УДК 517

ПРИМЕНЕНИЕ ФОРМУЛЫ ТЕЙЛОРА В ОБЛАСТИ РАСХОДИМОСТИ СООТВЕТСТВУЮЩЕГО СТЕПЕННОГО РЯДА

д-р техн. наук, доц. С.Г. ЕХИЛЕВСКІЙ
(Полоцкий государственный университет)
Т.П. ФОМЕНКО
(Донецкий национальный технический университет, Украина)

Предложен способ получения формулы Тейлора с остаточным членом в форме Пеано и Лагранжа, не требующий привлечения эвристических гипотез ши искусственных приемов. Отмечено несовпадение области определения остаточного члена с интервалом сходимости степенного ряда. Показана возможность приближенных вычислений с любой конечной точностью вне интервала сходимости. Получены зависимости максимального приращения аргумента и соответствующего ему оптимального числа слагаемых от требуемой точности

Методически верное (систематическое) изложение любой науки предполагает неукоснительно мотивированное введение новых понятий. Необходимость их появления естественным путем должна вытекать из всего предыдущего рассмотрения. В частности, крайне нежелательно для доказательства теорем или вывода формул пользоваться искусственными приемами. Например, для получения формулы Тейлора функцию обычно аппроксимируют полиномом, а выражение для остаточного члена выводят с помощью громоздкой вспомогательной функции [1]. Первое остается никак не мотивированным, а второе - совершенно искусственно. Покажем вначале, как тс же результаты можно получить естественным путем.

По теореме о связи предела с бесконечно малой функцией, из определения производной следует равенство

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+\alpha(x), \tag{1}$$

в котором $\alpha(x)$ – функция бесконечно малая в окрестности точки x_0. При этом из существования $f''(x_0)$ следует непрерывность $\alpha(x)$ в точке x_0, т.е.

$$\alpha(x_0)=0. \tag{2}$$

Для дальнейшего (1) удобно представить в виде

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\alpha(x)(x-x_0). \tag{3}$$

Заметим, что с учетом (2)

$$\alpha(x)(x-x_0)=o(x-x_0).$$

По аналогии с (3)

$$\alpha(x)=\alpha'(x_0)\cdot(x-x_0)+\beta(x)\cdot(x-x_0), \tag{4}$$

где учтено (2), а

$$\beta(x_0)=0. \tag{5}$$

Чтобы определить $\alpha'(x_0)$ дважды продифференцируем (3) по x

$$f''(x)=\alpha''(x)(x-x_0)+2\alpha'(x)\Rightarrow\alpha'(x_0)=\frac{f''(x_0)}{2}. \tag{6}$$

Подставив (4) и (6) в (3), получим

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+\beta(x)(x-x_0)^2. \tag{7}$$

где согласно (5) $\beta(x)\cdot(x-x_0)^2=o((x-x_0)^2)$.

Продолжив без комментариев начатую процедуру

$$\beta(x) = \beta'(x_0)(x - x_0) + \gamma(x)(x - x_0), \quad \gamma(x_0) = 0,$$

$$f'''(x) = \beta'''(x)(x-x_0)^2 + 6\beta''(x)(x-x_0)^2 + 6\beta'(x) \Rightarrow \beta'(x_0) = \frac{f'''(x_0)}{6}, \tag{8}$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{6}(x-x_0)^3 + o\left((x-x_0)^3\right),$$

нетрудно заметить закономерность

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(x-x_0)^k + R_n, \tag{9}$$

где $R_n = o((x - x_0)^n)$ – остаточный член в форме Пеано.

Формула Тейлора (9) используется в приближенных вычислениях. Для оценки их погрешности удобно связать R_n с $f(x)$. С этой целью воспользуемся теоремой Лагранжа

$$\alpha(x) - \alpha(x_0) = \alpha(x) = \alpha'(\xi_1)(x-x_0) = \frac{f''(\xi_1)}{2}(x-x_0), \tag{10}$$

где $\xi_1 \in (x, x_0)$. Справедливость первого равенства в (10) следует из (2), а третьего – из того, что (6) доказано для произвольной точки (в том числе и для ξ_1).

