УДК 517.926, 517.977

© **А. А. Козлов**

КРИТЕРИЙ РАВНОМЕРНОЙ ГЛОБАЛЬНОЙ ДОСТИЖИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

В статье рассматривается линейная нестационарная управляемая система с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad t \geqslant 0. \tag{1}$$

Управление в системе (1) строится по принципу линейной обратной связи $u = U(t)x$ с измеримой и ограниченной матричной функцией $U(t)$, $t \geqslant 0$. Для замкнутой системы

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U(t))x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{2}$$

устанавливается критерий ее равномерной глобальной достижимости. Это свойство означает существование такого $T > 0$, что для всяких положительных чисел α и β найдется $d = d(\alpha, \beta) > 0$, обеспечивающее при всяком $t_0 \geqslant 0$ и произвольной $(n \times n)$-матрице H, $\|H\| \leqslant \alpha$, $\det H \geqslant \beta$, возможность построения измеримого на $[t_0, t_0 + T]$ матричного управления $U(\cdot)$, для которого справедлива оценка $\sup\limits_{t \in [t_0, t_0+T]} \|U(t)\| \leqslant d$ и равенство $X_U(t_0 + T, t_0) = H$, где X_U — матрица Коши системы (2). Доказательство критерия основано на полученной в работе теореме о представлении всякой $(n \times n)$-матрицы с положительным определителем в виде произведения девяти верхне- и нижнетреугольных матриц с положительными диагональными элементами и дополнительными условиями на норму и определитель этих матриц.

Ключевые слова: линейная управляемая система, матрица Коши, равномерная глобальная достижимость.

DOI: 10.20537/2226-3594-2018-52-04

Введение

Для произвольного фиксированного натурального числа n обозначим через $\mathbb{R}^n$ вещественное евклидово векторное пространство размерности n с нормой $\|x\| = \sqrt{x^T x}$ (здесь символ ^{T} означает операцию транспонирования вектора или матрицы), а через e_1, e_2, …, e_n — векторы (столбцы) канонического ортонормированного базиса этого пространства. Пусть M_{mn} — пространство вещественных матриц размерности $m \times n$ со спектральной (операторной) нормой $\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$, т. е. нормой, индуцируемой на M_{mn} евклидовыми нормами в пространствах $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$; $\mathrm{M}_{nn} := \mathrm{M}_n$. Обозначим также через $E = [e_1, \ldots, e_n] \in \mathrm{M}_n$ единичную матрицу.

Рассмотрим линейную нестационарную управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad t \geqslant 0, \tag{0.1}$$

с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными [1, с. 252] матрицами коэффициентов A и B. Возьмем управление u в системе (0.1) в виде линейной обратной связи

$$u = U(t)x, \quad t \geqslant 0, \tag{0.2}$$

где U — некоторая измеримая и ограниченная $(m \times n)$-матрица. Тогда получим замкнутую линейную систему

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U(t))x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{0.3}$$

матрица коэффициентов которой является локально интегрируемой и интегрально ограниченной матричной функцией.

При любых фиксированных числах $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ обозначим через $\mathcal{M}_n(\alpha, \beta) \subset \mathrm{M}_n$ множество квадратных матриц n-го порядка, удовлетворяющих оценкам $\|H\| \leqslant \alpha$ и $\det H \geqslant \beta$.

О п р е д е л е н и е 0.1 (см. [2; 3, с. 253]). Система (0.3) называется *равномерно глобально достижимой*, если существует число $T > 0$, при котором для любых $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ найдется такая величина $d = d(\alpha, \beta) > 0$, что для любого числа $t_0 \geqslant 0$ и всякой матрицы $H \in \mathcal{M}_n(\alpha, \beta)$ существует такое измеримое и ограниченное управление $U\colon [t_0, t_0 + T] \to \mathrm{M}_{mn}$, удовлетворяющее для всех $t \in [t_0, t_0 + T]$ неравенству $\|U(t)\| \leqslant d$, при котором для матрицы Коши $X_U(t, s)$, $t, s \geqslant 0$, системы (0.3) с этим управлением обеспечивается равенство $X_U(t_0 + T, t_0) = H$.

З а м е ч а н и е 1. Наличие у линейной системы (0.3) свойства равномерной глобальной достижимости обеспечивает возможность управления всем конечномерным базисом пространства решений этой системы на произвольном временнóм отрезке фиксированной длины T, т. е. указывает на возможность выбора такого измеримого и ограниченного матричного управляющего воздействия $\widehat{U}$, при котором совокупность $\{x_i(t)\}_{i=1}^n$ линейно независимых решений системы (0.3) с этим управлением и начальными условиями — соответствующими векторами e_i, $i = \overline{1, n}$, канонического ортонормированного базиса пространства $\mathbb{R}^n$ — через время T будет совпадать с произвольным наперед заданным правым базисом этого пространства.

На основании свойства равномерной глобальной достижимости устанавливается глобальная управляемость различных асимптотических инвариантов линейной системы (0.3) (см., например, монографию [3]), в том числе и ее глобальная ляпуновская приводимость [3, с. 259; 4].

О п р е д е л е н и е 0.2 (см. [3, с. 259]). Будем говорить, что система (0.3) обладает *свойством глобальной ляпуновской приводимости*, если при любой измеримой и интегрально ограниченной $(n \times n)$-матрице $C(t)$, $t \geqslant 0$, найдется измеримое и ограниченное управление $\widehat{U}\colon [0, +\infty) \to \mathrm{M}_{mn}$, обеспечивающее асимптотическую эквивалентность (по Богданову) [5] системы

$$\dot{z} = C(t)z, \quad z \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{0.4}$$

и системы (0.3) с управлением $U = \widehat{U}(t)$, $t \in [0, +\infty)$, т. е. найдется линейное преобразование (*преобразование Ляпунова* [6, с. 153–154]) $x = L(t)z$ с обратимой абсолютно непрерывной функцией $L = L(t)$, заданной на положительной полуоси со значениями во множестве $(n \times n)$-матриц и удовлетворяющей для всех $t \geqslant 0$ оценке

$$\|L(t)\| + \|L^{-1}(t)\| + \sup_{t \geqslant 0} \int_t^{t+1} \|\dot{L}(\tau)\|\, d\tau < \infty,$$

связывающее систему (0.3), замкнутую управлением $U = \widehat{U}(t)$ при $t \in [0, +\infty)$, и систему (0.4).

Отметим, что на сегодняшний день задача о глобальной ляпуновской приводимости нестационарной системы (0.3), равно как и задача о ее равномерной глобальной достижимости, в общем случае (даже для систем с кусочно-непрерывными и ограниченными коэффициентами) не решена. Большинство известных результатов по равномерной глобальной достижимости линейной системы (0.3) предполагает, как правило, наличие свойства равномерной полной управляемости у линейной нестационарной системы (0.1), соответствующей системе (0.3).

О п р е д е л е н и е 0.3 (см. [3, с. 93; 7; 8]). Система (0.1) обладает *свойством равномерной полной управляемости*, если существуют такие числа $\sigma > 0$ и $\gamma > 0$, что при любых $t_0 \geqslant 0$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n$ на отрезке $[t_0, t_0 + \sigma]$ найдется измеримое и ограниченное управление $u = u(t)$, при всех $t \in [t_0, t_0 + \sigma]$ удовлетворяющее неравенству $\|u(t)\| \leqslant \gamma \|x_0\|$ и переводящее вектор начального состояния $x(t_0) = x_0$ системы (0.1) в ноль на этом отрезке.

