УДК 512. 542

О РАЗРЕШИМОСТИ КОНЕЧНЫХ ГРУПП С ОГРАНИЧЕННЫМИ ПОРЯДКАМИ КОФАКТОРОВ ПОДГРУПП

С.М. ЕВТУХОВА
(Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины)

Доказывается, что конечная группа G, порядок которой не делится на 3 и $|H / core_G H| \le 447$ для всех подгрупп H из G, является разрешимой и её нильпотентная длина не превышает 4.

1. Введение

В работе используются стандартные обозначения и терминология теории конечных групп, которые можно найти в [1, 2].

1.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Кофактором подгруппы H группы G называется факторгруппа $H / core_G H$, где $core_G H = \bigcap_{g \in G} H^g$ – ядро подгруппы H в группе G. Ясно, что $core_G H$ является наибольшей нормальной подгруппой группы G, содержащейся в H. Кроме того, $core_G G = G$ для любой группы G.

Группы с различными условиями для кофакторов подгрупп рассматривались рядом авторов (Я.Г. Беркович, Диксон, Ремтула, Поланд, Е.Т. Огарков, Е.И. Хухро и др). [3 – 7].

В [3] исследовались группы, у которых кофакторы максимальных подгрупп либо нильпотентны, либо группы Шмидта. В [4] устанавливается разрешимость групп с нильпотентными кофакторами всех подгрупп или только максимальных подгрупп. В [5] исследовались группы, все подгруппы которых имеют примарные циклические кофакторы. В частности, было доказано, что если в группе порядки кофакторов подгрупп являются простыми числами, то группа разрешима. В [6] изучены группы, все бипримарные подгруппы которых имеют примарные кофакторы, а также описаны конечные неразрешимые группы, все собственные подгруппы которых имеют примарные или бипримарные кофакторы. В [7] устанавливается метабелевость p-группы G, в которых $|H / core_G H| \le p$, для всех подгрупп H из G.

В настоящей работе развивается тематика подобных исследований для 3'-групп, т.е. для групп, порядок которых не делится на 3. Такие группы исследовались в работе Э.М. Пальчика [8] и других авторов.

Имеет место

ТЕОРЕМА. Пусть G – группа порядка, не делящегося на 3, и $|H / core_G H| \le 447$ для любой подгруппы H из G. Тогда G – разрешимая группа, её нильпотентная длина не превышает 4. Кроме того, если G-группа нечётного порядка, то её нильпотентная длина не превышает 3.

2. Основные используемые результаты и понятия

Используем следующие обозначения:

E – единичная подгруппа;

$H \le G$ означает, что H подгруппа группы G;

$M <_{\max} G$ означает, что M – максимальная подгруппа группы G;

$N \lhd G$ означает, что N – нормальная подгруппа группы G;

$N \cdot\!\lhd G$ означает, что N – минимальная нормальная подгруппа группы G;

E_{p^a} – элементарная абелева р-группа;

$G = [N] M$ означает, что группа G является полупрямым произведением своих подгрупп N и M, причём $N \lhd G$;

$\Phi(G)$, $F(G)$ – подгруппы Фраттини и Фиттинга соответственно;

$O_p(G)$ – наибольшая нормальная p-подгруппа группы G;

$\mathfrak{A}$ – класс всех абелевых групп;

$\mathfrak{N}$ – класс всех нильпотентных групп;

$\mathfrak{S}$ – класс всех разрешимых групп.

2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Элемент порядка 2 называется инволюцией. Диэдральной группой называется группа, порождённая двумя различными инволюциями. Через D_n обозначается диэдральная группа порядка n.

2.2. ЛЕММА [2, теорема 14.6]. Пусть G – группа. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) группа G диэдральная;
2) группа $G = [A] B$, где $A = \langle a \rangle$, $B = \langle b \rangle$, $|B| = 2$, $a^b = a^{-1}$.

2.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Группа называется примитивной, если она содержит максимальную подгруппу с единичным ядром. В примитивной группе максимальная подгруппа с единичным ядром называется примитиватором.

2.4. ЛЕММА [1, теорема II.3.2]. Пусть G – примитивная разрешимая группа с примитиватором M. Тогда

1) $\Phi(G) = 1$;

2) $F(G) = C_G(F(G)) = O_p(G)$ и $F(G)$ является элементарной абелевой p-группой порядка p^n для некоторого простого p;

3) в группе G единственная минимальная нормальная подгруппа, совпадающая с $F(G)$;

4) $G = [F(G)]M$ и $O_p(M) = 1$;

5) M изоморфна неприводимой подгруппе группы $GL(n, p)$.

2.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если в группе G существует собственная подгруппа H такая, что $H \cap H^x = E$ для всех $x \in G \setminus H$, то группа G называется группой Фробениуса, а подгруппа H – дополнением в группе G.

2.6. ЛЕММА [9]. Пусть G – группа Фробениуса с дополнением H. Тогда множество

$$N = G \setminus \left\{ \bigcup_{x \in G} H^x \setminus \{e\} \right\}$$

является нормальной нильпотентной подгруппой группы G, причём $G = [N]H$ и $N \cap H = E$. Подгруппу N называют ядром группы Фробениуса.

Более детальное обсуждение свойств групп Фробениуса и их значений в теории конечных групп содержится в обзорной статье А.И. Старостина [9].

2.7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $K = GF(q)$, где $q = 2^{2m+1}$ и $m > 0$. Введём следующие матрицы:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^{1+2^m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{2^m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-2^m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^{-1-2^m} \end{pmatrix},$$

$$S(a,b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & a\pi & 1 & 0 \\ a^2(a\pi) + ab + b\pi & a(a\pi) + b & a & 1 \end{pmatrix},$$

где $\lambda \in K^{\#}$, $a \in K$, $b \in K$, π – автоморфизм K такой, что $x\pi^2 = x^2$ для всех $x \in K$.

