{13} \cdot x_{21} + \beta \cdot y_{12} \cdot y_{31}); \\ K_{55} &= \alpha(\beta \cdot x_{21}^2 + y_{12}^2); & K_{56} &= \alpha \cdot w \cdot x_{21} \cdot y_{12}; & K_{66} &= \alpha(x_{21}^2 + \beta \cdot y_{12}^2). \end{aligned}$$

Здесь приняты обозначения  $\alpha = \frac{Ed}{4F(1-\nu^2)}$ ;  $\beta = \frac{1-\nu}{2}$ ;  $w = \frac{1+\nu}{2}$ .

Учитывая то, что в конечно-элементных задачах неизвестными являются перемещения в узлах, а также то, что в трехмерных задачах каждый удел тетрагонального элемента может иметь перемещения по трем направлениям, система уравнений равновесия, записанная в матричной форме, может иметь размерность, достигающую 100 000 и более. Однако для современных ЭВМ решение таких систем уравнений - вполне посильная задача. При составлении уравнений равновесия учитывается, что сумма проекций всех сил на каждую из координатных осей равна нулю, а сумма внутренних сил равна внешней силе с обратным знаком.

В трехмерных моделях число узлов обычно больше числа элементов, а число степеней свободы в три раза больше числа узлов (за исключением числа кинематических граничных условий).

Для задач моделирования напряженно-деформированного состояния наиболее целесообразным представляется использовать параболические конечные элементы.

**Результаты расчета упругих деформаций подшипника 305А при действующей радиальной нагрузке 5050 Н - по справочнику [5].**

Исходные данные:

$D_w = 11,509$  мм – диаметр шарика;

$z = 7$  - количество шариков;

$r_n = 6,10$  мм – радиус дорожки качения наружного кольца;

$r_a = 5,87$  мм - радиус дорожки качения внутреннего кольца;

$D_n = 55,029$  мм – диаметр дорожки качения наружного кольца;

$d_n = 31,991$  мм - диаметр дорожки качения внутреннего кольца;

$e = 0,020$  мм – радиальный зазор;

$Fr = 5050$  Н – действующая радиальная нагрузка.

Расчет по справочнику возможно произвести только для одного состояния подшипника – один из шариков должен испытывать максимальные нагрузки, т.е. находиться точно по линии действия радиальной силы. Кроме того, справочные расчеты требуют ряд допущений – отсутствие деформаций колец, отсутствие пластических деформаций и т.д.

В общем виде порядок расчета следующий:

- рассчитывается усилие наиболее нагруженного шарика, затем упругие деформации в контакте шарик – наружное кольцо;
- после этого рассчитываются упругие деформации в контакте шарик – внутреннее кольцо;
- далее следует расчет общей упругой деформации подшипника:

$$\delta = \delta_n + \delta_a = 0,04513 \text{ мм};$$

- в дополнение производится расчет нагрузок на остальные шарiki.

**Вывод.** Приведена методика расчета напряженно-деформированного состояния конструкций методом конечных элементов. Выбран и обоснован тип применяемого конечного элемента. Приведены результаты расчета напряженно-деформированного состояния подшипника качения по справочнику. Применение метода конечных элементов для расчета напряженно-деформированного состояния подшипников качения позволяет получить трехмерное распределение сил и напряжений в подшипнике с учетом динамики его вращения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Морозов Е.М., Никишков Г.П. Метод конечных элементов в механике разрушения. - М.; Наука, 1980. - 254 с.
2. Каплун А.Б., Морозов Е.М., Олферьева М.А. Ansys в руках инженера; Практик. рук-во. - изд. 2-е, испр. - М.: Едиториал УРСС, 2004. - 272 с.
3. Чигарев А.В., Кравчук А.С., Смалюк М.Ф. Ansys для инженеров: Справ, пособие. - М.: Машиностроение-1, 2004. - 512 с.
4. Басов К.А. Ansys в примерах и задачах. - М.: КомпьютерПресс, 2002. - 224 с.
5. Кошель М.В. Подшипники качения, - Мн.: Навука і тэхніка, 1993. - 255 с.