Так, в работе [4] (см. также [3, с. 310–324]) С. Н. Поповой и Е. К. Макаровым в предположении равномерной полной управляемости системы (0.1) была установлена равномерная глобальная достижимость двумерной линейной системы (0.3) с кусочно-непрерывными и ограниченными коэффициентами при дополнительном условии кусочной равномерной непрерывности [3, с. 264] матрицы при управлении. В. А. Зайцевым [9; 10, с. 73–82] для системы (0.3) с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами найдены достаточные условия ее равномерной глобальной достижимости в случае, когда линейная управляемая система (0.1) представлена в нижней форме Хессенберга [11, с. 43]. В работе [12] автор настоящей работы совместно с И. В. Инц показал, что для произвольной двумерной линейной системы (0.3) с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами достаточным условием ее равномерной глобальной достижимости является равномерная полная управляемость линейной управляемой системы (0.1), соответствующей (0.3). Данный результат был получен на основании доказанной в этой же работе теореме о представлении произвольной матрицы второго порядка с положительным определителем в виде произведения семи треугольных (2×2)-матриц с положительными диагональными элементами и удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям на их норму и определитель (см. теорему 1 работы [12]).

Пусть $\mathcal{LU}_n \subset \mathrm{M}_n$ — совокупность всех верхне- и нижнетреугольных матриц n-го порядка с положительными диагональными элементами. Тогда для произвольных чисел $r \geqslant 1$ и $0 < \rho \leqslant 1$ через $\mathcal{LU}_n(r, \rho) \subset \mathrm{M}_n$ обозначим множество верхне- и нижнетреугольных матриц

$$\mathcal{LU}_n(r, \rho) := \mathcal{LU}_n \cap \mathcal{M}_n(r, \rho) = \big\{H \in \mathcal{LU}_n \colon \|H\| \leqslant r, \ \det H \geqslant \rho\big\}.$$

В работе [13] было показано, что любую $(n \times n)$-матрицу H с положительным определителем можно представить в виде произведения девяти матриц, принадлежащих множеству $\mathcal{LU}_n$. Оказывается, что справедливо более сильное утверждение о том, что для всякой матрицы $H \in \mathcal{M}_n(\alpha, \beta)$ найдутся такие величины $r = r(\alpha, \beta) \geqslant 1$ и $\rho = \rho(\beta) \in (0, 1]$, при которых матрицы-сомножители в вышеуказанном разложении H можно выбрать из совокупности матриц $\mathcal{LU}_n(r, \rho)$. Это утверждение доказано в данной статье, на основании чего в ней также установлен критерий равномерной глобальной достижимости линейной системы (0.3).

§ 1. Обозначения и вспомогательные утверждения, используемые в работе

По аналогии с работой [13] введем необходимые нам здесь и всюду далее обозначения. Для любых натуральных чисел $i, j = \overline{1, n}$ через $\mathcal{E}_{ij}$ будем обозначать матрицу $\mathcal{E}_{ij} := e_i e_j^T \in \mathrm{M}_n$. Положим $d = d(n) := [n/2]$. Пусть S_n — множество всех подстановок множества $\{1, \ldots, n\}$. Зафиксируем произвольное число $k \in \{1, \ldots, d\}$. Обозначим через $S_n(k)$ множество сужений всех подстановок из S_n на k-элементные подмножества множества $\{1, \ldots, n\}$, то есть совокупность соответствий $\pi_{IJ} \colon I := (i_1, \ldots, i_k) \to (j_1, \ldots, j_k) =: J$ для всех $I, J \subset \{1, \ldots, n\}$, которые определяются равенствами

$$\pi_{IJ} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_k \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_k \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим подмножество $\mathbb{S}_n(k) \subset S_n(k)$, состоящее из функций π_{IJ}, удовлетворяющих одному из равенств $I \cap J = \emptyset$ либо $I = J$. Каждому элементу $\pi_{IJ} \in \mathbb{S}_n(k)$ поставим в соответствие матрицу $\mathcal{E}(\pi_{IJ}) := \sum_{s=1}^{k} \mathcal{E}_{i_s j_s}$, в которой, как и ранее, $\mathcal{E}_{i_s j_s} := e_{i_s} e_{j_s}^T$, $s = \overline{1, k}$. Легко видеть, что такое соответствие является взаимно-однозначным. Всюду далее через $\mathcal{E}_{IJ}$ будем обозначать матрицу $\mathcal{E}(\pi_{IJ})$, соответствующую $\pi_{IJ} \in \mathbb{S}_n(k)$; $\mathcal{E}_I := \mathcal{E}(\pi_{II}) = \sum_{s=1}^{k} \mathcal{E}_{i_s i_s}$.

Для двух произвольных упорядоченных непересекающихся множеств $I := (i_1, \ldots, i_k)$ и $J := (j_1, \ldots, j_k)$ будем писать $I \prec J$ $(I \succ J)$, если:

(1) выполняются включения $I, J \subset \{1, \ldots, n\}$;

(2) элементы множества I упорядочены по возрастанию;

(3) для соответствующих элементов множеств I и J при всех $s = \overline{1, k}$ имеют место неравенства $i_s < j_s$ $(i_s > j_s)$.

Зафиксируем два любые множества $I := (i_1, \ldots, i_k)$ и $J := (j_1, \ldots, j_k)$, такие, что $I \prec J$. В соответствии с работой [13] обозначим через $\mathcal{A}_{IJ}$, $\mathcal{B}_{IJ}$, $\mathcal{C}_{IJ}$ квадратные матрицы порядка n:

$$\mathcal{A}_{IJ} := E + \mathcal{E}_{IJ} = E + \mathcal{E}_{i_1 j_1} + \mathcal{E}_{i_2 j_2} + \ldots + \mathcal{E}_{i_k j_k}, \tag{1.1}$$

$$\mathcal{B}_{IJ} := \mathcal{A}_{IJ}^T = E + \mathcal{E}_{j_1 i_1} + \mathcal{E}_{j_2 i_2} + \ldots + \mathcal{E}_{j_k i_k} = E + \mathcal{E}_{JI}, \tag{1.2}$$

$$\mathcal{C}_{IJ} := \mathcal{A}_{IJ}^2 = E + 2 \cdot \sum_{s=1}^{k} \mathcal{E}_{i_s j_s} = E + 2\mathcal{E}_{IJ}. \tag{1.3}$$

З а м е ч а н и е 2. В работе [13] показано, что матрицы $\mathcal{A}_{IJ}$ и $\mathcal{C}_{IJ}$ верхнетреугольные, а $\mathcal{B}_{IJ}$ — нижнетреугольная, причем все диагональные элементы этих матриц равны единице. Поэтому матрицы $\mathcal{A}_{IJ}$, $\mathcal{B}_{IJ}$, $\mathcal{C}_{IJ}$ обратимы, и для них справедливы следующие соотношения:

$$\det \mathcal{A}_{IJ}^{\pm 1} = \det \mathcal{B}_{IJ}^{\pm 1} = \det \mathcal{C}_{IJ}^{\pm 1} = 1.$$

Для ранее зафиксированных множеств $I, J \subset \{1, \ldots, n\}$ и произвольной совокупности $R = \{\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_l\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$, где $1 \leqslant l \leqslant n$, определим также $(n \times n)$-матрицы $\widetilde{E}_{IJ}$ и $\widetilde{E}_R$:

$$\widetilde{E}_{IJ} := E - 2(\mathcal{E}_I + \mathcal{E}_J) = E - 2 \cdot \sum\nolimits_{s=1}^{k} (\mathcal{E}_{i_s i_s} + \mathcal{E}_{j_s j_s}), \tag{1.4}$$

$$\widetilde{E}_R := E - 2\mathcal{E}_R = E - 2 \cdot \sum\nolimits_{p=1}^{l} \mathcal{E}_{\mathfrak{r}_p \mathfrak{r}_p}. \tag{1.5}$$

В статье [13] была доказана следующая лемма.

