УДК 517.983

РЕШЕНИЕ ОДНОГО КЛАССА МНОГОМЕРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА С ФУНКЦИЕЙ БЕССЕЛЯ — КЛИФФОРДА В ЯДРЕ ПО ПИРАМИДАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

М. В. Папкович, О. В. Скоромник

Полоцкий государственный университет

Аннотация. Рассматривается многомерное интегральное уравнение первого рода с функцией Бесселя — Клиффорда в ядре по ограниченной пирамидальной области многомерного евклидова пространства специального вида. Следуя методике Я. Тамаркина, устанавливается формула решения исследуемого уравнения в замкнутой форме, даются необходимые и достаточные условия его разрешимости в пространстве суммируемых функций. Доказанные утверждения обобщают результаты, полученные ранее для многомерного уравнения типа Абеля и для соответствующих одномерных интегральных уравнений первого рода.

Ключевые слова: интегральные преобразования, интегральные уравнения, функция Бесселя — Клиффорда, функция Бесселя первого рода, пространство интегрируемых функций, дробные интегралы и производные.

Введение

Одномерные интегральные уравнения первого рода, обобщающие классическое интегральное уравнение Абеля и содержащие в ядрах гипергеометрическую функцию Гаусса, функцию Лежандра, вырожденную гипергеометрическую функцию (функцию Куммера), функцию Бесселя, другие специальные функции изучены многими авторами (см. обзор результатов и библиографию в [1, §§ 39.1, 39.2]). Такие уравнения возникают при изучении краевых задач для уравнений гиперболического и смешанного типа с краевыми условиями, содержащими обобщенные дробные интегралы и производные [2]. В большинстве работ метод исследования уравнений типа Абеля с гипергеометрическими функциями в ядрах основывается на представлении интегральных операторов этих уравнений в виде композиции операторов дробного интегрирования Римана — Лиувилля со степенными или экспоненциальными весами и использовании известных свойств дробных интегралов. На этом пути были даны достаточные условия разрешимости рассматриваемых интегральных уравнений в некоторых классах функций и получены их решения в квадратурах [1, §§ 35.1, 35.2, 37.1].

Исследование необходимых и достаточных условий разрешимости вышеуказанных уравнений является более сложной задачей. Хорошо известен классический результат Я. Тамаркина о разрешимости интегрального уравнения Абеля в пространстве $L_1(a,b)$ суммируемых функций на конечном отрезке $[a,b]$ действительной оси [1, теорема 2.1]. В работе [3] аналогичный результат был получен для многомерного интегрального уравнения типа Абеля по ограниченным пирамидальным областям евклидова пространства специального вида. Интерес к исследованию таких уравнений вызван их приложениями в задачах исследования отражения волн от прямолинейной границы [4, с. 48], [5] и в задачах сверхзвукового обтекания пространственных углов [6] (см. также [1, §§ 24.1, 28.4]).

Следуя методике Я. Тамаркина, в работах [7, 8] были установлены необходимые и достаточные условия разрешимости в $L_1(a,b)$ одного класса интегральных уравнений типа Абеля с гипергеометрической функцией Гаусса и его многомерного аналога по пирамидальной области. В [9] получены решения в замкнутой форме более общих интегральных уравнений по пирамидальным областям и исследована картина их разрешимости в пространстве суммируемых функций. В [10–12] аналогичные результаты получены для отдельных классов многомерных интегральных уравнений первого рода с функцией Лежандра, вырожденной гипергеометрической функции Куммера, с функцией Бесселя — Клиффорда в ядрах по пирамидальным областям.

Целью настоящей работы является продолжение этих исследований. Мы даем решение в замкнутой форме еще одного многомерного интегрального уравнения с функцией Бесселя — Клиффорда в ядре по пирамидальной области и устанавливаем необходимые и достаточные условия его разрешимости в пространстве интегрируемых функций. Нами приводятся вспомогательные сведения, решение рассматриваемого уравнения в квадратурах, а также устанавливаются необходимые и достаточные условия его разрешимости.

