

Літаратура

1. Забрэйко, П. П. О решении задачи Коши с неограниченной правой частью для уравнений дробного порядка / П. П. Забрэйко, С. В. Пономарева // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2020. – Т. 64, № 1. – С. 13–20.
2. А. В. Чернов, Об одном обобщении леммы Бихари на случай вольтерровых операторов в лебеговых пространствах, Матем. заметки, 2013, том 94, выпуск 5, 757–76.

ОДНО МНОГОМЕРНОЕ ОБОБЩЕННОЕ Н-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Скоромник О.В.¹, Шлапаков С.А.², Папкович М.В.¹,

¹Полоцкий государственный университет,
Блохина 29, 211440 Новополоцк, Беларусь skoromnik@gmail.com, mrapkovich@yandex.ru

²Витебский государственный университет им. П.М. Машерова,
Московский проспект 33, 210038 Витебск, Беларусь ShlapakovSA@gmail.com

Изучается многомерное интегральное преобразование

$$(\mathbf{H}_{\eta,\mu;\gamma,\delta,\lambda} f)(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\eta \int_0^\infty \mathbf{H}_{\mathbf{p},\mathbf{q}}^{\mathbf{m},\mathbf{n}} \left[\frac{\lambda \mathbf{x}^\gamma}{\mathbf{t}^\delta} \middle| \begin{matrix} (\mathbf{a}_i, \alpha_i)_{1,p} \\ (\mathbf{b}_j, \beta_j)_{1,q} \end{matrix} \right] \mathbf{t}^\mu f(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \quad (\mathbf{x} > 0), \quad (1)$$

здесь [1, п.28.4;2–3] $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$; $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$; $\mathbf{x} \cdot \mathbf{t} = \sum_{n=1}^n x_n t_n$; $\mathbf{x} > \mathbf{t}$ означает $x_1 > t_1, \dots, x_n > t_n$, аналогично для знаков $<$, $\leq$, $\geq$; $\int_0^\infty = \int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty$; множества $N_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $N_0^n = N_0 \times N_0 \times \dots \times N_0$, $\mathbb{R}_+^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} > 0\}$;

$\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_n) \in N_0^n$ и $m_1 = m_2 = \dots = m_n$; $\mathbf{n} = (\bar{n}_1, \bar{n}_2, \dots, \bar{n}_n) \in N_0^n$ и $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = \dots = \bar{n}_n$; $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in N_0$ и $p_1 = p_2 = \dots = p_n$; $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n) \in N_0$ и $q_1 = q_2 = \dots = q_n$ ($0 \leq \mathbf{m} \leq \mathbf{q}$, $0 \leq \mathbf{n} \leq \mathbf{p}$);

$\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) \in \mathbb{C}^n$; $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) \in \mathbb{C}^n$;

$\delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) \in \mathbb{R}_+^n$; $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{R}_+^n$; $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n$;

$\mathbf{a}_i = (a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n})$, $1 \leq i \leq p$, $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n} \in \mathbb{C}$ ($1 \leq i_1 \leq p_1, \dots, 1 \leq i_n \leq p_n$);

$\mathbf{b}_j = (b_{j_1}, b_{j_2}, \dots, b_{j_n})$, $1 \leq j \leq q$, $b_{j_1}, b_{j_2}, \dots, b_{j_n} \in \mathbb{C}$ ($1 \leq j_1 \leq q_1, \dots, 1 \leq j_n \leq q_n$);

$\alpha_i = (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_n})$, $1 \leq i \leq p$, $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_n} \in \mathbb{R}_+^1$ ($1 \leq i_1 \leq p_1, \dots, 1 \leq i_n \leq p_n$);

$\beta_j = (\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \dots, \beta_{j_n})$, $1 \leq j \leq q$, $\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \dots, \beta_{j_n} \in \mathbb{R}_+^1$ ($1 \leq j_1 \leq q_1, \dots, 1 \leq j_n \leq q_n$);

$\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n) \in N_0^n$ ($k_i \in N_0$, $i = 1, 2, \dots, n$) мультииндекс с $\mathbf{k}! = k_1! \dots k_n!$ и $|\mathbf{k}| = k_1 + k_2 + \dots + k_n$; для $l = (l_1, l_2, \dots, l_n) \in \mathbb{R}_+^n$

$\mathbf{D}^l = \frac{\partial^{|\mathbf{l}|}}{(\partial x_1)^{l_1} \dots (\partial x_n)^{l_n}}$, $d\mathbf{t} = dt_1 \cdot dt_2 \dots dt_n$; $\mathbf{t}^\mu = t^{\mu_1} \dots t^{\mu_n}$; $f(\mathbf{t}) = f(t_1, t_2, \dots, t_n)$; функция

$$\mathbf{H}_{\mathbf{p},\mathbf{q}}^{\mathbf{m},\mathbf{n}} \left[\frac{\lambda \mathbf{x}^\gamma}{\mathbf{t}^\delta} \middle| \begin{matrix} (\mathbf{a}_i, \alpha_i)_{1,p} \\ (\mathbf{b}_j, \beta_j)_{1,q} \end{matrix} \right] = \prod_{k=1}^n \mathbf{H}_{p_k, q_k}^{m_k, \bar{n}_k} \left[\frac{\lambda x_k^{\gamma_k}}{t_k^{\delta_k}} \middle| \begin{matrix} (a_{i_k}, \alpha_{i_k})_{1,p_k} \\ (b_{j_k}, \beta_{j_k})_{1,q_k} \end{matrix} \right]$$