Л е м м а 1.1 (см. [13, лемма 3]). *При любом $k \in \{1, \ldots, d\}$ и произвольных упорядоченных множествах $I = (i_1, \ldots, i_k)$ и $J = (j_1, \ldots, j_k)$, таких, что $I \prec J$, матрицы $\mathcal{A}_{IJ}$, $\mathcal{B}_{IJ}$, $\mathcal{C}_{IJ}$, $\widetilde{E}_{IJ} \in \mathrm{M}_n$, определенные формулами* (1.1) – (1.4), *удовлетворяют следующим соотношениям:*

$$\mathcal{A}_{IJ}^{-1} = E - \mathcal{E}_{IJ} = E - \mathcal{E}_{i_1 j_1} - \mathcal{E}_{i_2 j_2} - \ldots - \mathcal{E}_{i_k j_k}, \tag{1.6}$$

$$\mathcal{B}_{IJ}^{-1} = E - \mathcal{E}_{JI} = E - \mathcal{E}_{j_1 i_1} - \mathcal{E}_{j_2 i_2} - \ldots - \mathcal{E}_{j_k i_k}, \tag{1.7}$$

$$\widetilde{E}_{IJ} = \mathcal{A}_{IJ} \cdot \mathcal{B}_{IJ}^{-1} \cdot \mathcal{C}_{IJ} \cdot \mathcal{B}_{IJ}^{-1} \cdot \mathcal{A}_{IJ}. \tag{1.8}$$

З а м е ч а н и е 3. Заметим, что в случае выполнения условий леммы 1.1 справедливы оценки

$$\|\mathcal{A}_{IJ}\| \leqslant 2\sqrt{n}, \quad \|\mathcal{B}_{IJ}^{-1}\| \leqslant 2\sqrt{n}, \quad \|\mathcal{C}_{IJ}\| \leqslant 3\sqrt{n}. \tag{1.9}$$

Действительно, в силу формул (1.1), (1.7) и (1.3) для любого $i = \overline{1, n}$ выполняются неравенства

$$\max_{p=\overline{1,n}} \sum\nolimits_{q=1}^{n} |e_p^T \mathcal{A}_{IJ} e_q| = 2, \quad \max_{p=\overline{1,n}} \sum\nolimits_{q=1}^{n} |e_p^T \mathcal{B}_{IJ}^{-1} e_q| = 2, \quad \max_{p=\overline{1,n}} \sum\nolimits_{q=1}^{n} |e_p^T \mathcal{C}_{IJ} e_q| = 3,$$

из которых, применяя соотношения между максимальной строчной и спектральной нормами матрицы [11, с. 379], получим требуемые оценки (1.9).

Помимо сформулированной выше леммы 1.1, в дальнейшем нам понадобятся также нижеприведенные леммы 1.2, 1.3, доказательства которых, как и леммы 1.1, содержатся в работе [13].

Л е м м а 1.2 (см. [13, лемма 4]). *Пусть $d := [n/2]$. При всяком $k \in \{1, \ldots, d\}$ и любых упорядоченных множествах $I := (i_1, \ldots, i_k)$ и $J := (j_1, \ldots, j_k)$, таких, что $I \prec J$, матрицы $\mathcal{A}_{IJ}$, $\mathcal{B}_{IJ}, \widetilde{E}_I \in \mathrm{M}_n$, определенные равенствами* (1.1), (1.2) *и* (1.5), *удовлетворяют соотношению*

$$\mathcal{A}_{IJ} \cdot \mathcal{B}_{IJ}^{-1} \cdot \mathcal{A}_{IJ} = P_{IJ} \cdot \widetilde{E}_I, \tag{1.10}$$

где $P_{IJ} \in \mathrm{M}_n$ — матрица перестановок, умножение на которую слева всякой матрицы влечет для последней перестановку ее строк: i_1-й с j_1-й, i_2-й с j_2-й, ..., i_k-й с j_k-й.

З а м е ч а н и е 4. В статье [13] показано (см. замечание 4 этой работы), что для произвольного множества $R = \{\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_l\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$, где $1 \leqslant l \leqslant n$, матрица $\widetilde{E}_R$, определенная равенствами (1.5), обратима, причем выполняется соотношение $\widetilde{E}_R = \widetilde{E}_R^{-1}$. Поэтому формулу (1.10) можно переписать так:

$$P_{IJ} = \mathcal{A}_{IJ} \cdot \mathcal{B}_{IJ}^{-1} \cdot \mathcal{A}_{IJ} \cdot \widetilde{E}_I.$$

З а м е ч а н и е 5. Поскольку умножение слева матрицы перестановок на некоторую квадратную матрицу меняет лишь порядок расположения строк у последней, то для любых квадратной матрицы $H \in \mathrm{M}_n$ и матрицы перестановок $P \in \mathrm{M}_n$, очевидно, выполняются следующие равенства:

$$\|PH\| = \|H\|, \quad |\det(P \cdot H)| = |\det H|. \tag{1.11}$$

Л е м м а 1.3 (см. [13, лемма 5]). *Для произвольных фиксированных натуральных чисел $1 \leqslant k, l \leqslant n$ обозначим через $S := \{s_i \in \{1, \ldots, n\},\ i = \overline{1, k}\}$ и $R := \{\mathfrak{r}_j \in \{1, \ldots, n\},\ j = \overline{1, l}\}$ два множества индексов, а через $T := S \Delta R = \{t_p \in \{1, \ldots, n\},\ p = \overline{1, q},\ q \leqslant k + l\}$ — их симметрическую разность* [14, с. 15]. *Тогда имеет место равенство*

$$\widetilde{E}_S \cdot \widetilde{E}_R = \widetilde{E}_T. \tag{1.12}$$

§ 2. Основные результаты

Всюду ниже для любой матрицы $H = (h_{kl})_{k,l=\overline{1,n}} \in \mathrm{M}_n$ через $H\{i\} \in \mathrm{M}_i, i = \overline{1,n}$, будем обозначать ее главную ведущую подматрицу i-го порядка [11, с. 30], т. е. $H\{i\} = (h_{kl})_{k,l=\overline{1,i}}$; через $H_{kl} \in \mathbb{R}$, $k,l = \overline{1,n}$, — алгебраическое дополнение [11, с. 30] элемента h_{kl} матрицы H.

Т е о р е м а 2.1. *При любых числах $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ и всякой матрице $H \in \mathcal{M}_n(\alpha,\beta)$ найдется матрица перестановок $P \in M_n$, что для матрицы $G := P \cdot H$ выполняются оценки*

$$|\det G\{i\}| \geqslant \beta / \big(n! \cdot (\alpha+1)^{n-1}\big) \quad \textit{при всех} \quad i = \overline{1,n}. \tag{2.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем произвольные числа $\alpha > 0$ и $\beta > 0$. Тогда при любом $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, и всякой матрице $H = (h_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\alpha,\beta)$ справедливы неравенства

$$\|H\| \leqslant \alpha < \alpha + 1 =: \mathrm{h} \quad \text{и} \quad \det H \geqslant \beta. \tag{2.2}$$

Дальнейшее доказательство проведем методом математической индукции по порядку матрицы H, пользуясь формулой Лапласа разложения определителя по столбцу [11, с. 19].

Пусть $n = 2$. Возьмем произвольную матрицу $H = (h_{ij})_{i,j=\overline{1,2}} \in \mathcal{M}_2(\alpha,\beta)$. Разлагая на основании формулы Лапласа [11, с. 19] определитель этой матрицы по второму столбцу, получим соотношения $0 < \beta \leqslant \det H = |\det H| = |\sum_{i=1}^{2} h_{i2} \cdot H_{i2}|$. Поскольку для правой части последнего равенства в силу неравенства между максимальной строчной и спектральной нормами матрицы [11, с. 379] выполняются оценки

$$\left|\sum_{i=1}^{2} h_{i2} \cdot H_{i2}\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |h_{i2} \cdot H_{i2}| \leqslant \max\{|h_{i2}|,\, i = \overline{1,2}\} \cdot \sum_{i=1}^{2} |H_{i2}| \leqslant 2 \cdot \|H\| \cdot \max\{|H_{i2}|,\, i = \overline{1,2}\},$$

то, обозначив индексом $l \in \{1,2\}$ такой, что $|H_{l2}| = \max\{|H_{i2}|,\, i = \overline{1,2}\}$, ввиду (2.2), установим неравенство $|H_{l2}| \geqslant \beta/(2\mathrm{h}) =: \beta_0$.

