УДК 512.548

ПОЛИАДИЧЕСКИЕ АНАЛОГИ ЦЕНТРА ГРУППЫ

А.М. ГАЛЬМАК
(Могилевский государственный университет продовольствия)

Определяются и изучаются новые n-арные аналоги центра группы.

Введение. Центр $Z(A)$ n-арной группы $< A, [\ ] >$ впервые появился у С.А. Русакова [1, 2] при изучении n-арных групп с центральными рядами. Обобщая результаты С.А. Русакова, В.И. Тютин определил и стал изучать n-арные группы с f-центральными рядами [3], в определении которых присутствует централизатор $C_A(B)$ n-арной подгруппы $< B, [\ ] >$ в n-арной группе $< A, [\ ] >$.

Центр С.А. Русакова и централизатор В.И. Тютина являются частными случаями изучающихся в данной работе новых понятий – m-полуцентрализатора $CA(B, m)$ и m-полуцентрализатора типа T $TCA(B, m)$ подмножества $< B, [\ ] >$ в n-арной группе $<$ А, $[\ ] >$:

$$Z(A) = C_A(A, 2) = TC_A(A, 2), \quad C_A(B) = C_A(B, 2) = TC_A(B, 2).$$

В статье символом (~) обозначается отношение эквивалентности Поста. Для сокращения записей используется также стандартное обозначение

$$a_m^k = \begin{cases} a_m a_{m+1} \ldots a_k, & если\ m \le k, \\ \varnothing, & если\ m > k. \end{cases}$$

Для всякого элемента a n-арной группы $< A, [\ ] >$ через @ обозначается операция

$$x @ y = [x a_1 \ldots a_{n-2} y],$$

где $a_1, \ldots, a_{n-2}$ – обратная последовательность для a.

m-полуцентрализатор типа *T*. Следующее определение обобщает на n-арный случай понятие централизатора подмножества в группе.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Если $n = k(m - 1) + 1$, $k \ge 1$, то m-полуцентрализатором типа T подмножества B в n-арной группе $< A, [\ ] >$ называется множество

$$TC_A(B, m) = \{z \in A \mid zx_1 \ldots x_{m-1} \sim x_1 \ldots x_{m-1}z,\ \forall x_1, \ldots, x_{m-1} \in B\}.$$

Если $m = 2$, то определение 2-полуцентрализатора типа T совпадает с определением централизатора.

n-полуцентрализатор типа T называется полуцентрализатором типа T и обозначается символом $HTC_A(B)$, т.е.

$$HTC_A(B) = \{z \in A \mid [zx_1 \ldots x_{n-1}] = [x_1 \ldots x_{n-1}z],\ \forall x_1, \ldots, x_{n-1} \in B\}.$$

Если в определении 1 положить $A = B$, то получим определение m-полуцентра типа T n-арной группы $< A, [\ ] >$:

$$TZ(A, m) = \{z \in A \mid zx_1 \ldots x_{m-1} \sim x_1 \ldots x_{m-1}z,\ \forall x_1, \ldots, x_{m-1} \in A\}.$$

2-полуцентр $TZ(A, 2)$ типа T совпадает с центром.

n-полуцентр типа T называется полуцентром типа T и обозначается символом $HTZ(A)$, т.е. $TZ(A, n) = HTZ(A)$. Таким образом,

$$HTZ(A) = \{z \in A \mid [zx_1 \ldots x_{n-1}] = [x_1 \ldots x_{n-1}z],\ \forall x_1, \ldots, x_{n-1} \in A\}.$$

Имеет место очевидное

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. n-арная группа $< A, [\ ] >$ удовлетворяет тождеству

$$[xx_1 \ldots x_{m-1}] = [x_1 \ldots x_{m-1}x]$$

тогда и только тогда, когда $HTZ(A) = A$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $< A, [\ ] >$ – n-арная группа, $B \subseteq$ А. Тогда:

1) если $m - 1$ делит $n - 1$, $TC_A(B, m) \ne \varnothing$, то $< TC_A(B, m), [\ ] >$ – n-арная подгруппа в $< A, [\ ] >$, в частности, $< HTC_A(B), [\ ] >$ – n-арная подгруппа в $< A, [\ ] >$;

