В настоящем докладе излагаются новые результаты о разрешимости в классах регулярных решений (решений, имеющих все обобщенные по С.Л. Соболеву производные, входящие в соответствующее уравнение) задач с интегральными условиями как для классических — эллиптических, параболических и гиперболических — дифференциальных уравнений, так и для неклассических — уравнений соболевского типа, вырождающихся уравнений.

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ ЛЯПУНОВА ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ В ПОДЧИНЕННЫХ (CONFORMABLE) ДРОБНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

А. А. Козлов (Новополоцк, Беларусь)

Сегодня существует множество различных определений производной дробного порядка функции, например, дробная производная Римана–Лиувилля, Грюнвальда–Летникова, Капуто и другие. Однако они обладают не всеми свойствами, присущими производным натурального порядка. Так, например, они не подчиняются правилу Лейбница о производной произведения двух функций. В 2014 году Р. Халил и др. ввели [1] определение *подчиненной* (*conformable*) *производной дробного порядка*, которая удовлетворяет этому правилу (см., напр., [1]).

Определение 1. [1] Пусть $f\,:\,(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ и $\alpha\in(0,1)$. *Подчиненной* (*conformable*) *производной дробного порядка* α *от функции* f называется предел

$$ {}_tT_\alpha(f)(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\big((f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})-f(t))/\varepsilon\big)\quad \text{при любом } t>0. $$

Функцию $f(\cdot)$ в таком случае будем называть *α–дифференцируемой* [1].

Возьмем любое число $\alpha\in(0,1)$ и рассмотрим линейную систему в подчиненых дробных производных порядка α с ограниченной матрицей коэффициентов

$$ {}_tT_\alpha(x)=A(t)x,\quad x\in\mathbb{R}^n,\quad t>0. \tag{1} $$

Подчинение правилам вычисления производной суммы и произведения функций (свойственным классической производной) рассматриваемыми производными позволяет ввести по аналогии линейными диференциальными системами [2]

Определение 2. *Преобразованием Ляпунова* системы (1) назовем преобразование $x=L(t)y$, в котором $(n\times n)$–матрица $L(t)$ является ограниченной, обратимой, α–дифференцируемой при всяком $t>0$, и для нее выполняется неравенство $\sup\{\|L(t)\|+\|L^{-1}(t)\|+\|{}_tT_\alpha(L(t))\|,\,t>0\}<+\infty$.

Применив преобразование Ляпунова к системе (1), получим линейную систему в подчиненных производных (того же порядка α, что и система (1)) с ограниченными коэффициентами

$$ {}_tT_\alpha(y)=L^{-1}(t)(A(t)-{}_tT_\alpha(L(t)))y, \tag{2} $$

Определение 3. Системы (1) и (2), связанные преобразованием Ляпунова, будем называть *асимптотически эквивалентными* (*по Богданову*).

Аналогично решениям асимптотически эквивалентных линейных нестационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений (см., напр., [2]), решения асимптотически эквивалентных линейных систем в подчиненных дробных производных имеют схожий характер поведения (асимптотику) при $t\to+\infty$.

Благодарности. Работа выполнена в рамках программы ГПНИ “Конвергенция–2025”, подпрограмма “Математические методы и модели”.

Литература

1. *Khalil R., Al Horani M., Yousef A., Sababheh M.* A new definition of fractional derivative *Journ. of Computational and Applied Mathematics.* Vol. 264 (2014), 65–70.

2. *Богданов Ю.С.* Об асимптотически эквивалентных линейных дифференциальных системах. *Дифференц. уравнения.* Т. 1, No. 6 (1965), 707–716.