Возьмем в качестве $P \in \mathrm{M}_2$ матрицу перестановок, полученную из единичной при помощи перестановки второй и l-й строк (в случае $l = 2$ матрица P единичная), и покажем, что для матрицы $G = P \cdot H \in \mathrm{M}_2$ выполняются неравенства (2.1). Так как матрица G образуется из матрицы H перестановкой второй и l-й строк, то в силу формул (1.11) и (2.2) с учетом неравенства $\mathrm{h} \geqslant 1$ для нее выполняются соотношения

$$|\det G\{2\}| = |\det G| = |\det H| \geqslant \beta \geqslant \beta_0.$$

Кроме того, очевидно, что ведущий главный угловой минор первого порядка матрицы G равен с точностью до знака алгебраическому дополнению H_{l2} матрицы H, и поэтому

$$|\det G\{1\}| = |H_{l2}| \geqslant \beta/(2\mathrm{h}) = \beta_0.$$

Таким образом, с учетом равенства $\mathrm{h} = \alpha + 1$ при $i = \overline{1,2}$ для матрицы G получим требуемые соотношения: $|\det G\{i\}| \geqslant \beta_0 = \beta/(2\mathrm{h}) = \beta/\big(2! \cdot (\alpha+1)^{2-1}\big)$.

Предположим теперь, что при $n = k$ теорема 2.1 верна, т. е. что для произвольных фиксированных чисел $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ и всякой матрицы $H \in \mathcal{M}_k(\alpha,\beta)$ найдется такая матрица перестановок $\widehat{P} \in M_k$, при которой для матрицы $G := \widehat{P} \cdot H \in M_k$ выполняются оценки

$$|\det(G\{i\})| \geqslant \beta/\big(k! \cdot (\alpha+1)^{k-1}\big), \quad i = \overline{1,k}. \tag{2.3}$$

Установим справедливость теоремы 2.1 для случая $n = k+1$. Возьмем произвольную матрицу $H \in \mathcal{M}_{k+1}(\alpha,\beta)$. Пользуясь формулами Лапласа [11, с. 19], разложим определитель этой матрицы по последнему столбцу, тогда справедливы соотношения

$$0 < \beta \leqslant \det H = |\det H| = \left|\sum_{i=1}^{k+1} h_{i\,k+1} \cdot H_{i\,k+1}\right|,$$

из которых, ввиду неравенства между максимальной строчной и спектральной нормами матрицы [11, с. 379], а также первой формулы (2.2), вытекают оценки

$$\beta \leqslant \left|\sum_{i=1}^{k+1} h_{i\,k+1}\cdot H_{i\,k+1}\right| \leqslant \sum_{i=1}^{k+1}|h_{i\,k+1}\cdot H_{i\,k+1}| \leqslant \max\{|h_{i\,k+1}|,\, i=\overline{1,k+1}\}\times\sum_{i=1}^{k+1}|H_{i\,k+1}| \leqslant$$
$$\leqslant (k+1)\cdot\|H\|\cdot\max\{|H_{i\,k+1}|,\, i=\overline{1,k+1}\} \leqslant (k+1)\cdot \mathrm{h}\cdot|H_{l_1\,k+1}|,$$

в которых l_1 обозначен такой индекс из $\{1,\ldots,k+1\}$, что $|H_{l_1\,k+1}| = \max\{|H_{i\,k+1}|, i=\overline{1,k+1}\}$. Таким образом, при вышеопределенном индексе $l_1\in\{1,\ldots,k+1\}$ справедливо соотношение

$$|H_{l_1\,k+1}| \geqslant \beta/((k+1)\cdot\mathrm{h}) = \beta/\big((k+1)\cdot(\alpha+1)\big) =: \beta_1 > 0. \tag{2.4}$$

Зафиксируем этот индекс l_1 и обозначим через $P_1\in\mathrm{M}_{k+1}$ матрицу перестановок, полученную из единичной при помощи перестановки $(k{+}1)$-й и l_1-й строк (в случае $l_1=k{+}1$ матрица P_1 единичная). Рассмотрим матрицу $G_1 := P_1\cdot H\in\mathrm{M}_{k+1}$. Она получена из матрицы H перестановкой $(k+1)$-й и l_1-й строк, поэтому алгебраическое дополнение элемента $h_{l_1\,k+1}$ матрицы H равно с точностью до знака ведущему главному угловому минору k-го порядка [11, с. 30] матрицы G_1. Отсюда с учетом включения $H\in\mathcal{M}_{k+1}(\alpha,\beta)$, замечания 5, а также оценки (2.4) для матрицы G_1 вытекают соотношения

$$|\det G_1\{k\}| = |H_{l_1\,k+1}| \geqslant \beta_1, \tag{2.5}$$

$$|\det G_1\{k+1\}| = |\det G_1| = |\det H| \geqslant \beta, \tag{2.6}$$

$$\|G_1\| = \|P_1\cdot H\| = \|H\| \leqslant \alpha. \tag{2.7}$$

Рассмотрим главную ведущую подматрицу $\widehat{G}_1$ порядка k матрицы G_1, т. е. матрицу $\widehat{G}_1 :=$ $:= G_1\{k\}\in\mathrm{M}_k$. Для нее в силу формулы (2.5) выполняется оценка $|\det\widehat{G}_1| \geqslant \beta_1 > 0$. Поскольку же норма любой подматрицы не превосходит нормы всей матрицы, то в силу соотношений (2.7) для матрицы $\widehat{G}_1$ имеем также неравенства $\|\widehat{G}_1\| \leqslant \|G_1\| \leqslant \alpha$, означающие справедливость включения $\widehat{G}_1\in\mathcal{M}_k(\alpha,\beta_1)$. Тогда по предположению индукции для матрицы $\widehat{G}_1$ найдется такая матрица перестановок $\widehat{P}_1\in M_k$, при которой для матрицы $\widehat{G}_2 := \widehat{P}_1\cdot\widehat{G}_1\in M_k$, с учетом равенства $\beta_1 = \beta/((k+1)\cdot(\alpha+1))$, выполняются соотношения

$$|\det\widehat{G}_2\{i\}| \geqslant \beta_1/\big(k!\cdot(\alpha+1)^{k-1}\big) = \beta/\big((k+1)!\cdot(\alpha+1)^k\big) =: \beta_2, \quad i=\overline{1,k}. \tag{2.8}$$

Положим $P_2 := \begin{pmatrix}\widehat{P}_1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in\mathrm{M}_{k+1}$. Тогда в силу определения матрицы $\widehat{P}_1$ очевидно, что P_2 — матрица перестановок, при умножении слева на которую любой квадратной матрицы $(k+1)$-го порядка осуществляется перестановка некоторых строк последней (с первой по k-ю такую перестановку обеспечивает матрица $\widehat{P}_1$), при этом $(k+1)$-я строка остается неизменной. Тогда при умножении слева G_1 на матрицу P_2 получим матрицу $G_2 := P_2\cdot G_1\in\mathrm{M}_{k+1}$, главная ведущая подматрица порядка k которой совпадает с матрицей $\widehat{G}_2$, а элементы ее последней строки совпадают с соответствующими элементами матрицы G_1. Поэтому для G_2 выполняются равенства $G_2\{i\} = \widehat{G}_2\{i\}$, $i=\overline{1,k}$, из которых, ввиду соотношений (2.8), следуют верные при всех $i=\overline{1,k}$ оценки $|\det G_2\{i\}| \geqslant \beta_2$. Поскольку же в силу замечания 5, формулы (2.6), определения матриц P_2, G_2 и G_1, очевидного неравенства $\beta\geqslant\beta_2$, вытекащего из определения числа β_2 и оценки $\alpha>0$, имеют место соотношения

$$|\det G_2\{k+1\}| = |\det G_2| = |\det(P_2\cdot G_1)| = |\det G_1| \geqslant \beta \geqslant \beta_2,$$