2) если $k - 1$ делят $n - 1$, $m - 1$ делит $k - 1$, то $TC_A(B, m) \subseteq TC_A(B, k)$;

3) если $m - 1$ и $k - 1$ делят $n - 1$, $r - 1 = (m - 1, k - 1)$, то $TC_A(B, r) = TC_A(B, m) \cap TC_A(B, k)$;

4) если $m - 1$ делит $n - 1$, $r - 1 = (m - 1, n - 1)$, то $TC_A(B, r) = TC_A(B, m) \cap HTC_A(B)$;

5) если $m-1$ и $k-1$ делят $n-1$, $(m-1, k-1) = 1$, то $C_A(B) = TC_A(B, m) \cap TC_A(B, k)$;

6) если $m-1$ делит $n-1$, $(m-1, n-1) = 1$, то $C_A(B) = TC_A(B, m) \cap HTC_A(B)$.

Доказательство

1) если $z_1, \dots, z_n \in TC_A(B, m)$, то из определения 1 следует

$$[z_1 \dots z_n]x_1 \dots x_{m-1} \sim x_1 \dots x_{m-1}[z_1 \dots z_n]$$

для любых $x_1, \dots, x_{m-1} \in B$. Следовательно, $[z_1 \dots z_n] \in TC_A(B, m)$.

Если теперь $z \in TC_A(B, m)$, то, учитывая нейтральность последовательностей $\underbrace{z \dots z}_{n-2}\bar{z}$ и $\bar{z}\underbrace{z \dots z}_{n-2}$, получим

$$zx_1 \dots x_{m-1} \sim x_1 \dots x_{m-1}z,$$

$$\bar{z}\,zx_1 \dots x_{m-1}\underbrace{z \dots z}_{n-3}\bar{z} \sim \bar{z}\,x_1, \dots, x_{m-1}z\underbrace{z \dots z}_{n-3}\bar{z},$$

$$\bar{z}\,x_1 \dots x_{m-1}z\underbrace{z \dots z}_{n-3}\bar{z} \sim \bar{z}\,z\underbrace{z \dots z}_{n-3}x_1 \dots x_{m-1}\bar{z},$$

$$\bar{z}\,x_1 \dots x_{m-1} \sim x_1 \dots x_{m-1}\bar{z}$$

для любых $x_1, \dots, x_{m-1} \in B$. Следовательно, $\bar{z} \in TC_A(B, m)$. Согласно критерию Дернте, $< TC_A(B, m), [\,] >$ – n-арная подгруппа в $< A, [\,] >$;

2) так как $k-1 = t(m-1)$ для некоторого целого t, то из $z \in TC_A(B, m)$ следует

$$zx_1 \dots x_{k-1} = zx_1 \dots x_{t(m-1)} = zx_1 \dots x_{m-1}x_m \dots x_{t(m-1)} \sim x_1 \dots x_{m-1}zx_m \dots x_{t(m-1)} \sim \dots \sim x_1 \dots x_{t(m-1)}z = x_1 \dots x_{k-1}z,$$

т.е.

$$zx_1 \dots x_{k-1} \sim x_1 \dots x_{k-1}z$$

для любых $x_1, \dots, x_{k-1} \in B$. Следовательно, $z \in TC_A(B, k)$ и верно включение

$$TC_A(B, m) \subseteq TC_A(B, k);$$

3) включение

$$TC_A(B, r) \subseteq TC_A(B, m) \cap TC_A(B, k) \qquad (1)$$

следует из пункта 2 доказательства.

Так как $r-1 = (m-1, k-1)$, то существуют целые числа α и β такие, что

$$\alpha(m-1) + \beta(k-1) = r-1.$$

Пусть для определенности $\alpha > 0$, $\beta < 0$, т.е.

$$\alpha(m-1) = -\beta(k-1) + (r-1), \; -\beta(k-1) > 0.$$

Если

$$z \in TC_A(B, m) \cap TC_A(B, k), x_1, \dots, x_{\alpha(m-1)} \in B,$$

то

$$zx_1 \dots x_{r-1}x_r \dots x_{-\beta(k-1)+r-1} = zx_1 \dots x_{\alpha(m-1)} \sim x_{\alpha(m-1)}z = x_1 \dots x_{r-1}x_r \dots x_{-\beta(k-1)+r-1}z \sim x_1 \dots x_{r-1}zx_r \dots x_{-\beta(k-1)+r-1},$$