Предварительные сведения

Введем некоторые обозначения [1, §28.4]. Пусть $\mathrm{N}=\{1,2,...\}$ — множество натуральных чисел, $\mathrm{N}_0=\mathrm{N}\bigcup\{0\}$, R^n — n-мерное евклидово пространство. Для $\mathbf{x}=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathrm{R}^n$ и $\mathbf{t}=(t_1,t_2,...,t_n)\in\mathrm{R}^n$ обозначим через $\mathbf{x}\cdot\mathbf{t}=\sum_{k=1}^{n}x_k t_k$ их скалярное произведение, в частности, $\mathbf{x}\cdot\mathbf{1}=\sum_{k=1}^{n}x_k$ для $\mathbf{1}=(1,1,...,1)$. Пусть $\mathbf{x}>\mathbf{t}$ означает $x_1>t_1,\ x_2>t_2,...,x_n>t_n$ и аналогично для знака нестрогого неравенства $\geq$, $\mathrm{R}^n_+=\{\mathbf{x}\in\mathrm{R}^n:\mathbf{x}>0\}$, а $\mathbf{k}=(k_1,k_2,...,k_n)\in\mathrm{N}_0^n=\mathrm{N}_0\times\mathrm{N}_0\times...\times\mathrm{N}_0$, где $(k_i\in\mathrm{N}_0, i=1,2,...,n)$ — мультииндекс с $\mathbf{k}!=k_1!k_2!\cdots k_n!$ и $|\mathbf{k}|=k_1+k_2+...+k_n$. Для $\mathbf{x}\in\mathrm{R}^n$, $\mathbf{k}\in\mathrm{N}_0^n$, $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\in\mathrm{R}^n_+$ и $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)\in\mathrm{R}^n_+$ положим $\mathbf{x}^\alpha=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$, $\Gamma(\alpha)=\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\cdots\Gamma(\alpha_n)$, $(\mathbf{x})_{\mathrm{k}}=(x_1)_{k_1}(x_2)_{k_2}\cdots(x_n)_{k_n}$, $\mathbf{D}^\alpha=\dfrac{\partial^{|\alpha|}}{(\partial x_1)^{\alpha_1}(\partial x_2)^{\alpha_2}...(\partial x_n)^{\alpha_n}}$, $\mathbf{x}^\sigma-\mathbf{t}^\sigma=(x_1^{\sigma_1}-t_1^{\sigma_1})(x_1^{\sigma_1}-t_1^{\sigma_1})\cdots(x_n^{\sigma_n}-t_n^{\sigma_n})$, где $(z)_n$ — символ Похгаммера: $(z)_0\equiv1$, $(z)_k=z(z+1)...(z+k-1)=\Gamma(z+n)/\Gamma(z)\quad(z\in C; n\in\mathrm{N})$, $\lambda=(\lambda,...,\lambda)\in\mathrm{R}^n_+$.

Пусть $A=\|a_{jk}\|$ $(a_{jk}\in\mathrm{R}^1)$ — матрица порядка $n\times n$ с определителем $|A|=\det A$, вектор-строки которой обозначим через $\mathbf{a}_j=(a_{j1},...,a_{jn})$, элементы обратной матрицы A^{-1} обозначим через $\tilde{a}_{jk}$. Без ограничения общности положим $|A|=1$. Пусть [1, §28.4]

$$A\cdot\mathbf{x}=(\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{x},\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{x},...,\mathbf{a}_n\cdot\mathbf{x}),\ (A\cdot\mathbf{x})^\alpha=(\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{x})^{\alpha_1}(\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{x})^{\alpha_2}\cdots(\mathbf{a}_n\cdot\mathbf{x})^{\alpha_n}.$$

Для $\mathbf{b}=(b_1,b_2,...,b_n)\in\mathrm{R}^n$, $\mathbf{c}=(c_1,c_2,...,c_n)\in\mathrm{R}^n$ и $r\in\mathrm{R}^1$ обозначим через

$$A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})=\{\mathbf{t}\in\mathrm{R}^n:A\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{t})\geq0,\ \mathbf{c}\cdot\mathbf{t}+r\geq0\}\tag{1}$$

n-мерную ограниченную в R^n пирамиду с вершиной в точке $\mathbf{b}$, основанием на гиперплоскости $\mathbf{c}\cdot\mathbf{t}+r=0$ и боковыми гранями, лежащими на гиперплоскостях $\mathbf{a}_j\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{t})=0$ $(j=1,2,...,n)$. В частности, когда $A=E=\|\delta_{jk}\|$ — единичная матрица, $\mathbf{c}=(1,...,1)$ и $r=0$, $E_{1,0}(\mathbf{b})=E_1(\mathbf{b})$ является модельной пирамидой:

$$E_1(\mathbf{b})=\{\mathbf{t}\in\mathrm{R}^n:\mathbf{t}\leq\mathbf{b},\mathbf{1}\cdot\mathbf{t}\geq0\}.\tag{2}$$