то справедливы неравенства

$$|\det G_2\{i\}| \geqslant \beta_2, \quad i=\overline{1,k+1}. \tag{2.9}$$

Возьмем в качестве P матрицу $P = P_2 \cdot P_1 \in \mathrm{M}_{k+1}$, которая является матрицей перестановок как произведение перестановочных матриц. Положив $G := P \cdot H$, в силу равенств $G_1 = P_1 \cdot H$ и $G_2 = P_2 \cdot G_1$, вытекающих из определения матриц G_1 и G_2, получим соотношения

$$G = (P_2 \cdot P_1) \cdot H = P_2 \cdot G_1 = G_2,$$

из которых, ввиду формул (2.9), следуют оценки

$$|\det G\{i\}| \geqslant \beta_2, \quad i = \overline{1, k+1},$$

обеспечивающие в силу $\beta_2 = \beta/\big((k+1)! \cdot (\alpha+1)^k\big)$ справедливость утверждения теоремы 2.1 при $n = k+1$. Тогда на основании принципа математической индукции теорема 2.1 доказана. $\square$

Т е о р е м а 2.2. *При любых фиксированных числах $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ существует такие $r = r(\alpha, \beta) \geqslant 1$ и $\rho = \rho(\beta) \in (0, 1]$, что для всякой матрицы $H \in \mathcal{M}_n(\alpha, \beta)$ найдутся матрицы $H_i \in \mathcal{LU}_n(r, \rho)$, $i = \overline{1, 9}$, при которых матрица H представляется в виде $H = H_9 \cdot \ldots \cdot H_1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем любые числа $\alpha > 0$ и $\beta > 0$. Возьмем произвольную матрицу $H \in \mathcal{M}_n(\alpha, \beta)$. Тогда для нее выполняются оценки $\|H\| \leqslant \alpha + 1 =: \mathrm{h}$ и $\det H \geqslant \beta$. Пусть $\beta_1 := \beta/(n! \cdot \mathrm{h}^{n-1})$. Пользуясь теоремой 2.1, для матрицы H найдем такую матрицу перестановок $P \in M_n$, что для матрицы

$$G := P \cdot H = (g_{kl})_{k,l=\overline{1,n}} \in \mathrm{M}_n \tag{2.10}$$

имеют место соотношения

$$|\det(G\{i\})| \geqslant \beta_1, \quad i = \overline{1, n}. \tag{2.11}$$

Поскольку все главные угловые миноры матрицы G ненулевые, то для нее выполняется теорема об LU-разложении [11, с. 194], и значит, справедливо равенство

$$G = L \cdot U, \tag{2.12}$$

в котором $L = (l_{kl})_{k,l=\overline{1,n}} \in \mathrm{M}_n$ — нижнетреугольная матрица, а $U = (u_{kl})_{k,l=\overline{1,n}} \in \mathrm{M}_n$ — верхнетреугольная матрица с единицами на диагонали. Оценим сверху норму и снизу определитель последних матриц. В силу определения матриц L и U имеют место верные при любом $i = \overline{1, n}$ соотношения $G\{i\} = L\{i\} \cdot U\{i\}$, из которых, ввиду $u_{ii} = 1$ для всех $i = \overline{1, n}$, получим цепочку равенств $\det G\{i\} = \det(L\{i\} \cdot U\{i\}) = \det L\{i\} \cdot \det U\{i\} = \prod_{j=1}^{i} l_{jj}$, $i = \overline{1, n}$. Отсюда и из формул (2.11) для диагональных элементов матрицы L следуют неравенства

$$|l_{11}| = |\det G\{1\}| \geqslant \beta_1, \tag{2.13}$$

$$|l_{ii}| = |\det G\{i\}|/|\det G\{i-1\}| \geqslant \beta_1/|\det G\{i-1\}|, \quad i = \overline{2, n}. \tag{2.14}$$

Покажем, что оценка снизу для модулей диагональных элементов матрицы L зависит только от $\alpha > 0$ и $\beta > 0$. Так как норма любой подматрицы не превосходит нормы матрицы, то, ввиду замечания 5 и определения величины h, при всех $k, j = \overline{1, i}$ имеем соотношения

$$|g_{kj}| \leqslant \|G\{i\}\| \leqslant \|G\| = \|PH\| = \|H\| \leqslant \mathrm{h}. \tag{2.15}$$

Отсюда, на основании определения определителя матрицы [15, с. 108], легко получить оценки

$$|\det G\{i\}| \leqslant i! \cdot \mathrm{h}^i \leqslant n! \cdot \mathrm{h}^n, \quad i = \overline{1, n},$$

из которых, ввиду соотношения $\mathrm{h} = \alpha + 1 > 1$, формул (2.13), (2.14), равенства $\beta_1 = \beta/(n! \cdot \mathrm{h}^{n-1})$, для диагональных элементов матрицы L имеем зависящие только от α и β оценки снизу:

$$|l_{ii}| \geqslant \beta_1/(n! \cdot \mathrm{h}^n) > \beta/(n! \cdot \mathrm{h}^n)^2 = \beta/\big(n! \cdot (\alpha+1)^n\big)^2 > 0, \quad i = \overline{1, n}. \tag{2.16}$$

На основании алгоритма LU-разложения [15, с. 555–556] для элементов l_{ij} и u_{ij}, $i,j=\overline{1,n}$, матриц L и U выполняются следующие равенства [15, с. 557]:

$$l_{ij}=0 \quad \text{при} \quad i<j, \quad l_{ij}=g_{ij}-\sum_{s=1}^{j-1} l_{is}u_{sj} \quad \text{при} \quad i\geqslant j;$$

$$u_{ij}=0 \quad \text{при} \quad i>j, \quad u_{ii}=1 \quad \text{и} \quad u_{ij}=\big(g_{ij}-\sum_{s=1}^{i-1} l_{is}u_{sj}\big)/l_{ii} \quad \text{при} \quad i<j.$$

Ввиду последних равенств, используя формулы (2.15) и (2.16), получим, что существует такая величина $r_1=r_1(\alpha,\beta)\geqslant 1$, при которой матрицы L и U удовлетворяют неравенствам

$$\|L\|\leqslant r_1 \quad \text{и} \quad \|U\|\leqslant r_1. \tag{2.17}$$

Зафиксируем это число. Кроме того, положив $\rho=\rho(\beta):=\min\{1,\beta\}\in(0,1]$, на основании определения матрицы U, равенств (2.12) и (2.10), с учетом замечания 5 для матриц L и U получим также соотношения $\det U=1\geqslant\rho$ и

$$|\det L|=|\det L|\cdot 1=|\det L|\cdot|\det U|=|\det(L\cdot U)|=|\det G|=|\det(P\cdot H)|=|\det H|\geqslant\rho,$$

а следовательно,

$$\det U\geqslant\rho \quad \text{и} \quad |\det L|\geqslant\rho. \tag{2.18}$$

Пусть номера $1\leqslant\mathfrak{r}_1<\mathfrak{r}_2<\ldots<\mathfrak{r}_k\leqslant n$ определяют вхождения отрицательных диагональных элементов в матрицу L. Пользуясь обозначениями (1.5), рассмотрим множество $R:=\{\mathfrak{r}_1,\ldots,\mathfrak{r}_k\}$ и определим $(n\times n)$-матрицу $\widetilde{E}_R=E-2\cdot\sum_{p=1}^{k}\mathcal{E}_{\mathfrak{r}_p\mathfrak{r}_p}$. Тогда для нижнетреугольной матрицы $F=(f_{ij})_{i,j=1}^{n}:=\widetilde{E}_R\cdot L$ выполняются равенства $\|F\|=\|E_R\cdot L\|=\|L\|$ и оценки $f_{ii}=|l_{ii}|>0$, $i=\overline{1,n}$, и поэтому в силу первого неравенства в (2.17) и второго соотношения в формулах (2.18) имеют место оценки $\|F\|\leqslant r_1$ и $\det F=|\det L|\geqslant\rho$, означающие включение $F\in\mathcal{LU}_n(r_1,\rho)$. Ввиду второго неравенства в формулах (2.17) и первого из соотношений в (2.18), для матрицы U обеспечивается аналогичное включение $U\in\mathcal{LU}_n(r_1,\rho)$.