откуда следует

$$zx_1 \dots x_{r-1} \sim x_1 \dots x_{r-1}z.$$

Следовательно, $z \in TC_A(B, r)$ и доказано включение

$$TC_A(B, m) \cap TC_A(B, k) \subseteq TC_A(B, r). \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует требуемое равенство;

4) следует из 3 при $k = n$, так как $TC_A(B, n) = HTC_A(B)$;

5) следует из 3 при $r = 2$, так как $TC_A(B, 2) = C_A(B)$;

6) следует из 4 и 5. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $< A, [\,] >$ – n-арная группа. Тогда:

1) если $m-1$ делит $n-1$, $TZ(A, m) \neq \varnothing$, то $< TZ(A, m), [\,] >$ – n-арная подгруппа в $< A, [\,] >$, в частности, $< HTZ(A), [\,] >$ – n-арная подгруппа в $< A, [\,] >$;

2) если $k-1$ делит $n-1$, $m-1$ делит $k-1$, то $TZ(A, m) \subseteq TZ(A, k)$;

3) если $m-1$ и $k-1$ делят $n-1$, $r-1=(m-1, n-1)$, то $TZ(A, r) = TZ(A, m) \cap TZ(A, k)$;
4) если $m-1$ делит $n-1$, $r-1=(m-1, n-1)$, то $TZ(A, r) = TZ(A, m) \cap HTZ(A)$;
5) если $m-1$ и $k-1$ делят $n-1$, $(m-1, k-1)=1$, то $Z(A) = TZ(A, m) \cap TZ(A, k)$;
6) если $m-1$ делит $n-1$, $(m-1, n-1)=1$, то $Z(A) = TZ(A, m) \cap HTZ(A)$.

m-полуцентрализатор. Возможно еще одно n-арное обобщение централизатора подмножества в группе.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. m-Полуцентрализатором подмножества B в n-арной группе $< A, [\ ] >$, где $n = k(m-1)+1$, $k \geq 1$, называется множество

$$C_A(B, m) = \{z \in A \mid z\, x_1^{m-2}\, x \sim x\, x_1^{m-2}\, z,\ \forall x, x_1, \ldots, x_{m-2} \in B\}.$$

При $m = 2$ определение 2-полуцентрализатора совпадает с определениями 2-полуцентрализатора типа T и централизатора.

n-Полуцентрализатор называется полуцентрализатором и обозначается символом $HC_A(B)$, т.е. $HC_A(B) = C_A(B, n)$.

Ясно, что

$$HC_A(B) = \{z \in A \mid [z\, x_1^{n-2}\, x] = [x\, x_1^{n-2}\, z],\ \forall x, x_1, \ldots, x_{n-2} \in B\}.$$

Если в определении 2 положить $A = B$, то получим определение m-полуцентра n-арной группы $< A, [\ ] >$:

$$Z(A, m) = \{z \in A \mid z\, x_1^{m-2}\, x \sim x\, x_1^{m-2}\, z,\ \forall x, x_1, \ldots, x_{m-2} \in A\}.$$

2-Полуцентр $Z(A, 2)$ совпадает с 2-полуцентром типа T и полуцентром.

n-Полуцентр называется полуцентром и обозначается символом $HZ(A)$, т.е. $Z(A, n) = HZ(A)$. Таким образом,

$$HZ(A) = \{z \in A \mid [z\, x_1^{n-2}\, x] = [x\, x_1^{n-2}\, z],\ \forall x, x_1, \ldots, x_{n-2} \in A\}.$$

Следующее предложение является следствием определений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. n-Арная группа $< A, [\ ] >$ является m-полуабелевой тогда и только тогда, когда она совпадает со своим m-полуцентром. В частности, n-арная группа является абелевой (полуабелевой) тогда и только тогда, когда она совпадает со своим центром (полуцентром).

Абелевы и полуабелевы n-арные группы, введенные Дернте в [4], являются частными случаями m-полуабелевых n-арных групп Поста [5].