Подгруппу группы $GL(4, q)$, порождённую матрицами T, $M(\lambda)$ и $S(a, b)$, называют группой Сузуки и обозначают через $Sz(q)$. Таким образом,

$$Sz(q) = \langle S(a, b), M(\lambda), T \mid a \in K, b \in K, \lambda \in K^{\#} \rangle.$$

Отметим некоторые свойства группы Сузуки.

2.8. ЛЕММА. Пусть $Sz(q)$ – группа Сузуки, где $q = 2^{2m+1}$ и $m \geq 1$. Тогда

1) $Sz(q)$ – простая группа и $|Sz(q)| = (q^2 + 1)q^2(q - 1)$ [1, теорема XI.3.3];

2) если p – нечётное простое число, то силовская p-подгруппа группы $Sz(q)$ циклическая [1, теорема XI.3.9];

3) $Sz(q)$ имеет циклические подгруппы U_1 и U_2 порядков $q + 2r + 1$ и $q - 2r + 1$, где $r = 2^m$. Кроме того, U_1 и U_2 – холловские подгруппы [1, теорема XI.3.10 (a)];

4) если $1 \neq u \in U_i$, то $C_{Sz(q)}(u) = U_i$, и $|N_{Sz(q)}(U_i) : U_i| = 4$, $N_{Sz(q)}(U_i) = \langle U_i, t_i \rangle$, где $u^{t_i} = u^q$ для всех $u \in U_i$. В частности, $N_{Sz(q)}$ есть группа Фробениуса с ядром U_i [1, теорема XI.3.10(b)].

2.9. ЛЕММА [10]. Группа $Sz(q)$, $q = 2^{2m+1}$ имеет следующие максимальные подгруппы:

(1) $H(q)$ – группа Фробениуса порядка $q^2(q - 1)$;

(2) группа диэдра порядка $2(q - 1)$;

(3) группа Фробениуса $[a]b$, где $a^{q+r+1} = b^4 = 1$, $r^2 = 2q$;

(4) группа Фробениуса $[a]b$, где $a^{q-r+1} = b^4 = 1$, $r^2 = 2q$;

(5) $Sz(s)$, где $s^t = q$, t – простой делитель числа $2m + 1$.

2.10. ЛЕММА [11, теорема 4.174]. Если G – простая 3'-группа, то $G \cong Sz(q)$, $q = 2^{2m+1}$ и $m \geq 1$.

Пусть $\rho(n)$ и $\sigma(n)$ – максимум производных длин вполне приводимых разрешимых подгрупп и вполне приводимых подгрупп нечетного порядка группы $GL(n, F)$, где F – поле. Согласно [12] такие функции $\rho(n)$ и $\sigma(n)$ существуют и не зависят от поля F.

2.11. ЛЕММА [13, [14].

1) Если $n \in \{2, 3, 4\}$, то $\rho(n) = n + 2$.
2) Если $n \in \{5, 6, 7\}$, то $\rho(n) = 7$.
3) Если $n \in \{8, 9\}$, то $\rho(n) = n$.
4) Если $n \in \{10, ..., 17\}$, то $\rho(n) = 10$.
5) Если $n \in \{18, ..., 25\}$, то $\rho(n) = 11$.
6) Если $n \in \{26, ..., 33\}$, то $\rho(n) = 12$.
7) Если $n \in \{34, ..., 65\}$, то $\rho(n) = 13$.
8) Если $n \geq 66$, то $\rho(n) \leq 5\log_2(n - 2) + 53/10$.

В частности, $\rho(n) \leq (n + 2)$. Если $n \geq 7$, то $\rho(n) \leq n$. Если $n > 10$, то $\rho(n) < n$.

2.12. ЛЕММА [15, теорема 4B].

1) Если $n = 1,2$, то $\sigma(n) = 1$.
2) Если $n = 3,4$, то $\sigma(n) = 2$.
3) Если $5 \cdot 7^x \leq n < 15 \cdot 7^x$, то $\sigma(n) = 2x + 3$.
4) Если $15 \cdot 7^x \leq n < 5 \cdot 7^{x+1}$, то $\sigma(n) = 2x + 4$.

2.13. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Класс групп $\mathfrak{X}$ называется наследственным классом или классом, замкнутым относительно подгрупп, если выполняется следующее требование: если $G \in \mathfrak{X}$ и $H \leq G$, то $H \in \mathfrak{X}$.

2.14. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Класс групп $\mathfrak{X}$ называется замкнутым относительно факторгрупп или гомоморфом, если выполняется требование: если $G \in \mathfrak{X}$ и $N \lhd G$, то $G / N \in \mathfrak{X}$.

2.15. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Класс $\mathfrak{X}$ называется замкнутым относительно подпрямых произведений, если выполняется требование: если $G / N_1 \in \mathfrak{X}$ и $G / N_2 \in \mathfrak{X}$, то $G / N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{X}$.

2.16. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Класс $\mathfrak{X}$ называется насыщенным, если выполняется требование: если $G / N \in \mathfrak{X}$, $N \leq \Phi(G)$, то $G \in \mathfrak{X}$.

2.17. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Наследственным гомоморфом называется класс групп, замкнутый относительно подгрупп и факторгрупп.

2.18. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Формацией называется класс групп, замкнутый относительно факторгрупп и подпрямых произведений.

2.19. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Формация называется насыщенной, если она является насыщенным классом.

2.20. ЛЕММА. Пусть $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация и G – разрешимая группа. Предположим, что G не принадлежит $\mathfrak{F}$, но $G / N \in \mathfrak{F}$ для всех не единичных нормальных подгрупп N группы G. Тогда G – примитивная группа.

