# *МАТЕМАТИКА*

**УДК 512.542**

## К ТЕОРИИ КРИТИЧЕСКИХ ω-НАСЫЩЕННЫХ ФОРМАЦИЙ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

***канд. физ.-мат. наук И.Н. САФОНОВА***
***(Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины)***

*Дается описание минимальных $\omega$-насыщенных не $\mathfrak{H}$-формаций, в случае когда $\mathfrak{H}$ одна из следующих формаций классического типа: формация всех конечных $\pi$-разложимых групп, где $\pi$ – некоторое непустое множество простых чисел; формация всех конечных $\varphi$-дисперсивных групп, где $\varphi$ – некоторое линейное упорядочение множества всех простых чисел.*

Рассматриваются только конечные группы. Мы будем придерживаться терминологии, принятой в [1 – 4]. Пусть $\omega$ – некоторое непустое подмножество множества всех простых чисел; $\omega'$ – дополнение к $\omega$ во множестве всех простых чисел. Напомним некоторые определения, введенные в работе [4]. Символом $G_{\omega d}$ обозначается наибольшая нормальная в $G$ подгруппа, у которой каждый композиционный фактор является $\omega d$-группой (если таких подгрупп в $G$ нет, то полагают $G_{\omega d}=1$). Функция вида $f:\omega\bigcup\{\omega'\}\to\{$формации$\}$ называется $\omega$-локальным спутником. Через $LF_{\omega}(f)$ обозначается класс всех таких групп $G$, что $G/G_{\omega d}\in f(\omega')$ и $G/F_p(G)\in f(p)$ для любого $p\in\omega\bigcap\pi(G)$. Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F}=LF_{\omega}(f)$, то говорят, что $f$ – $\omega$-локальный спутник формации $\mathfrak{F}$, а формация $\mathfrak{F}$ – $\omega$-насыщенная. В дальнейшем через $\pi$ будем обозначать некоторое непустое множество простых чисел, $\pi'$ – дополнение к $\pi$ во множестве всех простых чисел.

В теории насыщенных формаций важную роль играют так называемые минимальные насыщенные не $\mathfrak{H}$-формации [5] (или иначе $\mathfrak{H}_l$-критические формации [6]), т.е. такие насыщенные формации $\mathfrak{F}\not\subset\mathfrak{H}$, все собственные насыщенные подформации которых содержатся в классе групп $\mathfrak{H}$. Общая задача изучения такого рода формаций впервые была поставлена Л.А. Шеметковым в его докладе на VI симпозиуме по теории групп [5]. Решению этой проблемы посвящен цикл работ А.Н. Скибы 1980 – 1993 гг. Завершающий результат в этом направлении достигнут в работе [7], где описаны минимальные насыщенные не $\mathfrak{H}$-формации для случая, когда $\mathfrak{H}$ – произвольная формация классического типа (формация $\mathfrak{H}$ называется формацией классического типа, если она имеет такой локальный экран, все неабелевы значения которого являются насыщенными формациями). Результаты о минимальных насыщенных не $\mathfrak{H}$-формациях использовались при решении многих вопросов теории насыщенных формаций [2, 3].

Изучению и классификации минимальных $\omega$-насыщенных не $\mathfrak{H}$-формаций посвящены работы [8 – 14]. В работе [12] автором данной заметки была доказана следующая теорема, охватывающая все отмеченные выше результаты.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathfrak{H}$ – некоторая формация классического типа и $h$ – ее максимальный внутренний локальный экран. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной $\omega$-насыщенной не $\mathfrak{H}$-формацией, когда $\mathfrak{F}=l^{\omega}\operatorname{form}G$, где $G$ – такая монолитическая группа с монолитом $P=G^{\mathfrak{H}}$, что либо $\tau=\pi(P)\bigcap\omega=\varnothing$, либо $\tau\neq\varnothing$ и выполняется одно из следующих условий:

1) $G=P$ – группа простого порядка;

2) $P$ – неабелева группа и $P=G^{h(p)}$ для любого $p\in\tau$;

3) $G=[P]H$, где $P=C_G(P)$ – $p$-группа, а $H$ – такая монолитическая группа с монолитом $Q=H^{h(p)}$, что $p\notin\pi(Q)$ и либо $\Phi(H)=1$ и $H^{h(q)}\subseteq Q$ для любого $q\in\pi(Q)$, либо $H$ – минимальная не $h(p)$-группа одного из следующих типов:

а) циклическая примарная группа;

б) группа кватернионов порядка 8;

в) неабелева группа порядка $q^3$ простой нечетной экспоненты $q$.