Следующую теорему приведем без доказательства. Отметим только, что присутствующее в ее формулировке определение m-полунормализатора имеется в [6].

ТЕОРЕМА 2. Пусть $< A, [\ ] >$ – n-арная группа, $n = k(m-1)+1$, $k \geq 1$, $B \subseteq A$. Тогда, если $C_A(B, m) \neq \varnothing$, то $< C_A(B, m), [\ ] >$ – n-арная подгруппа в $< A, [\ ] >$, лежащая в ее m-полунормализаторе $N_A(B, m)$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $< A, [\ ] >$ – n-арная группа, $B \subseteq A$, то $< C_A(B), [\ ] >$ и $< HC_A(B), [\ ] >$ – n-арные подгруппы в $< A, [\ ] >$, причем $C_A(B) \subseteq N_A(B)$, $HC_A(B) \subseteq HN_A(B)$.

Заметим, что утверждение следствия 2 о том, что $< C_A(B), [\ ] >$ – n-арная подгруппа в $< A, [\ ] >$, доказано в [3] для случая, когда $< B, [\ ] >$ – n-арная подгруппа в $< A, [\ ] >$.

Известно, что все единицы n-арной группы лежат в ее центре. Покажем, что полуцентр n-арной группы, в отличие от её центра, может не содержать единицы этой n-арной группы.

ПРИМЕР. Пусть $< A, [\ ] >$ – n-арная группа, производная от неабелевой группы A с единицей e и пусть $x \in A$ и x не лежит в центре группы A. Тогда существует $y \in A$ такой, что $yx \neq xy$, откуда

$$yx = \underbrace{e\,e \ldots e}_{n-3}\,yx = [\underbrace{e\,e \ldots e}_{n-3}\,yx] \neq [x\underbrace{e \ldots e}_{n-3}\,ye] = x\underbrace{e \ldots e}_{n-3}\,ye = xy.$$

Следовательно, элемент e, являющийся единицей в $< A, [\ ] >$, не лежит в её полуцентре.

Таким образом, в данном случае $C_A(B, 2) = C_A(B) \not\subset HC_A(B) = C_A(B, n)$. Следовательно, для m-полуцентрализаторов в общем случае не верны аналоги утверждений 2 – 6 теоремы 1.

(Σ, m)-полуцентрализатор. m-полуцентрализаторы и m-полуцентрализаторы типа T можно объединить в рамках общего понятия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $< A, [\ ] >$ – n-арная группа, $B \subseteq A$, $m-1$ делит $n-1$, Σ – подмножество множества S_{m-1} всех подстановок на $m-1$ символах. (Σ, m)-полуцентрализатором подмножества B в $< A, [\ ] >$ называется множество

$$C_A(B, \Sigma, m) = \{z \in A \mid zx_1 \ldots x_{m-1} \sim x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(m-1)}z,\ \forall x_1, \ldots, x_{m-1} \in B, \forall \sigma \in \Sigma\}.$$

Частными случаями (Σ, m)-полуцентрализатора являются понятия:

Σ-полуцентрализатора $HC_A(B, \Sigma) = C_A(B, \Sigma, n)$;

(Σ, m)-полуцентра $Z(A, \Sigma, m) = C_A(A, \Sigma, m)$;

Σ-полуцентра $HZ(A, \Sigma) = Z(A, \Sigma, n)$.

Если в определении 3 положить $\Sigma = \{\sigma\}$, то $(\{\sigma\}, m)$-полуцентрализатор называется (σ, m)-полуцентрализатором и обозначается символом $C_A(B, \sigma, m)$.

Аналогично определяются σ-полуцентрализатор $HC_A(B, \sigma)$, (σ, m)-полуцентр $Z(A, \sigma, m)$ и σ-полуцентр $HZ(A, \sigma)$.

Если $\tau = (m-1\ \ m-2 \ldots 21)$, то определение (τ, m)-полуцентрализатора совпадает с определением m-полуцентрализатора.

Если же ε – тождественная подстановка на $m-1$ символах, то определение (ε, m)-полуцентрализатора совпадает с определением m-полуцентрализатора типа T.