Известно [1, лемма 28.2], что для ограниченности пирамиды (1) необходимо и достаточно выполнение условия $A^{-1}\mathbf{c}\cdot\mathbf{b}>0$ (соответственно $A^{-1}\mathbf{c}>0$).

Для $\nu=(\nu_1,\nu_2,...,\nu_n)\in\mathrm{R}^n$ и $\mathbf{x}=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathrm{R}^n$ введем функцию

$$\overline{J}_\nu[\mathbf{x}]=\prod_{j=1}^{n}\overline{J}_{\nu_j}[x_j],\tag{3}$$

представляющую собой произведение функций Бесселя — Клиффорда $\overline{J}_\mu(z)$, определяемых по формуле [1, §37.1]

$$\overline{J}_\mu(z)=\Gamma(\mu+1)\left(\frac{z}{2}\right)^{-\mu}J_\mu(z),\ |z|<\infty;\tag{4}$$

где $J_\mu(z)$ — функция Бесселя первого рода [1, §1.3], [12, гл. 7]:

$$J_\mu(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\mu}}{\Gamma(\mu+k+1)k!}. \tag{5}$$

Рассматриваемое нами интегральное уравнение имеет вид:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})}\left(A\cdot(\mathbf{x}^\sigma-\mathbf{t}^\sigma)\right)^{\alpha-1}\overline{J}_{\alpha-1}\left[A\cdot\lambda\sqrt{(\mathbf{x}^\sigma-\mathbf{t}^\sigma)}\,\right]f(\mathbf{t})d\mathbf{t}=g(\mathbf{x}),\quad \mathbf{x}\in A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b}), \tag{6}$$

где $A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})\,(\mathbf{c},\mathbf{b}\in \mathrm{R}^n, r\in\mathrm{R}^1)$ — пирамида (1); $\mathbf{x},\mathbf{t},\alpha\in\mathrm{R}^n$, $0<\alpha<1$, $\lambda,\sigma\in\mathrm{R}^n_+$ и $\overline{J}_{\alpha-1}\left[A\cdot\lambda\sqrt{(\mathbf{x}^\sigma-\mathbf{t}^\sigma)}\,\right]$ — функция вида (3). Данное уравнение при $\sigma=1$ обобщает соответствующее одномерное интегральное уравнение [1, §37.1].

Нам понадобятся второй интеграл Сонина для функции Бесселя (5) [13, 7.7(4)]:

$$\int\limits_0^t\sqrt{\tau^\mu(t-\tau)^\nu}\,J_\mu(\alpha\sqrt{\tau})J_\nu(\beta\sqrt{t-\tau})d\tau=2\alpha^\mu\beta^\nu\sqrt{\left(\alpha^2+\beta^2\right)^{-(\nu+\mu+1)}}\,J_{\nu+\mu+1}\left(t\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right), \tag{7}$$

$$\mathrm{Re}(\mu)>-1,\ \mathrm{Re}(\nu)>-1;$$

а также вспомогательное утверждение.

Лемма 1 [1; §28] *Если функция $f(\mathbf{t},\boldsymbol{\tau})$, определенная на $A_\mathbf{c}(\mathbf{b})\times A_\mathbf{c}(\mathbf{b})$, измерима, то верна следующая формула перестановки порядка интегрирования:*

$$\int\limits_{A_\mathbf{c}(\mathbf{b})}d\mathbf{t}\int\limits_{A_\mathbf{c}(\mathbf{t})}f(\mathbf{t},\boldsymbol{\tau})d\boldsymbol{\tau}=\int\limits_{A_\mathbf{c}(\mathbf{b})}d\boldsymbol{\tau}\int\limits_{\sigma(\mathbf{b},\boldsymbol{\tau})}f(\mathbf{t},\boldsymbol{\tau})d\mathbf{t}, \tag{8}$$

$$\sigma(\mathbf{b},\boldsymbol{\tau})=\left\{\mathbf{t}\in\mathrm{R}^n: A\cdot\boldsymbol{\tau}\le A\cdot\mathbf{t}\le A\cdot\mathbf{b}\right\}, \tag{9}$$

в предположении, что один из повторных интегралов в (8) сходится абсолютно.