Доказательство. Утверждение легко выводится из соответствующих определений.

2.21. ЛЕММА [16, теорема VII.4, VII.5]. Если $\mathfrak{F}$ – насыщенная формация, $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F}$, и $\mathfrak{H}$ – формация, то $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ – насыщенная формация. В частности, $\mathfrak{N}\mathfrak{A}^k$ – насыщенная формация для любого натурального k.

3. Предварительные результаты

Дадим следующее

3.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Группа G принадлежит классу $\mathfrak{X}_n$ тогда и только тогда, когда для любой подгруппы H группы G выполняется неравенство $|H / core_G H| \leq n$.

3.2. ЛЕММА. Если H и K – подгруппы группы G и $K \subseteq H$, то $core_G K \leq core_H K$.

Доказательство. Так как $core_G K$ – наибольшая нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в K, то $core_G K \leq K \leq H$ и, кроме того, $core_G K \lhd H$. Но $core_H K$ – наибольшая нормальная в H подгруппа, содержащаяся в K, поэтому $core_G K \leq core_H K$. Лемма доказана.

3.3. ЛЕММА. Пусть $N \lhd G$ и $N \leq H < G$. Тогда $N \leq core_G H$ и $core_{G/N} (H / N) = (core_G H) / N$.

Доказательство. Ясно, что $N \leq core_G H$ и $(core_G H) / N$ – нормальная в G / N подгруппа, содержащаяся в H / N, поэтому $(core_G H) / N \leq core_{G/N} (H / N)$.

С другой стороны, пусть $core_{G/N}(H/N) = K/N$. Так как $K/N \lhd G/N$, то $K \lhd G$ и $K \leq H$. А так как $core_G H$ – наибольшая нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в H, то $K \leq core_G H$. Следовательно, $core_{G/N}(H/N) \leq (core_G H)/N$. Из двух включений получаем равенство. Лемма доказана.

3.4. ЛЕММА. Класс $\mathfrak{X}_n$ является наследственным гомоморфом и $\mathfrak{X}_k \subseteq \mathfrak{X}_n$, для любого $k \leq n$.

Доказательство. Рассмотрим произвольную подгруппу H группы $G \in \mathfrak{X}_n$ и пусть X – произвольная подгруппа группы H. Так как G принадлежит классу $\mathfrak{X}_n$, то выполняется неравенство $|X/core_G X| \leq n$. По лемме 3.2 имеем $core_G X \leq core_H X$, значит $|core_G X| \leq |core_H X|$. Таким образом,

$$|X/core_H X| = \frac{|X|}{|core_H X|} \leq \frac{|X|}{|core_G X|} = |X/core_G X| \leq n \cdot$$

Следовательно, для любой подгруппы X группы H выполняется неравенство $|X/core_H X| \leq n$, а это означает, что H принадлежит классу $\mathfrak{X}_n$. Поэтому $\mathfrak{X}_n$ – наследственный класс.

Докажем что $\mathfrak{X}_n$ – гомоморф. Так как группа G принадлежит классу $\mathfrak{X}_n$, то для любой подгруппы H группы G имеем $|H/core_G H| \leq n$. Рассмотрим факторгруппу G/N, где $N \lhd G$ и пусть H/N является произвольной подгруппой в G/N. По лемме 3.3 получаем, что $core_{G/N}(H/N) = (core_G H)/N$. Таким образом,

$$|(H/N)/core_{G/N}(H/N)| = |(H/N)/(core_G H)/N| = |H/core_G H| \leq n.$$

Следовательно, факторгруппа G/N принадлежит классу $\mathfrak{X}_n$. Таким образом, $\mathfrak{X}_n$ – наследственный гомоморф.

Пусть $k \leq n$. Если $G \in \mathfrak{X}_k$, то для любой подгруппы H из G выполняется неравенство $|H/core_G H| \leq k \leq n$ и следовательно, $G \in \mathfrak{X}_n$. Лемма доказана.

3.5. ЛЕММА. Пусть примитивная разрешимая группа G принадлежит классу $\mathfrak{X}_n$. Тогда $G = [E_{p^\alpha}]$, где $E_{p^\alpha} \lhd G$, $M <_{max} G$, $core_G M = E$ и для группы G возможны следующие варианты:

1) $\alpha = 1$, $M = E$ и $G = Z_p$;

2) $\alpha = 1$, $M \neq E$ и $G = [Z_p] Z_{n_1}$, где $Z_{n_1} = M$ и n_1 делит $(p-1)$, $2 \leq n_1 \leq n$;

3) $\alpha \geq 2$, $M \neq E$ и $p^{\alpha-1} \leq n$, $2 \leq |M| \leq n$.

В частности, если примитивная разрешимая группа G принадлежит $\mathfrak{X}_n \setminus \mathfrak{X}_{n-1}$, то возможны следующие варианты:

4) $G = [Z_p]Z_n$ и n делит $(p-1)$;

5) $G = [E_{p^\alpha}]M$, $\alpha \geq 2$, $p^{\alpha-1} = n$ и $2 \leq |M| \leq n-1$;

6) $G = [E_{p^\alpha}]M$, $\alpha \geq 2$, $p^{\alpha-1} \leq n$ и $|M| = n$.

Доказательство. Если G – примитивная разрешимая группа, то по лемме 2.4 получаем, что $G = [N]M$, где $M <_{max} G$, $core_G M = E$, т.е. M – примитиватор группы G, а $N \lhd G$, $N = F(G) = E_{p^\alpha}$, $N = C_G(N)$, $|N| = p^\alpha$ для некоторого простого p и $O_p(M) = 1$.

Если $\alpha = 1$ и $|M| = E$, то $G = Z_p$ – циклическая группа простого порядка, она принадлежит $\mathfrak{X}_1$.