Работа [14] посвящена приложению данного результата при описании минимальных $\omega$-насыщенных не $\mathfrak{H}$-формаций, в случае когда $\mathfrak{H}$ – одна из следующих формаций классического типа: формация всех $\pi$-разрешимых, $\pi$-нильпотентных и $\pi$-сверхразрешимых групп, где $\pi$ – некоторое непустое множество простых чисел. В данном сообщении мы применим теорему 1 для описания минимальных $\omega$-насыщенных не $\mathfrak{H}$-формаций, в случае когда $\mathfrak{H}$ одна из формаций: формация всех $\pi$-разложимых групп; формация всех $\varphi$-дисперсивных групп, где $\varphi$ – некоторое линейное упорядочение множества всех простых чисел.

ЛЕММА 1 [9]. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ – минимальная $\omega$-насыщенная ненильпотентная формация, когда $\mathfrak{F} = l^{\omega}\operatorname{form} G$, где $G$ – такая монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{N}}$, что выполняется одно из следующих условий:

1) $G = [P]Q$ – $q$-замкнутая $pd$-группа Шмидта с $\Phi(G) = 1$, где $P = O_p(G)$, $p \in \omega$ и $|Q| = q$ – простое число;

2) $P = G^{\mathfrak{N}_p}$ – неабелева $pd$-группа для некоторого простого числа $p \in \omega$, и если $|\omega \bigcap \pi(P)| > 1$, то $G = P$ – простая неабелева группа;

3) $P$ – $\omega'$-группа.

ЛЕММА 2 [2, с. 75]. Пусть $f_1$ – локальный экран формации $\mathfrak{F}$; $h$ – внутренний локальный экран формации $\mathfrak{H}$. Тогда формация $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ имеет такой локальный экран $f$, что $f(p) = f_1(p)\mathfrak{H}$, если $p \in \pi(\mathfrak{F})$ и $f(p) = h(p)$, если $p \in \pi'(\mathfrak{F})$.

**1. Минимальные $\omega$-насыщенные не $\pi$-разложимые формации.**

Пусть $\pi$ – некоторое непустое множество простых чисел; $\pi'$ – дополнение к $\pi$ во множестве всех простых чисел. Как известно, группа называется:

а) $\pi$-специальной, если она обладает нильпотентной нормальной $\pi$-холловской подгруппой;

б) $\pi'$-замкнутой, если она имеет нормальную $\pi'$-холловскую подгруппу;

в) $\pi$-разложимой, если она одновременно $\pi$-специальна и $\pi'$-замкнута.

1.1. ТЕОРЕМА. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ – минимальная $\omega$-насыщенная не $\pi$-разложимая формация, когда $\mathfrak{F} = l^{\omega}\operatorname{form} G$, где $G$ – такая монолитическая группа с монолитом $P$, что $\pi(G) \bigcap \pi \neq \varnothing$ и либо $\tau = \pi(P) \bigcap \omega = \varnothing$ и $P$ совпадает с $\pi$-разложимым корадикалом группы $G$, либо $\tau \neq \varnothing$ и выполняется одно из следующих условий:

1) $P$ – неабелева группа, причем если $\tau \subseteq \pi'$, то $G/P$ – $\pi'$-группа, если $\tau = \{p\} \subseteq \pi$, то $G/P$ – $p$-группа, если же $\tau \bigcap \pi \neq \varnothing$ и $|\tau| > 1$, то $G = P$ – простая неабелева группа;

2) $G$ – группа Шмидта;

3) $G = [P]H$, где $P = C_G(P)$ – минимальная нормальная подгруппа группы $G$; $H$ – простая неабелева группа, причем $\pi \bigcap \pi(H) = \varnothing$.

***Доказательство.*** Пусть $\mathfrak{H}$ – формация всех $\pi$-разложимых групп; $h$ – ее максимальный внутренний локальный экран. Хорошо известно [2, с. 182], что $h(p) = \mathfrak{N}_p$ для всех $p \in \pi$ и $h(p) = \mathfrak{G}_{\pi'}$ для всех $p \in \pi'$.