Так как $\tau^m = \tau$, $\varepsilon^m = \varepsilon$, то в связи с теоремами 1 и 2 закономерен.

ВОПРОС 1. Если $\sigma^m = \sigma$, то будет ли (σ, m)-полуцентрализатор $C_A(B, \sigma, m)$ n-арной подгруппой в $< A, [\ ] >$?

Следующий вопрос связан с тем, что $\{\varepsilon\}$ – подгруппа в симметрической группе S_{m-1}.

ВОПРОС 2. Если Σ – подгруппа в симметрической группе S_{m-1}, то будет ли (Σ, m)-полуцентрализатор $C_A(B, \Sigma, m)$ n-арной подгруппой в $< A, [\ ] >$?

Еще один вопрос связан с тем, что $< \{\tau\}, [\ ] >$ и $< \{\varepsilon\}, [\ ] >$ – m-арные подгруппы в m-арной группе $< S_{m-1}, (\ ) >$, производной от симметрической группы S_{m-1}.

ВОПРОС 3. Если $< \Sigma, (\ ) >$ – m-арная подгруппа в m-арной группе $< S_{m-1}, (\ ) >$, где

$$(\sigma_1 \ldots \sigma_m) = \sigma_1 \ldots \sigma_m,$$

то будет ли (Σ, m)-полуцентрализатор $C_A(B, \Sigma, m)$ n-арной подгруппой в $< A, [\ ] >$?

Понятно, что при положительном ответе на вопрос 3, положительными будут и ответы на вопросы 1 и 2.

Слабый m-полуцентрализатор. Определим еще один n-арный аналог централизатора подмножества в группе.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Если $n = k(m-1)+1$, $k \geq 1$, то слабым m-полуцентрализатором (m-полуцентрализатором типа D) подмножества B в n-арной группе $<$ A, $[\ ] >$ называется множество

$$DC_A(B, m) = \{z \in A \mid z\underbrace{x \ldots x}_{m-1} \sim \underbrace{x \ldots x}_{m-1} z,\ \forall x \in B\}.$$

Частными случаями слабого m-полуцентрализатора являются понятия:

слабого полуцентрализатора $HDC_A(B) = DC_A(B, n)$;

слабого m-полуцентра $DZ(A, m) = DC_A(A, n)$;

слабого полуцентра $HDZ(A) = DZ(A, n)$.

Ясно, что:

1) $C_A(B, m) \subseteq DC_A(B, m)$;
2) $TC_A(B, m) \subseteq DC_A(B, m)$;
3) $TC_A(B, 2) = DC_A(B, 2) = C_A(B, 2) = C_A(B)$;
4) $TZ(A, 2) = DZ(A, 2) = Z(A, 2) = Z(A)$;
5) $HTZ(A) \subseteq HDZ(A)$;
6) $TC_A(a, m) = DC_A(a, m) = C_A(a, m)$;
7) $HTC_A(a) = HDC_A(a) = HC_A(a)$.

В [7] В. Дудек для всякого элемента a n-арной группы $< A, [\ ] >$ определил непустое множество

$$\{x \in A \mid [x\underbrace{a \ldots a}_{n-1}] = [\underbrace{a \ldots a}_{n-1}x]\},$$

которое, как несложно заметить, совпадает с полуцентрализатором $HC_A(a)$ элемента a в n-арной группе $< A, [\ ] >$.

ТЕОРЕМА 3 [7]. Пусть $< A, [\ ] >$ – n-арная группа. Тогда:

1) $HC_A(a)$ совпадает с централизатором элемента a в группе $< A, \circledast >$: $HC_A(a) = C_{< A, \circledast >}(a)$;

2) $< HC_A(a), [\ ] >$ – n-арная подгруппа в $< A, [\ ] >$;

3) $< A, [\ ] >$ – слабо полуабелева тогда и только тогда, когда $HC_A(a) = A$ для любого $a \in A$.

Слабо m-полуабелевы n-арные группы, в частности слабо полуабелевы n-арные группы, определены автором в [8].

Отметим, что утверждение 2 настоящей теоремы является следствием теоремы 2.

Имеет место очевидное

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если $< A, [\ ] >$ – n-арная группа, $a \in A$, то $DZ(A, m) = \bigcap_{a \in A} C_A(a, m)$. В частности, $HDZ(A) = \bigcap_{a \in A} HC_A(a)$.