Если $\alpha = 1$ и $|M| \neq E$, то M – циклическая подгруппа порядка, делящего $(p-1)$, так как $M \cong G/N$ и изоморфна подгруппе группы автоморфизмов циклической группы порядка p. Поэтому $M \cong Z_n$, $2 \leq n$, n делит $(p-1)$ и $G \in \mathfrak{X}_n \setminus \mathfrak{X}_{n-1}$.

Пусть $\alpha \geq 2$. Тогда $|M| = n \geq 2$. Так как собственные подгруппы из N имеют единичные ядра в группе G, то $1 < p^{\alpha-1} \leq n$. Ясно, что группа $G \in \mathfrak{X}_m \setminus \mathfrak{X}_{m-1}$, где $m = max\{p^{\alpha-1}, n\}$. Если $m = p^{\alpha-1}$, то имеем вариант (5). При $m = n$ получаем (6). Лемма доказана.

3.6. ЛЕММА. Если порядок $G/Z(G)$ делит p^3, для некоторого простого p, то $d(G) \leq 2$.

Доказательство. Если $G/Z(G)$ абелева, то $d(G) \leq 2$. Предположим, что $G/Z(G)$ неабелева. Так как группы порядков 1, p, и p^2 абелевы, то $|G/Z(G)| = p^3$. Если $|Z(G/Z(G))| = p^2$, то $(G/Z(G))/Z(G/Z(G))$ – группа порядка p, поэтому она циклическая. По лемме 6.7 из [2] факторгруппа $G/Z(G)$ абелева, противоречие. Пусть $|Z(G/Z(G))| = p$. Опять по лемме 6.7 из [2] подгруппа H абелева, где $H/Z(G) = Z(G/Z(G))$. Поскольку H нормальная подгруппа группы G, а $|G/H| = p^2$, то G/H абелева и $d(G) \leq 2$. Следовательно, в каждом из вариантов получили, что $d(G) \leq 2$. Лемма доказана.

3.7. ЛЕММА. Если H – разрешимая неприводимая $3'$-подгруппа из $GL(n, p)$ и $n \leq 3$, то $d(H) \leq 2$.

Доказательство. Заключим H в максимальную разрешимую подгруппу M группы $GL(n, p)$, $n \leq 3$ и докажем утверждение леммы для M. Очевидно, M – неприводимая подгруппа. По теореме Д.А. Супруненко [17, с. 234] возможны три случая: группа M импримитивна; группа M примитивна и её максимальная нормальная подгруппа F изоморфна мультипликативной группе поля $GF(p^n)$, $n \leq 3$; группа M примитивна и её максимальная нормальная подгруппа $F = GF(p)^{\#}E_n$, $n \leq 3$.

Пусть $n = 2$. Воспользовавшись леммой 4 из [18] получаем, что в первых двух случаях $d(M) \leq 2$ и следовательно, $d(H) \leq 2$.

Пусть M примитивна и её максимальная абелева нормальная подгруппа $F = GF(p)^{\#}E_2$. Подгруппа F состоит из скалярных матриц [17, с. 234, формула (13)], поэтому F содержится в центре M. В M существует нормальная подгруппа A такая, что A содержит F и A / F изоморфна элементарной абелевой группе порядка 4, а M / A изоморфна симметрической группе степени 3 [17, с. 234, формулы (13) и (14)]. Таким образом, группа M обладает нормальным рядом

$$E < F < A < M, \text{ где } F \subseteq Z(M),\ A / F \cong E_4 \text{ и } M / A \cong S_3.$$

Отсюда следует, что A нильпотентна. Ясно, что

$$E \leq F \cap H \leq A \cap H \leq H, \text{ где } F \cap H \leq Z(H).$$

Так как порядок H не делится на 3, то $|H / F \cap H|$ делит 8. Следовательно, применяя лемму 3.6, получаем, что $d(H) \leq 2$.

Пусть $n = 3$. Воспользовавшись леммой 5 из [18] получаем, что в первых двух случаях для подгруппы M получаем $d(M) \leq 2$ и, следовательно, $d(H) \leq 2$.

Пусть M примитивна и её максимальная абелева нормальная подгруппа $F = GF(p)^{\#}E_3$. Подгруппа F состоит из скалярных матриц [17, с. 234, формула (13)], поэтому F содержится в центре M. В M существует нормальная подгруппа A такая, что A содержит F и A / F изоморфна элементарной абелевой группе порядка 9, а M / A изоморфна симметрической группе степени 4, [17, с. 234, формулы (13) и (14)]. Таким образом, группа M обладает нормальным рядом

$$E < F < A < M, \text{ где } F \subseteq Z(M),\ A / F \cong E_9 \text{ и } M / A \cong S_4.$$

Отсюда следует, что A нильпотентна. Ясно, что

$$E \leq F \cap H \leq A \cap H \leq H, \text{ где } F \cap H \leq Z(H).$$

Так как порядок H не делится на 3, то $|H / F \cap H|$ делит 8. Применяя лемму 3.6, снова получаем, что $d(H) \leq 2$. Следовательно, в каждом из случаев $d(H) \leq 2$. Лемма доказана.

4. Основные результаты

4.1. ЛЕММА. $Sz(q) \in \mathfrak{X}_n \setminus \mathfrak{X}_{n-1}$, где $n = q^2(q-1)$, $q = 2^{2m+1}$, $m \geq 1$.

Доказательство. Так как группа Сузуки простая по лемме 2.8 (1), то любая собственная подгруппа H группы $Sz(q)$ имеет единичное ядро. Следовательно, неравенство $|H / core_{Sz(q)} H| \leq n$ равносильно неравенству $|H| \leq n$.