*Необходимость.* Пусть $\mathfrak{F}$ – минимальная $\omega$-насыщенная не $\pi$-разложимая формация. По теореме 1 $\mathfrak{F} = l^{\omega}\operatorname{form} G$, где $G$ – такая монолитическая группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, что либо $\tau = \pi(P) \bigcap \omega = \varnothing$, либо $\tau \neq \varnothing$ и выполняется одно из следующих условий:

1) $P$ – неабелева группа и $P = G^{h(p)}$ для любого $p \in \tau$;

2) $G = [P]H$, где $P = C_G(P)$ – $p$-группа, а $H$ – такая монолитическая группа с монолитом $Q = H^{h(p)}$, что $p \notin \pi(Q)$ и либо $\Phi(H) = 1$ и $H^{h(q)} \subseteq Q$ для любого $q \in \pi(Q)$, либо $H$ – минимальная не $h(p)$-группа одного из следующих типов:

а) циклическая примарная группа;

б) группа кватернионов порядка 8;

в) неабелева группа порядка $q^3$ простой нечетной экспоненты $q$.

Пусть для группы $G$ выполняется условие 1. Если $\pi(P) \bigcap \pi = \varnothing$, то $G/P \in h(p) = \mathfrak{G}_{\pi'}$ и мы получаем, что $G$ – $\pi'$-группа. Значит, $G$ – $\pi$-разложима. Противоречие. Поэтому $\pi(P) \bigcap \pi \neq \varnothing$. Допустим, что $\tau \subseteq \pi'$ и пусть $p \in \tau$. Тогда $G/P \in h(p) = \mathfrak{G}_{\pi'}$ и группа $G$ удовлетворяет условию 1 теоремы. Если $\tau = \{p\} \subseteq \pi$, то $G/P \in h(p) = \mathfrak{N}_p$ и снова получаем, что группа $G$ также удовлетворяет условию 1 теоремы. Пусть теперь $\tau \cap \pi \neq \varnothing$ и $|\tau| > 1$. Тогда если $p \in \tau \cap \pi$ и $q \in \tau$, $q \neq p$, то при $q \in \pi$,

$$G/P \in h(p) \cap h(q) = \mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{N}_q = (1),$$

если же $q \in \pi'$, то

$$G/P \in h(p) \cap h(q) = \mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{G}_{\pi'} = (1).$$

Но $P$ – монолит группы $G$. Значит, $G = P$ – простая неабелева группа.

Таким образом, в любом из возможных случаев группа $G$ удовлетворяет условию 1 теоремы.

Пусть теперь для группы $G$ выполняется условие 2. Если $p \in \pi'$, то $h(p) = \mathfrak{G}_{\pi'}$. Тогда поскольку $Q = H^{h(p)}$, то $H/Q \in \mathfrak{G}_{\pi'}$ и $Q$ – $\pi$-группа. Так как $H$ – $\pi$-специальная группа, то $Q$ – абелева $q$-группа ($q \in \pi$). Следовательно, по условию имеем $h(q) = \mathfrak{N}_q$. Но тогда

$$H/Q \in h(p) \cap h(q) = \mathfrak{G}_{\pi'} \cap \mathfrak{N}_q = (1).$$

А поскольку $Q$ монолит группы $H$, то $H = Q$ – группа порядка $q$. Но тогда группа $G$ удовлетворяет условию 2 теоремы.

Пусть теперь $p \in \pi$. Тогда $h(p) = \mathfrak{N}_p$. Значит, группа $H/Q \in \mathfrak{N}_p$. Пусть $Q$ – абелева $q$-группа. Если $q \in \pi$, то $H/Q \in h(q) = \mathfrak{N}_q$. Значит,

$$H/Q \in h(p) \cap h(q) = \mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{N}_q = (1).$$

Следовательно, $H = Q$ – группа порядка $q$. Поэтому $G$ – группа Шмидта. Если же $q \in \pi'$, то $H/Q \in h(q) = \mathfrak{G}_{\pi'}$. Тогда

$$H/Q \in h(p) \cap h(q) = \mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{G}_{\pi'} = (1).$$

И снова получаем, что $H = Q$ – группа простого порядка $q$ и $G$ – группа Шмидта.

Таким образом, группа $G$ удовлетворяет условию 2 теоремы.