Решение в замкнутой форме

Сначала дадим формальное решение уравнения (6). Заменяя в (6) $\mathbf{x}$ на $\mathbf{t}$ и $\mathbf{t}$ на $\mathbf{u}$, умножая обе части полученного равенства на

$$\left(A\cdot(\mathbf{x}^\sigma-\mathbf{t}^\sigma)\right)^{-\alpha}\overline{J}_{-\alpha}\left[A\cdot\lambda\sqrt{(\mathbf{x}^\sigma-\mathbf{t}^\sigma)}\right]\sigma^1\mathbf{t}^{\sigma-1},$$

где $\boldsymbol{\sigma}^\mathbf{1}=\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_n$, $\mathbf{t}^{\sigma-1}=t_1^{\sigma_1-1}t_2^{\sigma_2-1}\cdots t_n^{\sigma_n-1}$, интегрируя по пирамиде $A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})$, получаем:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})}\left(A\cdot(\mathbf{x}^\sigma-\mathbf{t}^\sigma)\right)^{-\alpha}\overline{J}_{-\alpha}\left[A\cdot\lambda\sqrt{(\mathbf{x}^\sigma-\mathbf{t}^\sigma)}\right]\sigma^1\mathbf{t}^{\sigma-1}d\mathbf{t}\times\\&\times\int\limits_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{t})}\left(A\cdot(\mathbf{t}^\sigma-\mathbf{u}^\sigma)\right)^{\alpha-1}\overline{J}_{\alpha-1}\left[A\cdot\lambda\sqrt{(\mathbf{t}^\sigma-\mathbf{u}^\sigma)}\right]f(\mathbf{u})d\mathbf{u}=\\&=\int\limits_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})}\left(A\cdot(\mathbf{x}^\sigma-\mathbf{t}^\sigma)\right)^{-\alpha}\overline{J}_{-\alpha}\left[A\cdot\lambda\sqrt{(\mathbf{x}^\sigma-\mathbf{t}^\sigma)}\right]\sigma^1\mathbf{t}^{\sigma-1}g(\mathbf{t})d\mathbf{t},\quad\mathbf{x}\in A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b}).\end{aligned} \tag{10}$$

Изменяем порядок интегрирования в левой части (10) согласно формуле (8):

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})}f(\mathbf{u})d\mathbf{u}\int\limits_{\sigma(\mathbf{x},\mathbf{u})}\left(A\cdot(\mathbf{x}^\sigma-\mathbf{t}^\sigma)\right)^{-\alpha}\left(A\cdot(\mathbf{t}^\sigma-\mathbf{u}^\sigma)\right)^{\alpha-1}\times\\&\times\overline{J}_{\alpha-1}\left[A\cdot\lambda\sqrt{(\mathbf{t}^\sigma-\mathbf{u}^\sigma)}\right]\overline{J}_{-\alpha}\left[A\cdot\lambda\sqrt{(\mathbf{x}^\sigma-\mathbf{t}^\sigma)}\right]\sigma^1\mathbf{t}^{\sigma-1}d\mathbf{t}=\\&=\int\limits_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})}\left(A\cdot(\mathbf{x}^\sigma-\mathbf{t}^\sigma)\right)^{-\alpha}\overline{J}_{-\alpha}\left[A\cdot\lambda\sqrt{(\mathbf{x}^\sigma-\mathbf{t}^\sigma)}\right]\sigma^1\mathbf{t}^{\sigma-1}g(\mathbf{t})d\mathbf{t},\end{aligned} \tag{11}$$

где $\sigma(\mathbf{x},\mathbf{u})=\left\{\mathbf{t}\in\mathrm{R}^n: A\cdot\mathbf{u}\le A\cdot\mathbf{t}\le A\cdot\mathbf{x}\right\}$.