Ввиду обратимости матриц перестановок [11, с. 40], на основании формулы (2.10) имеем равенство $H=P^{-1}\cdot G$, из которого в силу формулы (28) следует соотношение $H=P^{-1}\cdot L\cdot U$. Тогда отсюда и из равенства $F=\widetilde{E}_R\cdot L$ и соотношения $\widetilde{E}_R^{-1}=\widetilde{E}_R$, верного в силу замечания 4, вытекает представление

$$H=P^{-1}\cdot\widetilde{E}_R\cdot F\cdot U. \tag{2.19}$$

Поскольку обратной для матрицы перестановки является перестановочная матрица [11, с. 40], то P^{-1} — матрица перестановки. Пусть матрица P^{-1} при умножении слева на произвольную матрицу меняет местами i_1-ю и j_1-ю строки, i_2-ю и j_2-ую строки, $\ldots$, i_s-ю и j_s-ю строки этой матрицы, причем $i_q\leqslant j_q$, $q=\overline{1,s}$. Рассмотрим два множества индексов $I_1:=(i_1,\ldots,i_s)$ и $J_1:=(j_1,\ldots,j_s)$. Тогда, очевидно, что выполняется соотношение $I_1\prec J_1$. Поэтому в терминах леммы 1.2 для матрицы P^{-1} можно записать $P^{-1}=P_{I_1J_1}$. Отсюда на основании этой леммы и замечания 4, пользуясь обозначениями (1.1), (1.2) и (1.5), для матрицы $P^{-1}\in\mathrm{M}_n$ получим следующее разложение:

$$P^{-1}=\mathcal{A}_{I_1J_1}\cdot\mathcal{B}_{I_1J_1}^{-1}\cdot\mathcal{A}_{I_1J_1}\cdot\widetilde{E}_{I_1}.$$

В силу этого разложения и формулы (2.19) матрица $H\in\mathcal{M}_n(\alpha,\beta)$ представляется в виде

$$H=\mathcal{A}_{I_1J_1}\cdot\mathcal{B}_{I_1J_1}^{-1}\cdot\mathcal{A}_{I_1J_1}\cdot\widetilde{E}_{I_1}\cdot\widetilde{E}_R\cdot F\cdot U. \tag{2.20}$$

Рассмотрим множество $T=\big\{t_p\in\{1,\ldots,n\},\ p=\overline{1,q},\ q\leqslant k+s\big\}:=I_1\Delta R$ (здесь, как и ранее, операция Δ означает симметрическую разность множеств [15, с. 15]) и $(n\times n)$-матрицу $\widetilde{E}_T$. Тогда на основании леммы 1.3 и представления (2.20) для матрицы H имеем соотношение

$$H=\mathcal{A}_{I_1J_1}\cdot\mathcal{B}_{I_1J}^{-1}\cdot\mathcal{A}_{I_1J_1}\cdot\widetilde{E}_T\cdot F\cdot U. \tag{2.21}$$

По определению матриц $\mathcal{A}_{I_1J_1}$, $\mathcal{B}_{I_1J_1}$, F, U и H и замечанию 1.2 справедливы неравенства

$$\det\mathcal{A}_{I_1J_1}=1>0,\quad \det\mathcal{B}^{-1}_{I_1J_1}=1>0,\quad \det F\geqslant\rho>0,\quad \det U\geqslant\rho>0,\quad \det H\geqslant\beta>0,$$

из которых с учетом формулы (2.21) следует соотношение $\det\widetilde{E}_T>0$, означающее, в силу определения матрицы $\widetilde{E}_T$, что количество «-1», стоящих на диагонали этой диагональной матрицы, четно, т. е. $q=2l$, где $l\leqslant[n/2]$. Пусть $1\leqslant t_1<t_2<\ldots<t_{2l}\leqslant n$ — элементы множества T. Обозначим $I_2:=(t_1,t_3,\ldots,t_{2l-1})$ и $J_2:=(t_2,t_4,\ldots,t_{2l})$. Тогда, очевидно, выполняется соотношение $I_2\prec J_2$, и поэтому справедливо равенство $\widetilde{E}_T=\widetilde{E}_{I_2J_2}$. Отсюда на основании леммы 1.1 получим следующее разложение: $\widetilde{E}_T=\widetilde{E}_{I_2J_2}=\mathcal{A}_{I_2J_2}\cdot\mathcal{B}^{-1}_{I_2J_2}\cdot\mathcal{C}_{I_2J_2}\cdot\mathcal{B}^{-1}_{I_2J_2}\cdot\mathcal{A}_{I_2J_2}$ с треугольными матрицами $\mathcal{A}_{I_2J_2},\mathcal{B}^{-1}_{I_2J_2},\mathcal{C}_{I_2J_2}\in\mathrm{M}_n$, имеющими положительные диагональные элементы. В силу такого разложения с учетом равенства (2.21) выполняется представление

$$H=\mathcal{A}_{I_1J_1}\cdot\mathcal{B}^{-1}_{I_1J_1}\cdot\mathcal{A}_{I_1J_1}\cdot\mathcal{A}_{I_2J_2}\cdot\mathcal{B}^{-1}_{I_2J_2}\cdot\mathcal{C}_{I_2J_2}\cdot\mathcal{B}^{-1}_{I_2J_2}\cdot\mathcal{A}_{I_2J_2}\cdot F\cdot U. \tag{2.22}$$

Поскольку матрицы $\mathcal{A}_{I_1J_1}$ и $\mathcal{A}_{I_2J_2}$ являются верхнетреугольными с положительными диагональными элементами, а диагональные элементы матрицы-произведения верхнетреугольных матриц — это произведения соответствующих диагональных элементов матриц-сомножителей, то, обозначая матрицу $\mathcal{A}:=\mathcal{A}_{I_1J_1}\cdot\mathcal{A}_{I_2J_2}\in\mathrm{M}_n$, получим, что она является верхней треугольной матрицей с положительной диагональю (более того, в силу замечания 2 диагональ матриц-сомножителей состоит лишь из единиц, поэтому и диагональ матрицы $\mathcal{A}$ также состоит только из единиц). Тогда, используя равенство (2.22), окончательно получим представление матрицы H в виде произведения девяти треугольных (пяти — верхнетреугольных и четырех — нижнетреугольных) матриц с положительными диагональными элементами:

$$H=\mathcal{A}_{I_1J_1}\cdot\mathcal{B}^{-1}_{I_1J_1}\cdot\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}^{-1}_{I_2J_2}\cdot\mathcal{C}_{I_2J_2}\cdot\mathcal{B}^{-1}_{I_2J_2}\cdot\mathcal{A}_{I_2J_2}\cdot F\cdot U. \tag{2.23}$$

В силу замечания 2, неравенства $0<\rho\leqslant1$ и определения $\mathcal{A}$ выполняются соотношения

$$\det\mathcal{A}_{I_1J_1}=\det B^{-1}_{I_1J_1}=\det B^{-1}_{I_2J_2}=\det\mathcal{C}_{I_2J_2}=\det\mathcal{A}_{I_2J_2}=1\geqslant\rho, \tag{2.24}$$

$$\det\mathcal{A}=\det(\mathcal{A}_{I_1J_1}\cdot\mathcal{A}_{I_2J_2})=\det\mathcal{A}_{I_1J_1}\cdot\det\mathcal{A}_{I_2J_2}=1\geqslant\rho. \tag{2.25}$$