Пусть теперь $Q$ – неабелева группа. Поскольку $H$ – $\pi'$-замкнута, то $Q$ – $\pi'$-группа. Значит, для любого $q \in \pi(Q)$ имеем $h(p) = \mathfrak{G}_{\pi'}$. Следовательно

$$H/Q \in h(p) \cap h(q) = \mathfrak{N}_p \cap \mathfrak{G}_{\pi'} = (1).$$

Поэтому $H = Q$ – простая неабелева группа, $\pi(H) \cap \pi = \varnothing$. Таким образом, группа $G$ удовлетворяет условию 3 теоремы.

*Достаточность.* Пусть $\mathfrak{F} = l^{\omega} \operatorname{form} G$, где $G$ – группа, удовлетворяющая условиям теоремы. Покажем, что тогда $\mathfrak{F}$ – минимальная $\omega$-насыщенная не $\pi$-разложимая формация. Пусть $\tau = \varnothing$. Тогда ввиду того, что $P$ – $\pi$-разложимый корадикал группы $G$, то формация $\mathfrak{F}$, очевидно, удовлетворяет теореме 1. Пусть $\tau \neq \varnothing$ и для группы $G$ выполнено условие 1. Покажем, что $P = G^{h(p)}$ для любого $p \in \tau$. По условию $\pi(G) \cap \pi \neq \varnothing$, поэтому и в силу условия 1, для группы $P$ имеет место $\pi(P) \cap \pi \neq \varnothing$. Далее, так как $h(p) = \mathfrak{N}_p$, для всех $p \in \pi$, и $h(p) = \mathfrak{G}_{\pi'}$ для всех $p \in \pi'$, то $G \notin h(p)$. Но тогда $P = G^{h(p)}$ для любого $p \in \tau$. Значит, по теореме 1 формация $\mathfrak{F}$ является минимальной $\omega$-насыщенной не $\pi$-разложимой формацией.

Пусть теперь $G$ – группа Шмидта. Поскольку по условию $\pi(G) \cap \pi \neq \varnothing$, то группа $G$ не $\pi$-разложима. Ввиду леммы 1 $\mathfrak{F}$ – минимальная $\omega$-насыщенная ненильпотентная формация. Так как при этом формация всех нильпотентных групп $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{H}$, то $\mathfrak{F}$ – минимальная $\omega$-насыщенная не $\pi$-разложимая формация.

Пусть, наконец, группа $G$ удовлетворяет условию 3. Покажем, что $H = H^{h(p)}$, где $p \in \pi(P)$. Ввиду того, что $\pi(G) \cap \pi \neq \varnothing$ и $H$ – простая неабелева $\pi'$-группа, получаем, что $p \in \pi$. Так как $h(p) = \mathfrak{N}_p$, то $H \notin h(p)$. Следовательно, $H = H^{h(p)}$. Поэтому в силу теоремы 1 $\mathfrak{F}$ является минимальной $\omega$-насыщенной не $\pi$-разложимой формацией. Теорема доказана.

В частности, если $\omega = \{p\}$ из доказанной теоремы получаем

1.1. СЛЕДСТВИЕ. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ – минимальная $p$-насыщенная не $\pi$-разложимая формация, когда $\mathfrak{F} = l^p \operatorname{form} G$, где $G$ – такая монолитическая группа с монолитом $P$, что $\pi(G) \cap \pi \neq \varnothing$ и $P$ – $\pi$-разложимый корадикал группы $G$, причем если $p \in \pi(P)$, то выполняется одно из следующих условий:

1) $P$ неабелева $pd$-группа, $G/P$ – $p$-группа;

2) $G$ – группа Шмидта;

3) $G = [P]H$, где $P = C_G(P)$ – минимальная нормальная подгруппа группы $G$; $H$ – простая неабелева группа, причем $\pi(H) \cap \pi = \varnothing$.

В случае, когда $\omega$ – множество всех простых чисел, из теоремы 1.1 вытекает

1.2. СЛЕДСТВИЕ [2, с. 182]. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ – минимальная насыщенная не $\pi$-разложимая формация, когда $\mathfrak{F} = l \operatorname{form} G$, где $G$ – такая монолитическая группа, что $\pi(G) \cap \pi \neq \varnothing$ и выполняется одно из следующих условий:

1) $G$ – простая неабелева группа;

2) $G$ – группа Шмидта;

3) $G = [P]H$, где $P = C_G(P)$ – минимальная нормальная подгруппа группы $G$; $H$ – простая неабелева группа, причем $\pi(H) \cap \pi = \varnothing$.