Для вычисления внутреннего интеграла в левой части (11) вводим новые переменные

$$\mathbf{s}_j = \mathbf{a}_j \cdot \lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma), \ \mathbf{a}_j = (a_{j1}, ..., a_{jn}) \quad (j = 1, ..., n).$$

Далее по формуле (4) выражаем функцию Бесселя — Клиффорда $\overline{J}_\mu[z]$ через функцию Бесселя $J_\mu[z]$, используем формулу (7), для внутреннего интеграла в правой части (11) получаем:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{\sigma(\mathbf{x},\mathbf{u})} \left(A\cdot(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)\right)^{-\alpha} \left(A\cdot(\mathbf{t}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma)\right)^{\alpha-1} \overline{J}_{\alpha-1}\left[A\cdot\lambda\sqrt{(\mathbf{t}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma)}\right] \overline{J}_{-\alpha}\left[A\cdot\lambda\sqrt{(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)}\right] \times$$

$$\times \sigma^1 \mathbf{t}^{\sigma-1} d\mathbf{t} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)\sqrt{\lambda}}{2\Gamma(\alpha)} \prod_{j=1}^n \left[\int\limits_0^{\mathbf{a}_j\cdot\lambda\sqrt{(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma)}} \sqrt{\mathbf{s}_j^{-\alpha_j} \left(\mathbf{a}_j \cdot \lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma) - \mathbf{s}_j\right)^{\alpha_j - 1}} \times \right.$$

$$\left. \times J_{-\alpha}\left[\sqrt{\lambda}\sqrt{\mathbf{s}_j}\right] J_{\alpha_j - 1}\left[\sqrt{\lambda}\sqrt{\mathbf{a}_j\cdot\lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma) - \mathbf{s}_j}\right] d\mathbf{s}_j \right] = \Gamma(\mathbf{1}-\alpha) J_0\left(\sqrt{2\lambda}\ A\cdot\lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma)\right).$$

На основании этого равенство (11) принимает вид:

$$\int\limits_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})} J_0\left(\sqrt{2\lambda}\ A\cdot\lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{u}^\sigma)\right) f(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = f_{A_{\mathbf{c},r}}^{\lambda,\alpha}(\mathbf{x}),$$

или

$$\int\limits_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})} J_0\left(\sqrt{2\lambda}\ A\cdot\lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)\right) f(\mathbf{t}) d\mathbf{t} = f_{A_{\mathbf{c},r}}^{\lambda,\alpha}(\mathbf{x}), \tag{12}$$

где

$$f_{A_{\mathbf{c},r}}^{\lambda,\alpha}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})} \left(A\cdot(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)\right)^{-\alpha} \overline{J}_{-\alpha}\left[A\cdot\lambda\sqrt{(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)}\right] \sigma^1 \mathbf{t}^{\sigma-1} g(\mathbf{t}) d\mathbf{t}. \tag{13}$$

Совершая замену переменных

$$\mathbf{x} + \frac{r}{n\mathbf{c}} = A^{-1} \cdot \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{d}}, \ \mathbf{t} + \frac{r}{n\mathbf{c}} = A^{-1} \cdot \left(\frac{\boldsymbol{\tau}}{\mathbf{d}}\right), \tag{14}$$

где $\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{d}} = \left(\frac{y_1}{d_1}, ..., \frac{y_n}{d_n}\right) \in \mathrm{R}^n$, $\mathbf{d} = A^{-1} \cdot \mathbf{c}$, переписываем (12) в виде

$$\int\limits_{E_1(\mathbf{y})} \psi(\boldsymbol{\tau}) d\boldsymbol{\tau} = \varphi(\mathbf{y}), \tag{15}$$

где $E_1(\mathbf{y})$ — модельная пирамида (2),

$$\psi(\boldsymbol{\tau}) = f^*\left(A^{-1} \cdot \left(\frac{\boldsymbol{\tau}}{\mathbf{d}}\right) - \frac{r}{n\,\mathbf{c}}\right), \ \varphi(\mathbf{y}) = f_{A_{\mathbf{c},r}}^{\lambda,\alpha}\left(A^{-1} \cdot \left(\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{d}}\right) - \frac{r}{n\mathbf{c}}\right) \prod_{j=1}^n d_j.$$