Кроме того, ввиду замечания 3 матрицы-сомножители в формуле (2.23) удовлетворяют оценкам

$$\|\mathcal{A}_{I_1J_1}\|\leqslant2\sqrt{n},\quad \|\mathcal{B}^{-1}_{I_1J_1}\|\leqslant2\sqrt{n},\quad \|\mathcal{B}^{-1}_{I_2J_2}\|\leqslant2\sqrt{n},\quad \|\mathcal{A}_{I_2J_2}\|\leqslant2\sqrt{n}, \tag{2.26}$$

$$\|\mathcal{C}_{I_2J_2}\|\leqslant3\sqrt{n},\quad \|\mathcal{A}\|\leqslant\|\mathcal{A}_{I_1J_1}\|\cdot\|\mathcal{A}_{I_2J_2}\|\leqslant(2\sqrt{n})\cdot(2\sqrt{n})=4n. \tag{2.27}$$

Положим $r:=\max\{r_1,\,3\sqrt{n},\,2\sqrt{n},\,4n\}=\max\{r_1(\alpha,\beta),\,4n\}$. Так как выполняются включения $F,U\in\mathcal{LU}_n(r_1,\rho)$, то имеют место неравенства $\det F\geqslant\rho$ и $\det U\geqslant\rho$, а также, ввиду определения величины r, $\|F\|\leqslant r_1\leqslant r$ и $\|U\|\leqslant r_1\leqslant r$. Данные неравенства обеспечивают соотношение $F,U\in\mathcal{LU}_n(r,\rho)$. Включение остальных матриц, входящих в разложение (2.23), во множество $\mathcal{LU}_n(r,\rho)$ вытекает из формул (2.24)–(2.27) и определения величины r. Теорема 2.2 доказана. $\square$

З а м е ч а н и е 6. На основании формулы Лиувилля–Остроградского [6, с. 73] и неравенства Гронуолла–Беллмана [6, с. 108] легко установить, что при произвольных фиксированных числах $t_0\geqslant0$ и $T>0$ и всякой линейной системе (0.4) с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами ее матрица Коши $Z(t_0+T,t_0)$ на отрезке $[t_0,t_0+T]$ принадлежит множеству $\mathcal{M}_n(\alpha,\beta)$, в котором величины α и β определяются равенствами

$$\alpha=e^c,\quad \beta=e^{-c},\quad c=\max\{1;\int_t^{t+T}\|C(\tau)\|\,d\tau \text{ при } t\geqslant0\}.$$

Таким образом, теорема 2.2 дает разложение матрицы Коши системы (0.4) на любом фиксированном отрезке длины T в произведение матриц из множества $\mathcal{LU}_n(r,\rho)$, для которого числа r и ρ зависят только от величины c и размерности фазового пространства n этой системы.

Т е о р е м а 2.3. *Система* (0.3) *равномерно глобально достижима тогда и только тогда, когда найдутся такие числа* $\Delta > 0$, $r \geqslant 1$ *и* $\rho \in (0,1]$, *при которых существует величина* $\theta = \theta(r,\rho) > 0$, *что при всяком числе* $t_0 \geqslant 0$ *и произвольной матрице* $H \in \mathcal{LU}_n(r,\rho)$ *найдется измеримое и ограниченное на отрезке* $[t_0, t_0+\Delta]$ *управление* $U = U(t)$, *удовлетворяющее при всех* $t \in [t_0, t_0+\Delta]$ *оценке* $\|U(t)\| \leqslant \theta$ *и обеспечивающее для матрицы Коши* $X_U(t,s)$ *системы* (0.3) *с этим управлением равенство* $X_U(t_0+\Delta, t_0) = H$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть система (0.3) равномерно глобально достижима. Зафиксируем произвольные числа $t_0 \geqslant 0$, $r \geqslant 1$ и $0 < \rho \leqslant 1$. На основании определения множеств $\mathcal{LU}_n(r,\rho)$ и $\mathcal{M}_n(r,\rho)$ выполняется включение $\mathcal{LU}_n(r,\rho) \subset \mathcal{M}_n(r,\rho)$. Тогда, взяв в качестве H произвольную матрицу из множества $\mathcal{LU}_n(r,\rho)$, ввиду последнего включения и равномерной глобальной достижимости системы (0.3), найдем такие число $T > 0$ и величину $d_1 = d_1(r,\rho) > 0$, а также измеримое и ограниченное на отрезке $[t_0, t_0+T]$ управление U_1, удовлетворяющее условию $\|U_1(t)\| \leqslant d_1$ для всех $t \in [t_0, t_0+T]$, при котором для матрицы Коши $X_{U_1}(t,s)$, $t,s \geqslant 0$, системы (0.3) с этим управлением обеспечивается равенство $X_U(t_0+T, t_0) = H$. Полагая $\theta = d_1$, $\Delta = T$, установим в теореме 2.3 необходимость.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть выполняются условия теоремы 2.3. Зафиксируем произвольные числа $t_0 \geqslant 0$, $\alpha > 0$ и $\beta > 0$. Возьмем любую матрицу $H \in \mathcal{M}_n(\alpha,\beta)$ и покажем, что найдется такое число $T > 0$, при котором существует независящая от $t_0 \geqslant 0$ величина $d = d(\alpha,\beta) > 0$, что на отрезке $[t_0, t_0+T]$ найдется такое измеримое и ограниченное управление U, удовлетворяющее условию $\|U(t)\| \leqslant d$ при всех $t \in [t_0, t_0+T]$, что для матрицы Коши $X_U(t,s)$ системы (0.3) с этим управлением обеспечивается равенство $X_U(t_0+T, t_0) = H$.

Пользуясь теоремой 2.2, найдем числа $r = r(\alpha,\beta) \geqslant 1$ и $\rho = \rho(\beta) \in (0,1]$ и такие матрицы $H_k \in \mathcal{LU}_n(r,\rho)$, $k = \overline{1,9}$, что H представляется в виде произведения этих матриц. Тогда на основании условий теоремы 2.3 при всяком $k = \overline{1,9}$ на каждом промежутке $[t_0 + (k-1)\Delta,$ $t_0 + k\Delta)$ найдем измеримое и ограниченное управление $U_k = U_k(t)$, удовлетворяющее при всех $t \in [t_0 + (k-1)\Delta, t_0 + k\Delta)$ оценке $\|U_k(t)\| \leqslant \theta_k(r,\rho)$ и обеспечивающее для матрицы Коши $X_{U_k}(t,s)$ системы (0.3) с этим управлением равенство $X_{U_k}\big(t_0 + k\Delta, t_0 + (k-1)\Delta\big) = H_k$.

Положим $T := 9\Delta$. Определим для системы (0.3) управление $U = U(t)$ на отрезке $[t_0, t_0+T]$, полагая его равным $U(t) \equiv U_k(t), t \in [t_0 + (k-1)\Delta, t_0 + k\Delta)$, $k = \overline{1,9}$. Тогда для матрицы Коши $X_U(t_0+T, t_0)$ системы (0.3) с управлением U на отрезке $[t_0, t_0+T]$ справедливы равенства

$$X_U(t_0+T, t_0) = X_{U_9}(t_0+9\Delta, t_0+8\Delta) \cdot \ldots \cdot X_{U_1}(t_0+\Delta, t_0) = H_9 \cdot \ldots \cdot H_1 = H. \tag{2.28}$$

Кроме того, ввиду определения функций $U_k(t)$, $t \in [t_0 + (k-1)\Delta, t_0 + k\Delta)$, $k = \overline{1,9}$, следует, что функция $U = U(t)$, $t \in [t_0, t_0+T]$, измеримая и ограниченная на отрезке $[t_0, t_0+T]$, причем выполняется независящая от $t_0 \geqslant 0$ оценка $\|U(t)\| = \|U_k(t)\| \leqslant \Theta(r,\rho)$, в которой

$$\Theta(r,\rho) = \max\big\{\theta_k(r,\rho)\,,\ k = \overline{1,9}\big\} = \max\big\{\theta_k(r(\alpha,\beta), \rho(\beta))\,,\ k = \overline{1,9}\big\}.$$

Тогда, полагая $d = d(\alpha,\beta) := \Theta(r,\rho)$, на основании равенств (2.28) установим равномерную глобальную достижимость линейной системы (0.3), а с ней и достаточность теоремы. Теорема 2.3 доказана. □

Финансирование. Работа выполнена в рамках Государственной программы научных исследований Республики Беларусь «Конвергенция–2020» (подпрограмма 1, задание 1.2.01).