Кроме того, имеет место

1.3. СЛЕДСТВИЕ. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ – минимальная $\omega$-насыщенная не $p$-разложимая формация, когда $\mathfrak{F} = l^{\omega} \operatorname{form} G$, где $G$ – такая монолитическая $pd$-группа с монолитом $P$, что $P$ совпадает с $p$-разложимым корадикалом группы $G$ и либо $\tau = \pi(P) \cap \omega = \varnothing$, либо $\tau \neq \varnothing$ и выполняется одно из следующих условий:

1) $P$ – неабелева группа, причем если $p \notin \tau$, то $G/P$ - $p'$-группа, если $\tau = \{p\}$, то $G/P$ – $p$-группа, если же $p \in \tau$ и $|\tau| > 1$, то $G = P$ – простая неабелева группа;

2) $G$ – группа Шмидта;

3) $G = [P]H$, где $P = C_G(P)$ – минимальная нормальная $p$-подгруппа группы $G$; $H$ - простая неабелева $p'$-группа.

**2. Минимальные $\omega$-насыщенные не $\varphi$-дисперсивные формации.**

В данном параграфе $\varphi$ – некоторое линейное упорядочение множества всех простых чисел.

Группу $G$ называют $\varphi$-дисперсивной, если она имеет такой ряд нормальных подгрупп

$$1 = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_t = G, \ t \geq 0,$$

что $G_i/G_{i-1}$ – силовская $p_i$-подгруппа в $G/G_{i-1}$ и $p_1 \varphi\ p_2 \varphi \ldots \varphi\ p_t$.

2.1. ТЕОРЕМА. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ – минимальная $\omega$-насыщенная не $\varphi$-дисперсивная формация, когда $\mathfrak{F} = l^{\omega} \operatorname{form} G$, где $G$ – такая не $\varphi$-дисперсивная монолитическая группа с монолитом $P$, что группа $G/P$ $\varphi$-дисперсивна и либо $\tau = \pi(P) \cap \omega = \varnothing$, либо $\tau \neq \varnothing$ и выполняется одно из следующих условий:

1) $P$ – неабелева группа, $G/P$ – $\pi$-группа, где $\pi$ – множество всех таких простых чисел $q$, что $p \varphi\ q$ для любого $p \in \tau$;

2) $G = [P]([Q]N)$, где $P = C_G(P)$ – $p$-группа; $Q = C_{[Q]N}(Q)$ – $q$-группа, являющаяся минимальной нормальной подгруппой в $[Q]N$; группа $[Q]N$ – $\varphi$-дисперсивна; кроме того, $q \varphi\ p$ и $p \varphi\ t$ для любого $t \in \pi(N)$.

***Доказательство.*** Пусть $\mathfrak{H}$ – формация всех $\varphi$-дисперсивных групп; $h$ – ее максимальный внутренний локальный экран. Как известно [2, с. 183], экран $h$ таков, что $h(p)=\mathfrak{S}_{\varphi(p)}\cap\mathfrak{H}$, где $\varphi(p)$ – множество всех таких простых чисел $q$, что $p\varphi\, q$.

*Необходимость.* Пусть $\mathfrak{F}$ – минимальная $\omega$-насыщенная не $\varphi$-дисперсивная формация. В силу теоремы 1 $\mathfrak{F}=l^{\omega}\operatorname{form}G$, где $G$ такая монолитическая группа с монолитом $P=G^{\mathfrak{H}}$, что либо $\tau=\pi(P)\cap\omega=\varnothing$, либо $\tau\neq\varnothing$, и выполняется одно из следующих условий:

1) $P$ – неабелева группа и $P=G^{h(p)}$ для любого $p\in\tau$;

2) $G=[P]H$, где $P=C_G(P)$ – $p$-группа, а $H$ – такая монолитическая группа с монолитом $Q=H^{h(p)}$, что $p\notin\pi(Q)$ и либо $\Phi(H)=1$ и $H^{h(q)}\subseteq Q$ для любого $q\in\pi(Q)$, либо $H$ – минимальная не $h(p)$-группа одного из следующих типов:

а) циклическая примарная группа;

б) группа кватернионов порядка 8;

в) неабелева группа порядка $q^3$ простой нечетной экспоненты $q$.