По лемме 2.9 группа Сузуки $Sz(q)$, $q = 2^{2m+1}$, $m \geq 1$ имеет следующие максимальные подгруппы:

(1) H_1 – группа Фробениуса порядка $q^2(q-1)$;

(2) группа диэдра $D_{2(q-1)}$ порядка $2(q-1)$;

(3) группа Фробениуса $H_2 = [a]\, b$, где $a^{q+r+1} = b^4 = 1$, $r^2 = 2q$;

(4) группа Фробениуса $H_3 = [a]\, b$, где $a^{q-r+1} = b^4 = 1$, $r^2 = 2q$;

(5) $Sz(s)$, где $s^t = q$, t – простой делитель числа $2m + 1$.

Таким образом, нужно доказать, что порядки максимальных подгрупп не превосходят числа $q^2(q-1)$ и существует хотя бы одна подгруппа, чей порядок равен $q^2(q-1)$.

Сравним порядки максимальных подгрупп. Ясно, что $|D_{2(q-1)}| < |H_1|$ и $|H_3| < |H_2|$. Проверим, что $|H_2| < |H_1|$. Действительно,

$$|H_2| = 4(q + \sqrt{2q} + 1) = 4(q - 1 + \sqrt{2q} + 2), \text{ а } |H_1| = q^2(q-1).$$

Ясно, что $\dfrac{|H_1|}{q-1} = q^2$, $\dfrac{|H_2|}{q-1} = 4\left(1 + \dfrac{\sqrt{2q}+2}{q-1}\right)$, $\dfrac{\sqrt{2q}+2}{q-1} = \dfrac{2^{m+1}+2}{2^{2m+1}-1} < 1$, при $m \geq 1$.

Так как $q^2 \geq 2^6 > 8 > 4\left(1 + \dfrac{\sqrt{2q}+2}{q-1}\right)$, то $|H_1| > |H_2|$.

Теперь сравним порядок $H\|$ с порядком подгруппы из пункта (5). Так как $s^l = q \sim= 2^{2m+1}$, $m \geq 1$, и t - простой делитель числа $2m + 3$, то ; > 3 и $s = 2^й > 2$. Поэтому $\backslash H\| \backslash\sim q(\partial^2 - 1) = s^{21}$ (У - 1) > s' (У - 1) >
> У (У ■ (У - s + 1)) =У (У + 1)(л'~ 1) = | $Sz(2)$ |. Следовательно, I $Sz(s)$ \ < \ $H_{(}$ \.

Значит, порядки максимальных подгрупп не превосходят числа q^2 (q - 1), а так как j H_x \ = $q\sim^2 (q$ - Г), то группа Сузуки $Sz(q)$, $q = 2^{2m+1}$, $m > 1$ принадлежит £$_п$ \Т$_{П\cdot Ь}$ где $n = q^2 (q$ - I). Лемма доказана.

4.2. ЛЕММА. Если З'-группа G принадлежит Х$_п$ и n < 447, то G - разрешимая группа.

Доказательство. Пусть $n \leq 447$, Предположим, что £$_п$сг 6 , где @ - класс всех разрешимых групп и пусть G - группа наименьшего порядка из разности \ 6$\mathfrak{X}_п$

Докажем, что G -- простая группа. Воспользуемся индукцией по порядку группы и предположим противоположное, т.е. G - непростая группа. Тогда существует $E \Phi N \Phi G$ и $N< G$. Класс ЗУ - наследственный гомоморф по лемме 3.4, поэтому O/ N е и$\mathfrak{X}_п$N е ЗЁп. Так как | G / Л' | < | G | и | N \ < \ G j, то G / N и N-разрешимые группы по индукции, значит G - разрешимая группа, противоречие.

Следовательно, G - простая группа. Поскольку 3^ - наследственный класс по лемме 3.4, то все собственные подгруппы в группе G разрешимы.

Так как G - простая З'-группа, то $G \simeq Sz(2^{2ltl+1})$, $m \geq$ I, но лемме 2.10. По лемме 4.1 группа Сузуки $Sz(q)$, $q = 2^{3п1+|}$, $m >$ I, принадлежит £„ \ Т$_{п_ь}$ где $n = q^2$ (q - 1). Поэтому $n > q^l$ {q - 1) = $4^{2m'}$ $^l(2^{2tll'}$ $^{'1}$ - 1) >
≥ 4^3-7 - 448. Противоречие.

Следовательно, допущение неверно и если З'-гругша O принадлежит классу ЗЕ$_П$, при $n \leq 447$, то G - разрешимая группа. Лемма доказана.

4.3. ЛЕММА. Пусть G - примитивная разрешимая группа. Тогда$G =[E]M_{p^a}$, где < G. $M E_{p^a} \leq_{max} G$,
$core_c$, M - E и справедливы следующие утверждения:

1) если а е {2, 3, 4}, то $d(G) \leq 3 + a$\
2) если а е {5, 6, 7}, то $d(G) < 8$;
3) если а е {8, 9}, то $d(G)$ < 1 + а;
4) если а е {10,...,17}, то $d(G)$ < 11;
5) если а е {18,...,25}, то $d(G)$ < 12 ;
6) если а е {26,...,33}, то $d(G)$ < 13 ;
7) если а е {34,...,65}, то $d(G)$ < 14;
8) если а≥ 66, то $d(G) \leq 1 + 5\log_2$ (а - 2) -+■ 53/10.

В частности, $d(G) \leq a <$ 3. Если а≥ 7, то $d(G) \leq$ 1 + а. Если а > 10, то $d(G)$ < 1 + а.

Кроме того, если G - группа нечётного порядка, то справедливы следующие утверждения:

9) если а е {1,2}, то $d(G)$ < 2;
10) если а е {3,4}, то $d(G)$ < 3;
11) если $5\text{-}T \leq$ а < \ $5 - T$, то $d(G)$ < 2х + 4;
12) если 15-7* ≤ а < 5-7*' то, $d(G)$ < 2х + 5.