Для обращения уравнения (15) перепишем его в виде

$$\int\limits_{-(y_1+...+y_{n-1})}^{y_n} d\tau_n \int\limits_{-(y_1+...+y_{n-2}+\tau_n)}^{y_{n-1}} d\tau_{n-1} ... \int\limits_{-(\tau_2+...+\tau_n)}^{y_1} \psi(\boldsymbol{\tau}) d\tau_1 = \varphi(\mathbf{y}). \tag{16}$$

Дифференцируя последовательно по $y_n, y_{n-1}, ..., y_1$, получаем

$$\psi(\mathbf{y}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \varphi(\mathbf{y}) = \frac{\partial}{\partial y_1} ... \frac{\partial}{\partial y_n} \varphi(\mathbf{y}).$$

Возвращаясь опять к переменной $\mathbf{x} = A^{-1} \cdot \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{d}} - \frac{r}{n\,\mathbf{c}}$, учитывая равенства

$$\frac{\partial}{\partial y_k} = \sum_{j=1}^n \frac{\tilde{a}_{jk}}{d_k} \frac{\partial}{\partial y_j} \quad (k = 1, ..., n), \tag{17}$$

где $\tilde{a}_{jk}$ $(j, k = 1, ..., n)$ — элементы обратной матрицы A^{-1}, и $J_0\left(A\cdot\lambda(\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{x}^\sigma)\right) = J_0(0) = 1$, приходим к следующей формуле решения уравнения (6):

$$f(\mathbf{x})=\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\tilde{a}_{jk}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\left\{\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})}\left(A\cdot(\mathbf{x}^{\sigma}-\mathbf{t}^{\sigma})\right)^{-\alpha}\bar{J}_{-\alpha}\left[A\cdot\lambda\sqrt{(\mathbf{x}^{\sigma}-\mathbf{t}^{\sigma})}\right]\sigma^{1}\mathbf{t}^{\sigma-1}g(\mathbf{t})d\mathbf{t}\right\}. \quad (18)$$

Таким образом, мы доказали, что если уравнение (6) разрешимо, то его решение имеет вид (18).

Необходимые и достаточные условия разрешимости

Докажем необходимые и достаточные условия разрешимости уравнения (6) в пространстве $L_1\left(A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})\right)$:

$$L_1\left(A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})\right)=\left\{f(\mathbf{x}):\int\limits_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})}\left|f(\mathbf{t})\right|d\mathbf{t}<\infty\right\}. \quad (19)$$

Введем пространство

$$I_{A_{\mathbf{c},r}}\left(L_1\right)=\left\{\varphi\ :\varphi(\mathbf{x})=\int\limits_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x}),A\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{t})\geq A\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{t})}h(\mathbf{t})d\mathbf{t},\ h(\mathbf{t})\in L_1\left(A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})\right)\right\}. \quad (20)$$

Пространство $I_{A_{\mathbf{c},r}}(L_1)$ играет ту же роль для уравнения (6), что и пространство $AC\left([a,b]\right)$ абсолютно непрерывных функций для классического интегрального уравнения Абеля [1, §2.2]. Отметим, что если $\varphi\in I_{A_{\mathbf{c},r}}(L_1)$, то почти всюду на $A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})$ существуют ее частные производные и

$$\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\tilde{a}_{jk}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\varphi(\mathbf{x})=h(\mathbf{x}).$$

В частности, если $A=E$ — единичная матрица, $\mathbf{c}=\mathbf{1}=(1,\ldots,1)$ и $r=0$, (19)–(20) принимают вид соответственно

$$L_1\left(E_{\mathbf{1}}(\mathbf{b})\right)=\left\{f(\mathbf{x}):\int\limits_{E_{\mathbf{1}}(\mathbf{x})}\left|f(\mathbf{t})\right|d\mathbf{t}<\infty\right\},$$

$$I_{E_{\mathbf{1}}}\left(L_1\right)=\left\{\varphi:\ \varphi(\mathbf{x})=\int\limits_{E_{\mathbf{1}}(\mathbf{x}),(\mathbf{b}-\mathbf{t})\geq(\mathbf{x}-\mathbf{t})}h(\mathbf{t})d\mathbf{t},\ h(\mathbf{t})\in L_1\left(E_{\mathbf{1}}(\mathbf{b})\right)\right\},$$

где $h(\mathbf{x})=\dfrac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\varphi(\mathbf{x})\equiv\dfrac{\partial}{\partial x_1}\dfrac{\partial}{\partial x_2}\ldots\dfrac{\partial}{\partial x_n}\varphi(\mathbf{x})$.