Ввиду того, что $P=G^{\mathfrak{H}}$, то при $\tau=\varnothing$ группа $G$ удовлетворяет условию теоремы. Пусть $\tau\neq\varnothing$ и $G$ – группа из условия 1. Тогда поскольку $P=G^{h(p)}$ для любого $p\in\tau$ и $h(p)=\mathfrak{S}_{\varphi(p)}\cap\mathfrak{H}$, то $G/P\in\mathfrak{S}_{\varphi(p)}\cap\mathfrak{H}$ для любого $p\in\tau$. Следовательно, $G/P\in\bigcap_{p\in\tau}\mathfrak{S}_{\varphi(p)}$. Обозначим через $\pi$ множество всех таких простых чисел $q$, что $p\varphi\, q$ для любого $p\in\tau$. Тогда $\bigcap_{p\in\tau}\mathfrak{S}_{\varphi(p)}=\mathfrak{S}_{\pi}$. Значит, группа $G/P\in\mathfrak{S}_{\pi}$, т.е. $\pi$ – группа, удовлетворяющая условию 1 теоремы.

Пусть теперь для группы $G$ выполняется условие 2. Поскольку $h(p)$ – насыщенная формация [2, с. 183], то $\Phi(H)=1$. По условию $Q=H^{h(p)}$ и $H^{h(q)}\subseteq Q$ для любого $q\in\pi(Q)$. Так как $H$ – монолитическая $\varphi$-дисперсивная группа, то $Q$ – абелева $q$-группа, $q\neq p$. Ввиду того, что монолит $Q\not\subset\Phi(H)$, имеем $Q=C_H(Q)$ и $H=[Q]N$, для некоторой максимальной в $H$ подгруппы $N$.

Согласно условию $H/Q\in h(p)=\mathfrak{S}_{\varphi(p)}\cap\mathfrak{H}$. Значит, $N\cong H/Q\in\mathfrak{S}_{\varphi(p)}$, т.е. $p\varphi\, t$ для любого $t\in\pi(N)$. Кроме того, поскольку $H\notin h(p)$, то $q\varphi\, p$.

Таким образом, группа $G$ удовлетворяет условию 2 теоремы.

*Достаточность.* Пусть $\mathfrak{F}=l^{\omega}\operatorname{form}G$, где $G$ – группа, удовлетворяющая требованиям теоремы. Тогда если $\tau=\varnothing$, то в силу теоремы 1 формация $\mathfrak{F}$ является минимальной $\omega$-насыщенной не $\varphi$-дисперсивной формацией. Пусть $\tau\neq\varnothing$ и для группы $G$ справедливо условие 1. Тогда $G/P\in\mathfrak{S}_{\pi}=\bigcap_{p\in\tau}\mathfrak{S}_{\varphi(p)}$. Значит, $G/P\in\mathfrak{S}_{\varphi(p)}\cap\mathfrak{H}=h(p)$ для любого $p\in\tau$, т.е. группа $G$ удовлетворяет условию 1 теоремы 1. Поэтому $\mathfrak{F}$ – минимальная $\omega$-насыщенная не $\varphi$-дисперсивная формация.

Пусть теперь $G$ – группа из условия 2 теоремы. Обозначим через $H$ группу $[Q]N$. Тогда ввиду того, что группа $H$ – $\varphi$-дисперсивна, то

$$H/C_H(Q)=H/Q\in h(q)=\mathfrak{N}_q h(q),$$

т.е. $H^{h(q)}=1\subseteq Q$. Покажем, что тогда $Q=H^{h(p)}$. По условию $p\varphi\, t$ для любого $t\in\pi(N)$. Это означает, что $\pi(N)\subseteq\varphi(p)$. Поэтому $\mathfrak{S}_{\pi(N)}\subseteq\mathfrak{S}_{\varphi(p)}$. Но тогда, поскольку $H\in\mathfrak{H}$, имеем

$$H/Q\cong N\in\mathfrak{S}_{\pi(N)}\cap\mathfrak{H}\subseteq\mathfrak{S}_{\varphi(p)}\cap\mathfrak{H}=h(p).$$

Так как при этом $q\varphi\, p$, то $H\notin h(p)$. Значит, $Q=H^{h(p)}$.

Таким образом, группа $G$ удовлетворяет условию 2 теоремы 1. Следовательно, $\mathfrak{F}$ – минимальная $\omega$-насыщенная не $\varphi$-дисперсивная формация. Теорема доказана.