Доказательство. Так как G - примитивная разрешимая группа, то по лемме 2.4 имеем $G\sim[E_{p}„] h 4$,
где $E_{p^a} < G, M <_{\max} G$, $corec\ M = E$. Теперь, подгруппа M изоморфна разрешимой неприводимой подгруппе группы $GL(a, p)$, поэтому M е $21^{p(a)}$. 'Значит, G е $21^{pl\ и)H}$ и $d(G) \leq$ 1 i $p(a)$. Подставляя значения для $p(a)$ из леммы 2.11, а в случае, когда группа G имеет нечётный порядок, то из леммы 2.12, в неравенство $d(G) \leq 1 + p(a)$, получаем утверждения леммы. Лемма доказана.

4.4. ЛЕММА. Пусть G - примитивная З'-rpytma, принадлежащая классу Т$_п$, где $n \leq 447$. Тогда G ^$[E$^$]M$, а < 9, и справедливы следующие утверждения:

1) если a е {2, 3, 4}, то $d(G)$ < 3 + а;
2) если a е {5, 6, 7}, то $d(G)$ < 8;
3) если a е {8, 9}, то $d(G)$ < 1 л a.

Доказательство. Так как G - примитивная З'-группа, принадлежащая классу ЗЕ$_{Г1}$ и п ≤ 447, то по лемме 4,2 группа G разрешима и, следовательно, выполняются все условия леммы 3.5. Таким образом, $G \simeq [E_p]M$ и а < 9. Теперь, применяя лемму 4.3, получаем наше утверждение. Лемма доказана.

4.5. ЛЕММА. Пусть G примитивная группа нечётного порядка, принадлежащая классу Т$_п$, где $n \leq 447$. Тогда $G \simeq [E_p] M$, $a < 6$, и справедливы следующие утверждения:

1) если а е (1,2}, то $d(G) < 2$;

2) если $\alpha \in \{3, 4\}$, то $d(G) \le 3$;

3) если $\alpha \in \{5, 6\}$, то $d(G) \le 4$.

Доказательство. Группа G разрешима по теореме Фейта –Томпсона. Так как G – примитивная разрешимая группа, принадлежащая классу $\mathfrak{X}_n$, где $n \le 447$, то, применяя лемму 3.5, получаем, что $G = [E_{p^\alpha}]M$ и $\alpha \le 9$. Так как G – группа нечётного порядка, то $\alpha \le 6$. Теперь подгруппа M изоморфна неприводимой разрешимой подгруппе нечётного порядка группы $GL(\alpha, p)$, поэтому $M \in \mathfrak{A}^{\sigma(\alpha)}$. Значит, $G \in \mathfrak{A}^{\sigma(\alpha)+1}$ и $d(G) \le 1 + \sigma(\alpha)$, причём значения для $\sigma(\alpha)$ берутся из леммы 2.12. Следовательно, если $\alpha \in \{1, 2\}$, то $\sigma(\alpha) = 1$ и $d(G) \le 2$. Если $\alpha \in \{3, 4\}$, то $\sigma(\alpha) = 2$ и $d(G) \le 3$. Если $\alpha \in \{5, 6\}$, то неравенства $5 \cdot 7^x \le \alpha < 15 \cdot 7^x$ выполняются только при $x = 0$, следовательно, $\sigma(\alpha) = 3$ и $d(G) \le 4$. Лемма доказана.

4.6. ЛЕММА. Пусть G – примитивная 3'-группа нечётного порядка, принадлежащая классу $\mathfrak{X}_n$, где $n \le 447$. Тогда $G = [E_{p^\alpha}]M$, $\alpha \le 4$ и справедливы следующие утверждения:

1) если $\alpha \in \{1, 2\}$, то $d(G) \le 2$;

2) если $\alpha \in \{3, 4\}$, то $d(G) \le 3$.

Доказательство. Пусть p – наименьший простой делитель порядка группы G. Тогда $p \ge 5$ и $5^4 = 625 \ge 447$. По лемме 3.5, получаем, что $G = [E_{p^\alpha}]M$ и $\alpha \le 4$. Теперь, применяя лемму 4.5, получаем наше утверждение. Лемма доказана.

4.7. ЛЕММА. Пусть G – разрешимая группа и $|G| \le 447$. Тогда $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^4$. Кроме того, если G – 3'-группа, то $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^2$. Если G – группа нечётного порядка, то $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}$.

Доказательство. Пусть G – разрешимая группа наименьшего порядка, не принадлежащая $\mathfrak{N}\mathfrak{A}^4$, и $|G| \le 447$. Так как для любой не единичной нормальной подгруппы N группы G факторгруппа G / N разрешима и $|G / N| < |G|$, то $G / N \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^4$, а по лемме 2.21, $\mathfrak{N}\mathfrak{A}^4$ – насыщенная формация. Следовательно, выполняются все условия леммы 2.20, и G – примитивная группа. Таким образом, G – разрешимая примитивная группа, у которой порядок не превышает числа 447. Применяя лемму 2.4, получаем $G = [F(G)] M$, где M – примитиватор группы G. Таким образом, нам нужно рассмотреть следующие случаи:

1) порядок группы G есть простое число. Тогда $G \in \mathfrak{A}$;

2) $F(G) \cong Z_p$. Тогда $M \le Z_{p-1}$ и $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}$;

3) $F(G) \cong E_{p^2}$. Тогда M – неприводимая разрешимая подгруппа из $GL(2, p)$. По лемме 2.11 $M \in \mathfrak{A}^4$ и, следовательно, $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^4$;