Подставив (10) в (3), получим

$$R_1 = \frac{f''(\xi_1)}{2}(x-x_0)^2. \tag{11}$$

Аналогично (см. (5) и (8))

$$\beta(x) = \beta'(\xi_2)(x-x_0) = \frac{f'''(\xi_2)}{6}(x-x_0),$$

что после подстановки в (7) дает

$$R_2 = \frac{f'''(\xi_2)}{6}(x-x_0)^3. \tag{12}$$

Обобщив (11), (12), получим остаточный член в форме Лагранжа:

$$R_n = \frac{f^{(n-1)}(\xi_n)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \tag{13}$$

Пусть для определенности $x > x_0$, тогда формулы (9), (13) справедливы, если $f(x)$ $n + 1$ раз дифференцируема на (x_0, x) и непрерывна на $[x_0, x]$ вместе со своими производными до n-го порядка включительно.

Значение ξ_n как внутренней точки интервала (x, x_0) очевидно является функцией x и x_0. Вид $\xi_n(x, x_0)$ в неявной форме определяется системой уравнений (9), (13). Существование решения доказано выше, что позволяет интерпретировать формулу Тейлора как тождество

$$f(x) \equiv f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi_n(x, x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \tag{14}$$

Проиллюстрируем (14) на примере $f(x) = \ln(1+x)$. Для $x_0 = 0$ и $n = 0$ с учетом (9), (13) получим

$$\ln(1+x) = \ln 1 + R_0 = \frac{x}{1+\xi_0},$$

откуда

$$\xi_0(x, 0) = \frac{x}{ln(1+x)} - 1,$$

что после подстановки в предыдущее равенство обращает его в тождество, являющееся частным случаем (14).

Пусть для определенности $x > 0$, тогда $0 < \xi_0(x,0) < x$ в полном соответствии с теоремой Лагранжа. Действительно, левое неравенство следует из определения $\xi_0(x,0)$, а для доказательства правого перепишем его в виде

$$\varphi(x) = \frac{x}{x+1} < ln(1+x) = \psi(x).$$

Очевидно $\varphi(0) = \psi(0)$, и для $x > 0$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} < \frac{1}{(1+x)} = \psi'(x),$$

что доказывает требуемое утверждение. Заметим, что

$$\lim_{x\to 0} \xi_0(x,0) = \lim_{x\to 0}\left[\frac{x}{\ln(1+x)} - 1\right] = 1 - 1 = 0,$$

как это и должно быть.

Устремив в (9) n к бесконечности, получим степенной ряд. В интервале его сходимости

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \equiv \frac{f^{(n+1)}(\xi_n(x,x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = R_n(x,x_0), \qquad x \in (x_0 - l, x_0 + l). \tag{15}$$

Вне интервала это не так. Тем не менее даже в случае расходимости соответствующего ряда при выполнении оговоренных выше условий формула Тейлора верна, как и теорема Лагранжа, обобщением которой она, в сущности, и является. Например:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} x^k + R_n(x), \qquad (x > -1), \tag{16}$$

где x ограничено только областью определения функции $\ln(1+x)$. Но

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} x^k \tag{17}$$

лишь в интервале сходимости $(-1 < x \le 1)$.

Заметим, однако, что вне интервала (15) формулу Тейлора нельзя применить для сколь угодно точного вычисления $f(x)$. Действительно, согласно (14)

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x,x_0) = f(x) - f(x_0) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \neq 0, \tag{18}$$

так как фигурирующий в (18) ряд не сходится к своей функции.

Вместе с тем, на практике не требуются абсолютно точные вычисления. Покажем, в этой связи, что для любой конечной точности $\Delta \neq 0$ формулу (9) можно использовать для приближенных вычислений вне интервала сходимости соответствующего ряда.

Оговоримся сразу, речь не идет об улучшении сходимости (т.е. замене одного функционального ряда другим). Нас в данном случае интересуют принципиальные возможности именно формулы Тейлора.

Согласно (16) для $f(x) = \ln(1+x)$

$$R_n(0) = 0, \qquad R_n'(x) = \frac{(-1)^n x^n}{1+x},$$

что при $x > 0$ обеспечивает чередование знака $R_n(x)$. Из (16) также следует, что при больших x функция $|R_n(x)|$ ведет себя как x^n, т.е. $|R_{n+1}(x)|$ растет быстрее, чем $|R_n(x)|$. Поэтому вне области сходимости ($x > 1$) увеличивать n имеет смысл, если

$$|R_{n+1}(x)| \le |R_n(x)|. \tag{19}$$

С увеличением n область выполнения неравенства (19) сужается (рис. 1), точность вычислений при этом повышается.