Список литературы

1. Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966. 576 с.
2. Зайцев В.А., Тонков Е.Л. Достижимость, согласованность и метод поворотов В. М. Миллионщикова // Известия вузов. Математика. 1999. № 2 (441). С. 45–56.
3. Макаров Е.К., Попова С.Н. Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем. Минск: Беларус. навука, 2012. 407 с.
4. Макаров Е.К., Попова С.Н. О глобальной управляемости полной совокупности ляпуновских инвариантов двумерных линейных систем // Дифференциальные уравнения. 1999. Т. 35. № 1. С. 97–106.

5. Богданов Ю.С. Об асимптотически эквивалентных линейных дифференциальных системах // Дифференциальные уравнения. 1965. Т. 1. № 6. С. 707–716.
6. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998. 480 с.
7. Kalman R.E. Contribution to the theory of optimal control // Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana. 1960. Vol. 5. No. 1. P. 102–119.
8. Тонков Е.Л. Критерий равномерной управляемости и стабилизация линейной рекуррентной системы // Дифференциальные уравнения. 1979. Т. 15. № 10. С. 1804–1813.
9. Зайцев В.А. Равномерная глобальная достижимость и глобальная ляпуновская приводимость линейных управляемых систем в форме Хессенберга // Итоги науки и техн. Сер. Современная математика и ее приложения. Тематический обзор. 2017. Т. 132. С. 33–37. http://mi.mathnet.ru/into160
10. Зайцев В.А. К теории стабилизации управляемых систем: дисс. ... докт. физ.-мат. наук / Ижевск, 2015. 293 с.
11. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 655 с.
12. Козлов А.А., Инц И.В. О равномерной глобальной достижимости двумерных линейных систем с локально интегрируемыми коэффициентами // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27. № 2. С. 178–192. DOI: 10.20537/vm170203
13. Козлов А.А. Об одной факторизации квадратных матриц с положительным определителем // Труды Института математики НАН Беларуси. 2017. Т. 25. № 1. С. 51–61.
14. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 543 с.
15. Бортаковский А.С. Линейная алгебра в примерах и задачах: учеб. пособие. М.: Высшая школа, 2005. 591 с.

Поступила в редакцию 01.07.2018

Козлов Александр Александрович, к. ф.-м. н., доцент, заведующий кафедрой высшей математики, Полоцкий государственный университет, 211440, Республика Беларусь, г. Новополоцк, ул. Блохина, 29.
E-mail: kozlovaa@tut.by

A. A. Kozlov

The criterion of uniform global attainability of linear systems

Citation: *Izv. Inst. Mat. Inform. Udmurt. Gos. Univ.*, 2018, vol. 52, pp. 47–58 (in Russian).

Keywords: linear control system, state-transition matrix, uniform global attainability.

MSC2010: 34D08, 34H05, 93C15

DOI: 10.20537/2226-3594-2018-52-04

In this paper, we consider a linear time-varying control system with locally integrable and integrally bounded coefficients

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad t \geqslant 0. \tag{1}$$

We construct control of the system (1) as a linear feedback $u = U(t)x$ with a measurable and bounded function $U(t)$, $t \geqslant 0$. For the closed-loop system

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U(t))x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geqslant 0, \tag{2}$$

the criterion for its uniform global attainability is established. The latter property means the existence of $T > 0$ such that for any positive α and β there exists a $d = d(\alpha, \beta) > 0$ such that for any $t_0 \geqslant 0$ and for any $(n \times n)$-matrix H, $\|H\| \leqslant \alpha$, $\det H \geqslant \beta$, there exists a measurable on $[t_0, t_0+T]$ gain matrix function $U(\cdot)$ such that $\sup\limits_{t\in[t_0,t_0+T]} \|U(t)\| \leqslant d$ and $X_U(t_0 + T, t_0) = H$, where X_U is the state transition matrix for the system (2). The proof of the criterion is based on the theorem on the representation of an arbitrary $(n \times n)$-matrix with a positive determinant in the form of a product of nine upper and lower triangular matrices with positive diagonal elements and additional conditions on the norm and determinant of these matrices.

Funding. The work was done within the framework of the State Program of Scientific Research of the Republic of Belarus “Convergence–2020” (subprogram 1, task 1.2.01).

REFERENCES

1. Bylov B.F., Vinograd R.E., Grobman D.M., Nemytskii V.V. *Teoriya pokazatelei Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoichivosti* (Theory of Lyapunov exponents and its application to problems of stability), Moscow: Nauka, 1966, 576 p.
2. Zaitsev V.A., Tonkov E.L. Attainability, compatibility and V.M. Millionshchikov's method of rotations, *Russian Mathematics*, vol. 43, no. 2, pp. 42–52. https://zbmath.org/?q=an:1049.93504
3. Makarov E.K., Popova S.N. *Upravlyaemost' asimptoticheskikh invariantov nestatsionarnykh lineinykh sistem* (Controllability of asymptotic invariants of non-stationary linear systems), Minsk: Belarus. Navuka, 2012, 407 p.
4. Makarov E.K., Popova S.N. The global controllability of a complete set of Lyapunov invariants for two-dimensional linear systems, *Differential Equations*, 1999, vol. 35, no. 1, pp. 97–107. https://zbmath.org/?q=an:0942.34054
5. Bogdanov Yu.S. On asymptotically equivalent linear differential systems, *Differ. Uravn.*, 1965, vol. 1, no. 6, pp. 707–716 (in Russian).
6. Demidovich B.P. *Lektsii po matematicheskoi teorii ustoichivosti* (Lectures on the mathematical stability theory), Moscow: Moscow State University, 1990.
7. Kalman R.E. Contribution to the theory of optimal control, *Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana*, 1960, vol. 5, no. 1, pp. 102–119.
8. Tonkov E.L. A criterion of uniform controllability and stabilization of a linear recurrent system, *Differ. Uravn.*, 1979, vol. 15, no. 10, pp. 1804–1813 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/de3820
9. Zaitsev V.A. Uniform global attainability and global Lyapunov reducibility of linear control systems in the Hessenberg form, *Journal of Mathematical Sciences*, 2018, vol. 230, issue 5, pp. 677–682. DOI: 10.1007/s10958-018-3768-2
10. Zaitsev V.A. To the theory of stabilization of control systems, *Dr. Sci. (Phys.–Math.) Dissertation*, Izhevsk, 2015, 293 p. (In Russian).
11. Horn R., Johnson C. *Matrix analysis*, Cambridge: Cambridge University Press, 1988. Translated under the title *Matrichnyi analiz*, Moscow: Mir, 1989, 655 p.
12. Kozlov A.A., Ints I.V. On uniform global attainability of two-dimensional linear systems with locally integrable coefficients, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2017, vol. 27, issue 2, pp. 178–192 (in Russian). DOI: 10.20537/vm170203
13. Kozlov A.A. On a factorization of square matrices with positive determinant, *Trudy Instituta Matematiki*, 2017, vol. 25, no. 1, pp. 51–61 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/timb268
14. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy teorii funktsii i funktsional'nogo analiza* (Elements of the theory of functions and functional analysis), Moscow: Nauka, 1976. 543 p.
15. Bortakovskii A.S. *Lineinaya algebra v primerakh i zadachakh* (Linear algebra in examples and problems), Moscow: Vysshaya shkola, 2005, 591 p.

Received 01.07.2018

Kozlov Aleksandr Aleksandrovich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Head of Department of Higher Mathematics, Polotsk State University, ul. Blokhina, 29, Novopolotsk, 211440, Belarus.
E-mail: kozlovaa@tut.by