4) $F(G) \cong E_{p^3}$. Тогда $M \le GL(3, p)$. Если $p \ge 7$, то $|M| = \frac{|G|}{p^3} \le \frac{|G|}{7^3} < 2$, противоречие. Поэтому $p \in \{2, 3, 5\}$ и возможны следующие варианты:

4.1) $p = 2$. Тогда $M \le GL(3, 2) \cong PSL(2, 7)$. Разрешимыми подгруппами в $PSL(2, 7)$ с $O_2(M) = E$ являются Z_7, Z_3, D_6, $[Z_7]Z_3$. Поэтому $M \in \mathfrak{A}^2$ и $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^2$;

4.2) $p = 3$. Тогда $M \le GL(3, 3)$ и $|M| \le 16$. Очевидно, что $M \in \mathfrak{A}^2$ при $|M| \ne 12$. При $|M| = 12$ получаем, что $M \cong A_4$ и $M \in \mathfrak{A}^2$. Значит $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^2$;

4.3) $p = 5$. Тогда $|M| \le 3$ и $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}$.

5) $F(G) \cong E_{p^4}$. Тогда $M \le GL(4, p)$. Очевидно, $p \in \{2, 3\}$ и получаем следующие варианты:

5.1) $p = 2$. Тогда $|M| \le 27$ и $M \in \mathfrak{A}^2$, значит $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^2$;

5.2) $p = 3$. Тогда $|M| \le 5$ и $M \in \mathfrak{A}$, значит $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}$.

6) $F(G) \cong E_{p^5}$. Тогда $M \le GL(5, p)$. Очевидно, $p \in \{2, 3\}$ и получаем:

6.1) $p = 2$. Тогда $|M| \le 13$ и $M \in \mathfrak{A}^2$, значит $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^2$.

6.2) $p = 3$. Тогда $|M| \le 1$, противоречие.

7) $F(G) \cong E_{p^6}$. Тогда $M \le GL(6, p)$. Очевидно, $p = 2$. Тогда $|M| \le 6$ и $M \in \mathfrak{A}^2$, значит $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^2$.

8) $F(G) \cong E_{p^7}$. Тогда $p = 2$, $|M| \le 3$ и $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}$.

9) $F(G) \cong E_{p^8}$. Тогда $p = 2$ и $|M| = 1$, противоречие.

10) $F(G) \cong E_{p^n}$, $n \ge 9$. Так как $2^9 > 447$, то этот случай невозможен.

Следовательно, других вариантов нет и всегда $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^4$.

Теперь, используя индукцию по порядку группы, покажем, что все 3′-группы порядка, не превосходящего 447, принадлежат формации $\mathfrak{N}\mathfrak{A}^2$. Пусть G – контрпример минимального порядка. По условию группа G разрешима, а по леммам 2.20 и 2.21 группа G примитивна. Значит, $G=[E_{p^n}]M$. Если $n = 1$, то M циклическая и $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}$. Если $n = 2$, то по лемме 3.7 получаем, что $d(M) \le 2$ и $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^2$. Пусть $n \ge 3$. Если $p \ge 5$, то

$$|M| = \frac{|G|}{|E_{p^n}|} \le \frac{|G|}{5^3} \le \frac{447}{125} < 4$$

и $M \in \mathfrak{A}^2$, значит $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^2$. Следовательно, $p < 5$, а так как G – 3′-группа, то $p = 2$. Теперь, $|M| = \frac{|G|}{2^n} \le \frac{447}{2^4} < 28$. Так как M – 3′-группа, то или $|M| \in \{8, 10, 14, 16, 20, 22, 26\}$, или $|M|$ является простым числом, или $|M|$ является квадратом простого числа. В первом случае получаем, что $M \in \mathfrak{A}^2$, а в двух других случаях – $M \in \mathfrak{A}$. Поэтому всегда $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^2$.

Теперь, используя индукцию по порядку группы G, покажем, что все группы нечётного порядка, не превосходящего 447, принадлежат $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$. Пусть G – контрпример минимального порядка. По условию группа G разрешима, а по леммам 2.20 и 2.21 группа G примитивна. Значит, $G=[E_{p^n}]M$. Если $n \le 2$, то по лемме 2.12 подгруппа M абелева и $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}$. Пусть $n \ge 3$. Если $p \ge 5$, то

$$|M| = \frac{|G|}{|E_{p^n}|} \le \frac{|G|}{5^3} \le \frac{447}{125} < 4$$

и M абелева, значит, $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}$. Пусть р = 3. Тогда $|M| = \frac{|G|}{3^n} \le \frac{447}{3^3} < 17$, а так как порядок M нечётен, то снова M абелева, значит $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}$. Лемма доказана.

4.8. ЗАМЕЧАНИЕ. В пункте 3 доказательства леммы 4.7 оценку снизить нельзя, так как при $p = 3$ и $|M| = 48$ получаем, что $M \cong GL(2, 3)$ и $M \in \mathfrak{A}^4$.

4.9. ЛЕММА. Пусть G – примитивная разрешимая группа, принадлежащая классу $\mathfrak{X}_{447}$. Тогда $G \in \mathfrak{N}^2\mathfrak{A}^4$. Кроме того, если G – 3'-группа, то $G \in \mathfrak{N}^2\mathfrak{A}^2$. Если G – группа нечётного порядка, то $G \in \mathfrak{N}^2\mathfrak{A}$.

Доказательство. Так как G – примитивная разрешима группа, принадлежащая классу $\mathfrak{X}_{447}$, то из леммы 3.5 следует, что $G = [E_{p^\alpha}]M$, где $E_{p^\alpha} \triangleleft G$, $M <_{max} G$, $core_G M = E$ и для группы G возможны следующие варианты:

1) $\alpha = 1$, $M = E$ и $G = Z_p$;

2) $\alpha = 1$, $M \ne E$ и $G = [Z_p] Z_{n_1}$, где $Z_{n_1} = M$ и n_1 делит $(p - 1)$, $2 \le n_1 \le 447$;

3) $\alpha \ge 2$, $M \ne E$ и $G=[E_{p^\alpha}]M$, $p^{\alpha-1} \le 447$, $2 \le |M| \le 447$.