Свяжем максимально допустимое x с необходимой точностью вычислений Δ. Для этого подставим (16) в (19). С учетом упомянутого чередования знака получим

$$\frac{x^{n+1}}{n+1} \le 2|R_n(x)|. \qquad (20)$$

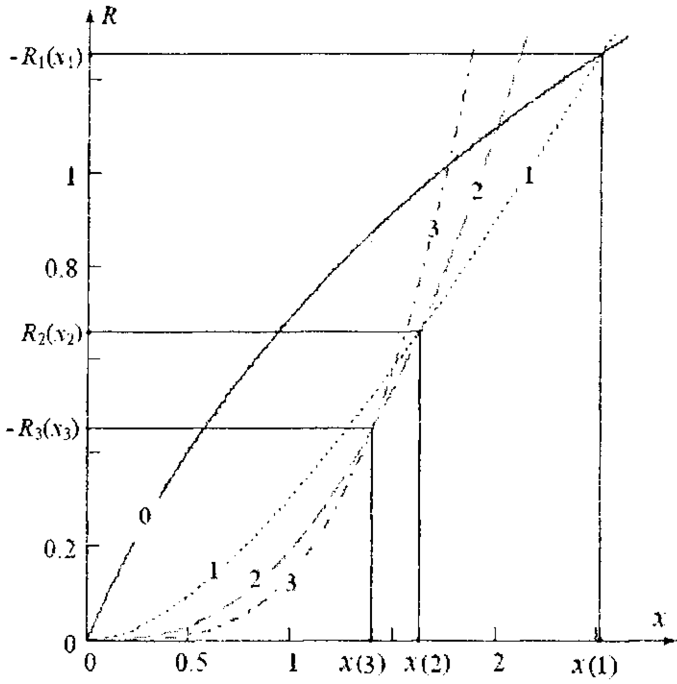

Рис. 1 Область применимости формулы Тейлора и ее погрешность (i-тая кривая изображает модуль остаточного члена $R_i(x)$)

Дальнейшее принципиально сводится к следующему. Из равенства (20) с помощью (16) можно определить $x = x(n)$ – максимальное значение аргумента, возможное при данном n для приближенных вычислений вне интервала сходимости[1]. Затем из условия

$$|R_n(x(n))| = \Delta \qquad (21)$$

найдем минимальное $n = n(\Delta)$, необходимое для обеспечения требуемой точности Δ. После чего получим то самое (максимальное) $x = x(\Delta) = x(n(\Delta))$, позволяющее с помощью формулы Тейлора вне интервала сходимости соответствующего ряда вычислить $\ln(1+x)$ с заданной погрешностью Δ.

К сожалению, намеченная программа трудно реализуема, так как после подстановки (16) в (20) получается трансцендентное уравнение относительно x, не позволяющее явно выразить x через n. Тем не менее, имея в виду, что такая зависимость существует, уравнение (21) с учетом (20) представим в виде

$$\frac{x(n)^{n+1}}{n+1} \equiv 2\Delta. \qquad (22)$$

Формула (22) не является неявным заданием x как функции двух переменных n и Δ. Ибо n при данном x не может принимать произвольные значения, будучи с ним функционально связанным условием (19) (или более конкретно уравнением (20)). В частности, с ростом n величина $x(n)$ монотонно убывает, асимптотически приближаясь к единице (см. рис. 1). Поэтому правильно подобранное n является минимальным (чтобы не сужать область применимости формулы Тейлора), при котором обеспечивается выполнение (21) или, иными словами, достигается требуемая точность. В области $x < x(n)$ погрешность формулы Тейлора не превосходит $|R_n(x(n))|$ и монотонно убывает с ростом n (см. рис. 1). При этом само $x(n)$, как уже говорилось, стремится к единице справа.