В частности, при $\omega=\{p\}$ из теоремы 2.1 получаем

2.1. СЛЕДСТВИЕ. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ – минимальная $p$-насыщенная не $\varphi$-дисперсивная формация, когда $\mathfrak{F}=l^{p}\operatorname{form}G$, где $G$ – такая не $\varphi$-дисперсивная монолитическая группа с монолитом $P$, что группа $G/P$ $\varphi$-дисперсивна, причем, если $p \in \pi(P)$, то выполняется одно из следующих условий:

1) $P$ – неабелева группа; $G/P$ – $\pi$-группа, где $\pi$ – множество всех таких простых чисел $q$, что $p\varphi q$;

2) $G = [P]([Q]N)$, где $P = C_G(P)$ – $p$-группа; $Q = C_{[Q]N}(Q)$ – $q$-группа, являющаяся минимальной нормальной подгруппой в $[Q]N$; группа $[Q]N$ – $\varphi$-дисперсивна; кроме того, $q\varphi\, p$ и $p\varphi\, t$ для любого $t \in \pi(N)$.

В случае, когда $\omega$ – множество всех простых чисел, из теоремы 2.1 вытекает

2.2. СЛЕДСТВИЕ [2, с. 183]. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ – минимальная насыщенная не $\varphi$-дисперсивная формация, когда $\mathfrak{F} = l\,\mathrm{form}\,G$, где $G$ – такая монолитическая группа с монолитом $P$, что выполняется одно из следующих условий:

1) $P$ – неабелева группа, факторгруппа $G/P$ $\varphi$-дисперсивна и $G/P$ – $\pi$-группа, где $\pi$ – множество всех таких простых чисел $q$, что $p\varphi\, q$ для любого $p \in \pi(P)$;

2) $G = [P]([Q]N)$, где $P = C_G(P)$ – $p$-группа; $Q = C_{[Q]N}(Q)$ – $q$-группа, являющаяся минимальной нормальной подгруппой в $[Q]N$; группа $[Q]N$ – $\varphi$-дисперсивна; кроме того, $q\varphi\, p$ и $p\varphi\, t$ для любого $t \in \pi(N)$.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Шеметков Л.А, Формации конечных групп. - М.: Наука, 1978. - 267 с.
2. Шеметков Л.А., Скиба А.Н. Формации алгебраических систем. - М: Наука, 1989. - 253 с.
3. Скиба А.Н. Алгебра формаций. - Ми.: Беларуская навука, 1997. - 240 с.
4. Скиба А.Н., Шеметков Л.А, Кратно $\omega$-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп // Математические труды. - 1999. - Т. 2, № 2. - С. 114- 147.
5. Шеметков Л.А. Экраны ступенчатых формаций // Тр. VI Всесоюзн. симпозиума по теории групп. - Киев; Наукова думка, 1980. - С. 37 -50.
6. Скиба А.Н. О критических формациях // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. - 1980. - № 4. - С. 27 -33.
7. Скиба А.Н. О критических формациях // В кн.: Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. - Киев: Ин-т математики АН Украины, 1993. С. 258 -268.
8. Джарадин Джехад. Минимальные $p$-насыщенные ненильпотентные формации // Вопросы алгебры. Гомель: Изд-во Гомельского ун-та. -- 1995. - Вып. 8. ~ С. 59-64.
9. Джарадин Джехад. Классификация $p$-локальных формаций длины < 3 : Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.06/ Гом. гос. ун-т. - Гомель, 1996. - 16 с.
10. Рыжик В.Н. О критических $p$-локальных формациях. - Гомель, 1997. - 12 с. (Препринт / Гомельский гос. ун-т; № 58).
11. Сафонова И.Н. О минимальных $\omega$-локальных несверхразрешимых формациях // Вопросы алгебры. Гомель: Изд-во ГГУ им. Ф. Скорины, 1998. - Вып. 12. - С. 123 130.
32. Сафонова И.Н. О минимальных $\omega$-локальных не $p$-формациях // Весці НАН Беларусь Сер. фіз.-мат. навук. - 1999. - № 2. - С. 23 - 27.
13. Сафонова И.Н. О существовании $\mathfrak{H}_\omega$-критических формаций // Известия Гомельского гос. ун-та. – 1999. – № 1 (15). Вопросы алгебры. – С. 118 – 126.
14. Сафонова И.Н. К теории $\mathfrak{H}_{1\omega}$-критических формаций конечных групп // Известия Гомельского гос. ун-та. – 2001. – № 3 (17). Вопросы алгебры. – С. 124 – 133.