представляет собой произведение Н-функций $\mathbf{H}_{p,q}^{m,n}[z]$ [4, главы 1–2]. В работе преобразование (1) изучается в весовых пространствах $\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{r}}$ суммируемых функций $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ на $\mathbb{R}_+^n$, таких что:

$$\|f\|_{\bar{\nu}, \bar{r}} = \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^1} x_n^{v_n \cdot r_n - 1} \{ \dots \{ \int_{\mathbb{R}_+^1} x_2^{v_2 \cdot r_2 - 1} \right.$$

$$\left. \int_{\mathbb{R}_+^1} x_1^{v_1 \cdot r_1 - 1} |f(x_1, \dots, x_n)|^{r_1} dx_1 \right\}^{r_2/r_1} dx_2 \}^{r_3/r_2} \dots \}^{1/r_n} dx_n < \infty,$$

$(\bar{r} = (r_1, \dots, r_n), \bar{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n, v_1 = v_2 = \dots = v_n)$. Преобразование (1) представляем как композицию многомерного Н-преобразования [3] и элементарных операторов $\mathbf{M}_\zeta$, $\mathbf{W}_\sigma$, $\mathbf{N}_a$:

$$\begin{aligned}(\mathbf{M}_\zeta f)(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^\zeta f(\mathbf{x}) \quad (\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^n), \\(\mathbf{W}_\sigma f)(\mathbf{x}) &= f\left(\frac{\mathbf{x}}{\sigma}\right) \quad (\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \in \mathbb{R}_+^n), \\(\mathbf{N}_a f)(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}^a) \quad (a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n, a \neq 0).\end{aligned}\tag{2}$$

Получаем

$$(\mathbf{H}_{\eta, \mu; \gamma, \delta, \lambda} f)(\mathbf{x}) = \delta^{-1} \lambda^{(\mu+1)/\delta} (\mathbf{N}_\gamma \mathbf{M}_{\eta/\gamma} \mathbf{H} \mathbf{M}_{-(\mu+1)/\delta-1} \mathbf{W}_{1/\lambda} \mathbf{N}_{-1/\delta} f)(\mathbf{x}).\tag{3}$$

Тогда свойства преобразования (1) будут следовать из соответствующих утверждений для Н-преобразования [3], свойств операторов (2) [2–3] и представления (3). Получены условия ограниченности и взаимной однозначности оператора преобразования (1) из одних пространств $\mathfrak{L}_{\bar{v}, \bar{r}}$ в другие, доказан аналог формулы интегрирования по частям, получены два других интегральных представления для (1) и выведены две формулы его обращения в зависимости от значений параметров $\eta, \mu, \gamma, \delta, \lambda$.

Работа выполнена в рамках задания 1.2.01 ГПНИ "Конвергенция–2025" (подпрограмма "Математические модели и методы").

Литература

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*. - Минск: Наука и техника, 1987. - 688с.
2. Ситник С.М., Скоромник О.В., Шлапаков С.А. *Многомерное общее интегральное преобразование со специальными функциями в ядре* // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. - 2019. - №3(104). - С. 18 - 27.
3. Sitnik S.M., Skoromnik O.V. *One-dimensional and multi-dimensional integral transforms of Buschman-Erdelyi type with Legendre Functions in kernels* // Transmutation Operators and Applications. Trends in Mathematics. - Cham, Switzerland : Birkhauser Basel (Springer), 2020. - P. 293 - 319.
4. Kilbas, A.A., Saigo M.H. *H - Transforms. Theory and Applications*. - London: Chapman and Hall. CRC Press, 2004. - 401 p.

УМНОЖЕНИЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ СО СТЕПЕННЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ

Т.Г. Шагова

Белгосуниверситет, механико-математический факультет
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь tanya.shagova@mail.com

Для обобщенной функции (распределения) $f \in D'(\mathbb{R})$ наиболее естественно рассматривать аппроксимацию, порожденную ее аналитическим представлением, – парой (f^+, f^-) функций, аналитических в верхней и нижней полуплоскостях соответственно, таких что f есть предел в пространстве распределений аппроксимирующего семейства f_ε вида

$$f_\varepsilon(x) = f^+(x + i\varepsilon) - f^-(x - i\varepsilon).$$

Такие семейства входят в алгебру мнемифункций на прямой [1] и произведение распределений $f, g \in D'(\mathbb{R})$ в этой алгебре определяется как произведение соответствующих аппроксимирующих семейств $f_\varepsilon g_\varepsilon$. Для анализа произведения $f_\varepsilon g_\varepsilon$ представляется в виде

$$f_\varepsilon(x)g_\varepsilon(x) = h_\varepsilon^+(x + i\varepsilon) - h_\varepsilon^-(x - i\varepsilon), \quad h_\varepsilon^\pm(z) = \pm f^\pm(z)g^\pm(z) \pm \gamma_\varepsilon^\pm(z),$$