Имеет место следующее утверждение, являющееся аналогом классической теоремы Тамаркина о разрешимости одномерного интегрального уравнения Абеля в $L_1(a,b)$.

Теорема 1. *Для разрешимости многомерного интегрального уравнения типа Абеля (6) с* $\alpha\in\mathrm{R}^n$ $(0<\alpha<1)$ *и* $\lambda,\sigma\in\mathrm{R}_+^n$ *в пространстве* $L_1\left(A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})\right)$ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

$$f_{A_{\mathbf{c},r}}^{\lambda,\alpha}(\mathbf{x})=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_{A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{x})}\left(A\cdot(\mathbf{x}^{\sigma}-\mathbf{t}^{\sigma})\right)^{-\alpha}\bar{J}_{-\alpha}\left[A\cdot\lambda\sqrt{(\mathbf{x}^{\sigma}-\mathbf{t}^{\sigma})}\right]\sigma^{1}\mathbf{t}^{\sigma-1}g(\mathbf{t})d\mathbf{t}\in I_{A_{\mathbf{c},r}}\left(L_1\right) \quad (21)$$

и

$$\left[f_{A_{\mathbf{c},r}}^{\lambda,\alpha}(\mathbf{x})\right]_{\mathbf{c}\cdot\mathbf{x}+r=0}=\left[\sum_{j=1}^{n}\tilde{a}_{jk}\frac{\partial}{\partial x_j}f_{A_{\mathbf{c},r}}^{\lambda,\alpha}(\mathbf{x})\right]_{\mathbf{c}\cdot\mathbf{x}+r=0}=\ldots=\left[\prod_{k=2}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\tilde{a}_{jk}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)f_{A_{\mathbf{c},r}}^{\lambda,\alpha}(\mathbf{x})\right]_{\mathbf{c}\cdot\mathbf{x}+r=0}=0. \quad (22)$$

При выполнении этих условий уравнение (6) разрешимо в $L_1\left(A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})\right)$ *и его единственное решение дается формулой (18).*

Доказательство.

В модельном случае $A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})=E_1(\mathbf{b})$ утверждение теоремы вытекает из (15), (16). В случае произвольной пирамиды $A_{\mathbf{c},r}(\mathbf{b})$ оно получается из (15), (16) после замены переменных (14) с учетом (17).

Следствие 1. *Многомерное модельное интегральное уравнение типа Абеля*

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_{E_1(\mathbf{x})}(\mathbf{x}^{\sigma}-\mathbf{t}^{\sigma})^{\alpha-1}\overline{J}_{\alpha-1}\left[\lambda\sqrt{(\mathbf{x}^{\sigma}-\mathbf{t}^{\sigma})}\right]f(\mathbf{t})d\mathbf{t}=g(\mathbf{x}),\quad \mathbf{x}\in E_1(\mathbf{b}), \tag{23}$$

с $\alpha\in\mathrm{R}^n$ $(0<\alpha<1)$ *и* $\lambda,\sigma\in\mathrm{R}_+^n$ *разрешимо в пространстве* $L_1\left(E_1(\mathbf{b})\right)$ *тогда и только тогда, когда*

$$f_{E_1}^{\lambda,\alpha}(\mathbf{x})=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_{E_1(\mathbf{x})}(\mathbf{x}^{\sigma}-\mathbf{t}^{\sigma})^{-\alpha}\overline{J}_{-\alpha}\left[\lambda\sqrt{(\mathbf{x}^{\sigma}-\mathbf{t}^{\sigma})}\right]\sigma^1\mathbf{t}^{\sigma-1}g(\mathbf{t})d\mathbf{t}\in I_{E_1}\left(L_1\right)$$

и

$$\left[f_{E_1}^{\lambda,\alpha}(\mathbf{x})\right]_{1\cdot\mathbf{x}=0}=\left[\frac{\partial}{\partial x_n}f_{E_1}^{\lambda,\alpha}(\mathbf{x})\right]_{1\cdot\mathbf{x}=0}=\ldots=\left[\frac{\partial}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial}{\partial x_n}f_{E_1}^{\lambda,\alpha}(\mathbf{x})\right]_{1\cdot\mathbf{x}=0}=0.$$