В свете изложенного (22) является уравнением для определения упомянутого (минимального) n, достаточного для обеспечения требуемой точности. Разрешить его непосредственно нельзя, так как не конкретизирован вид функции $x(n)$. Хотя, по-видимому, это и можно было сделать с помощью (16), (20), воспользовавшись численными методами. Однако проще поступить иначе. Используем то обстоятельство, что корень уравнения (22) $n(\Delta)$, будучи подставленным в $x(n)$, должен (в свете изложенного) обеспечить максимальное значение x, отвечающее данному Δ. Поэтому $n(\Delta)$ можно определить как точку максимума функции

$$x(n,\Delta) = [2\Delta(n+1)]^{1/(n+1)} \qquad (23)$$

при фиксированном Δ. Формула (23) получается, если уравнение (22) интерпретировать, как неявное задание функции двух переменных $x(n,\Delta)$. Подчеркнем, что $x(n,\Delta)$ не имеет ничего общего с функцией одной переменной $x(n)$ и не совпадает с ней ни при каком значении аргумента Δ.

[1] Если $x > x(n)$, то условие (19) нарушается и для уменьшения погрешности лучше ограничиться меньшим n.

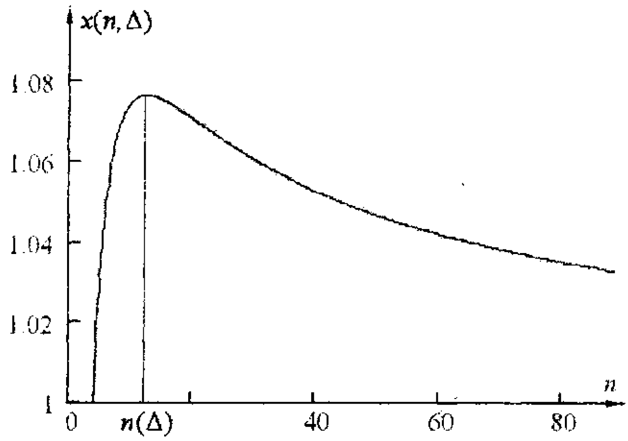

Рис. 2. Вид функции $x(n,\Delta)$ при фиксированном Δ

Для $\Delta = 0{,}1$ зависимость (23) представлена на рис. 2. Видно, что кривая действительно содержит экстремум, который является максимумом, как это и должно быть в соответствии с изложенным выше.

Выполнив в (23) дифференцирование по n, запишем необходимое условие экстремума:

$$x(n,\Delta)'_n = \frac{\left[2\Delta(n+1)\right]^{1/(n-1)}}{(n+1)^2}\left\{1 - \ln\left[2\Delta(n+1)\right]\right\} = 0,$$

откуда
$$n(\Delta) = \frac{e}{2\Delta} - 1, \qquad (24)$$

что после подстановки в (22) дает[2]

$$x(\Delta) = e^{2\Delta/e} > 1. \qquad (25)$$

Согласно (24), для увеличения точности вычислений вне интервала сходимости ряда Тейлора нужно в формуле Тейлора увеличивать число удерживаемых слагаемых. При этом согласно (25) уменьшается максимальное x, доступное для приближенных вычислений с требуемой точностью. В частности, $x(\Delta = 0) = 1$ и совпадает с правой границей интервала сходимости[3]. Тем не менее еще раз подчеркнем, что для любого конечного Δ имеет место строгое неравенство $x(\Delta) > 1$.

При необходимости формулы (24), (25) позволяют решить обратную задачу. По данному значению $x > 1$ с помощью (25) можно определить возможную точность вычислений Δ, а затем из (24) получить оптимальное число слагаемых.

С использованием формул (24), (25) составлена таблица погрешностей приближенных вычислений с помощью формулы Тейлора (16) вне области сходимости ряда (17).

Погрешность формулы Тейлора вне области сходимости соответствующего степенного ряда

Требуемая точность Δ	Оптимальное $n = n(\Delta)$	Максимально возможное $x = x(\Delta)$	$R_n(x(\Delta))$
0,1	13	1,07635	–0,09994
0,01	135	1,00738	–0,009999978
0,001	1358	1,00074	0,000999999943

Видно, что результаты вычислений полностью подтверждают развитую методику применения формулы Тейлора вне интервала сходимости соответствующего степенного ряда.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. - М.: Наука, 1985. - 430 с.

[2] В силу дискретности n, полученные с помощью (24) значения следует округлять до целых.

[3] В этом смысле проведенное рассмотрение можно считать исследованием на сходимость ряда Тейлора функции In(I-Hx). При этом постановка вопроса, как и само понятие сходимости, возникли естественным путем.