Так как $|M| \le 447$ и M – разрешимая группа, то применяя лемму 4.7 получаем, что $M \in \mathfrak{N}\mathfrak{A}^4$. Кроме того, $F(G) \in \mathfrak{N}$, следовательно, $G \in \mathfrak{N}^2\mathfrak{A}^4$. Если G – 3'-группа, то, применяя соответствующее утверждение леммы 4.7, получаем, что $G \in \mathfrak{N}^2\mathfrak{A}^2$. Если G – группа нечётного порядка, то из леммы 4.7 следует, что $G \in \mathfrak{N}^2\mathfrak{A}$. Лемма доказана.

4.10. ЛЕММА. Пусть G – 3'-группа, принадлежащая классу $\mathfrak{X}_{447}$. Тогда $G \in \mathfrak{N}^2\mathfrak{A}^2$. Кроме того, если группа G имеет нечётный порядок, то $G \in \mathfrak{N}^2\mathfrak{A}$.

Доказательство. Так как G – 3'-группа, принадлежащая классу $\mathfrak{X}_{447}$, то по лемме 4.2 она разрешима. Пусть G – группа наименьшего порядка, не принадлежащая $\mathfrak{N}^2\mathfrak{A}^2$ и удовлетворяющая условию леммы. Так как для любой не единичной нормальной подгруппы N группы G факторгруппа G / N разрешима и $|G / N| < |G|$, то $G / N \in \mathfrak{N}^2\mathfrak{A}^2$, а по лемме 2.21, $\mathfrak{N}^2\mathfrak{A}^2$ – насыщенная формация. Следовательно, выполняются все условия леммы 2.20, и G – примитивная группа. Таким образом, G – разрешимая примитивная 3'-группа, принадлежащая классу $\mathfrak{X}_{447}$. Применяя лемму 4.9, получаем $G \in \mathfrak{N}^2\mathfrak{A}^2$, если же группа G имеет нечётный порядок, то $G \in \mathfrak{N}^2\mathfrak{A}$. Лемма доказана.

4.11. *Доказательство* теоремы. Пусть G – группа порядка, не делящегося на 3, и для любой подгруппы H из G выполняется неравенство $|H / core_G H| \le 447$. По лемме G разрешима, а по лемме 4.10 группа $G \in \mathfrak{N}^2\mathfrak{A}^2$. Поэтому нильпотентная длина группы G не превышает 4. Кроме того, если G – группа нечётного порядка, то по лемме 4.10 группа $G \in \mathfrak{N}^2\mathfrak{A}$ и нильпотентная длина группы G не превышает 3. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Huppert B. Endliche Gruppen, I. - Berlin, Heidelberg. - New York. - 1967. - 792 s.
2. Монахов В.С. Введение в теорию конечных групп и их классов. - Гомель, 2003. - 319 с.
3. Беркович Л.Г. Конечные группы с большими ядрами максимальных подгрупп // Сиб. матем. ж. - 1968. - Т. IX, № 2. - С. 243 - 248.
4. Dixon Г, Poland J., Rhemtulla A. A Generalization of Hamiltonian and Nilpotent Groups // Math. Zeit. - 1969. -Vol. 112.-P.335 -339.
5. Poland J. On Finite Groups whose Subgroups have Simple Core Factors // Proc. Japan. Acad. - 1971.- Vol. 47. - P. 606-610.
6. Огарков Е.Т. Конечные группы с определёнными свойствами кофакторов // Весцi АН Беларусь Сер. фiз.-матэм. навук. - 1974, -№ 3. - С. 118 - 120.
7. Cutolo G., Khukhro E.I., Lennox J.C., and Wiegold J., Rinauro S. and Smith H. Finite core-p p-groups //J. Algebra. - 1997.-Vol. 188. - P.701 - 719.
8. Пальчик Э.М. О конечных s'-свободных группах // Доклады АН БССР - 1976. - Т. 20, № 12. - С. 1061 - 1063.
9. Старостин А.И. О группах Фробениуса // Укр. матем. ж. - 1971. - Т. 23, № 5. - С. 629 - 639.
10. Suzuki M. Ona class of doubly transitive groups // I, II. Ann. Math. - 1962. - Vol. 75, P. 105 - 145; 1964.-Vol. 79.-P.514 -589.
11. Горенстейн Д. Конечные простые группы. Введение в их классификацию. - М.: Мир, 1985. - С. 352.
12. Zassenhaus H. Beweis eines Zatzes Liber diskrete Gruppen // Abhandl Math. Seminar Hamburg Univ. - 1938. № 12.-P.289-312.
13. Dixon J. D. The solvable length of a solvable linear groups // Math. Z. - 1968. - № 12, P. 151 - 158.
14. Newman M. F. The solvable length of a solvable linear groups //Math. Z. № 126. - 1972. - P. 59 70.
15. Palfy P. P. Bounds for linear groups of odd order // Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl. 1990. - № 23. - P. 253 -263.
16. Gaschutz W. Lectures of subgroups of Sylow type in finite soluble groups // Notes on pure mathematics (Canberra, Australian National University). - 1979. - № 11. -P. 100.
17. Супруненко Д.А. Группы матриц. - М.: Наука, 1972. - 351 с.
18. Монахов В.С., Селькин М.В., Грибовская Е.Е. О разрешимых нормальных подгруппах конечных групп // Укр. мат. журн. - 2002. - Т. 54, № 7. - С. 940 - 950.