Теперь утверждение 3 теоремы 3 может быть сформулировано иначе.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. n-арная группа $< A, [\ ] >$ является слабо полуабелевой тогда и только тогда, когда $HDZ(A) = A$.

Следующая теорема доказывается аналогично теореме 1.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $< A, [\ ] >$ – n-арная группа, $B \subseteq A$. Тогда:

1) если $m - 1$ делит $n - 1$ и $DC_A(B, m) \neq \varnothing$, то $< DC_A(B, m), [\ ] >$ – n-арная подгруппа в $< A, [\ ] >$, в частности, $< HDC_A(B), [\ ] >$ – n-арная подгруппа в $<$ A, $[\ ] >$;

2) если $k - 1$ делят $n - 1$, $m - 1$ делит $k - 1$, то $DC_A(B, m) \subseteq DC_A(B, k)$;

3) если $m - 1$ и $k - 1$ делят $n - 1$, $r - 1 = (m - 1, k - 1)$, то $DC_A(B, r) = DC_A(B, m) \cap DC_A(B, k)$;

4) если $m - 1$ делит $n - 1$, $r - 1 = (m - 1, n - 1)$, то $DC_A(B, r) = DC_A(B, m) \cap HDC_A(B)$;

5) если $m - 1$ и $k - 1$ делят $n - 1$, $(m - 1, k - 1) = 1$, то $C_A(B) = DC_A(B, m) \cap DC_A(B, k)$;

6) если $m - 1$ делит $n - 1$, $(m - 1, n - 1) = 1$, то $C_A(B) = DC_A(B, m) \cap HDC_A(B)$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $< A, [\ ] >$ – n-арная группа. Тогда:

1) если $m - 1$ делит $n - 1$, $DZ(A, m) \neq \varnothing$, то $< DZ(A, m), [\ ] >$ – n-арная подгруппа в $< A, [\ ] >$, в частности, $< HDZ(A), [\ ] >$ – n-арная подгруппа в $< A, [\ ] >$;

2) если $k - 1$ делит $n - 1$, $m - 1$ делит $k - 1$, то $DZ(A, m) \subseteq DZ(A, k)$;

3) если $m - 1$ и $k - 1$ делят $n - 1$, $r - 1 = (m - 1, n - 1)$, то $DZ(A, r) = DZ(A, m) \cap DZ(A, k)$;

4) если $m - 1$ делит $n - 1$, $r - 1 = (m - 1, n - 1)$, то $DZ(A, r) = DZ(A, m) \cap HDZ(A)$;

5) если $m - 1$ и $k - 1$ делят $n - 1$, $(m - 1, k - 1) = 1$, то $Z(A) = DZ(A, m) \cap DZ(A, k)$;

6) если $m - 1$ делит $n - 1$, $(m - 1, n - 1) = 1$, то $Z(A) = DZ(A, m) \cap HDZ(A)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Русаков С.А. К теории нильпотентных n-арных групп // Конечные группы. - Мн.: Навука і тэхніка. 1978.-С. 104 - 130.
2. Русаков С.А. Алгебраические n-арные системы. - Мн.: Навука і тэхніка, 1992. 245 с.
3. Тютин В.И. n-Арные группы с f-центральными рядами // Вопросы алгебры. Вып. 3. - 1987. - С, 97 - 116.
4. Dbrnte W. Untersuchungen liber einen verallgemeinerten Gruppenbegrieff // Math. Z. - 1928. Bd. 29. - S. 1 - 19.
5. Post E.L. Polyadic groups // Trans. Amer. Math. Soc. - 1940. - Vol. 48, № 2, - P 208 - 350.
6. Гальмак А.М. Конгруэнции полиадических групп. - Мн.: Беларуская навука, 1999. - 196 с.
7. Dudek W.A. On the class of weakly semiabelian polyadic groups // Discrete Math. Appl. - 1996. - Voi. 6, №5. - P. 427-433.
8. Гальмак А.М. Абелевы n-арные группы и их обобщения // Вопросы алгебры. Вып. 3. - Мн.: Университетское, 1987. - С. 86 - 93.