При выполнении этих условий уравнение (23) разрешимо в $L_1\left(E_1(\mathbf{b})\right)$ *и его единственное решение дается формулой*

$$f(\mathbf{x})=\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}f_{E_1}^{\lambda,\alpha}(\mathbf{x})=\frac{\partial}{\partial\mathbf{x}}\left\{\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_{E_1(\mathbf{x})}(\mathbf{x}^{\sigma}-\mathbf{t}^{\sigma})^{-\alpha}\,\overline{J}_{-\alpha}\left[\lambda\sqrt{(\mathbf{x}^{\sigma}-\mathbf{t}^{\sigma})}\right]\sigma^1\mathbf{t}^{\sigma-1}g(\mathbf{t})d\mathbf{t}\right\}.$$

Заключение

В работе проведено исследование многомерного интегрального уравнения с функцией Бесселя – Клиффорда по ограниченной пирамидальной области. Получено его решение в замкнутой форме, установлены необходимые и достаточные условия разрешимости в пространстве суммируемых функций.

Литература

1. *Самко, С. Г.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. – Минск : Наука и техника, 1987. – 688 с.

2. *Репин, О. А.* Краевые задачи со сдвигом для уравнений гиперболического и смешанного типов / О. А. Репин. – Саратов: изд-во Саратовского ун-та, 1992. – 183 с.

3. *Kilbas, A. A.* On integrable solution of a multidimensional Abel-type integral equation / A. A. Kilbas, M. Saigo, H. Takushima // Fukuoka Univ. Sci. Rep. – 1995. – V. 25, № 1. – P. 1–9.

4. *Михлин, С. Г.* Лекции по интегральным уравнениям / С. Г. Михлин. – М. : Физматгиз, 1959. – 232 с.

5. *Преображенский, Н. Г.* Абелева инверсия в физических задачах: Инверсия Абеля и ее обобщения / Н. Г. Преображенский. – Новосибирск : Ин-т. теор. и прикл. механики СО АН СССР, 1978. – С. 6–24.

6. *Федосов, В. П.* О некоторых обобщенных уравнениях Абеля / В.П. Федосов. – Новосибирск: Ин-т теор. и прикл. механики СО АН СССР, 1978. – С. 106.

7. *Килбас, А. А.* Решение многомерных гипергеометрических уравнений типа Абеля / А. А. Килбас, Р. К. Райна, М. Сайго, Г. М. Сривастава // Доклады НАН Беларуси. – 1995. – Т. 43, № 2. – С. 23–26.

8. *Raina, K. L.* Solvability of some Abel-type integral equations involving the Gauss hypergeometry Function as kernels in the space of summable functions / K. L. Raina, T. M. Srivastava, A. A. Kilbas, M. Saigo // ANZIAM J. – 2001. – V. 43, № 2. – P. 291–320.

9. *Килбас, А. А.* Решение многомерных интегральных уравнений типа Абеля с гипергеометрической функцией Гаусса в ядрах по пирамидальной области / А. А. Килбас, О.В. Скоромник // Труды Ин-та математики / НАН Беларуси, Ин-т математики. – Минск, 2009. – Т. 17, № 1. – С. 71–78.

10. *Килбас, А. А.* Решение многомерного интегрального уравнения первого рода с функцией Лежандра в ядре по пирамидальной области / А. А. Килбас, О. В. Скоромник // Доклады академии наук (Российская Академия наук). – 2009. – Т. 429, № 4. – С. 442–446.

11. *Скоромник, О. В.* Решение многомерного интегрального уравнения первого рода с функцией Куммера в ядре по пирамидальной области / О. В. Скоромник, С. А. Шлапаков // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2014. – № 1. – С. 12–17.

12. *Скоромник, О. В.* Решение многомерного интегрального уравнения типа Абеля с функцией Бесселя – Клиффорда в ядре по пирамидальной области / О. В. Скоромник, С. А. Шлапаков // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2018. – № 2(99). – С. 5–13.

13. *Бейтмен, Г.* Высшие трансцендентные функции: в 3 т. / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. – М. : Наука, 1973. – Т. 2: Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. – 296 с.