## Многомерное обобщенное H–преобразование в весовых пространствах суммируемых функций

***Скоромник О.В.***

*УО "ПГУ", Новополоцк, Беларусь; skoromnik@gmail.com*

*И*зучается многомерное интегральное преобразование

$$\left(\mathrm{H}_{\eta,\mu;\gamma,\delta,\lambda}f\right)(\mathbf{x})=\mathbf{x}^{\eta}\int\limits_{\mathbf{0}}^{\infty}\mathrm{H}^{\mathbf{m},\,\mathbf{n}}_{\mathbf{p},\,\mathbf{q}}\left[\frac{\lambda\mathbf{x}^{\gamma}}{\mathbf{t}^{\delta}}\left|\begin{array}{c}(\mathbf{a}_i,\alpha_i)_{1,p}\\(\mathbf{b}_j,\beta_j)_{1,q}\end{array}\right.\right]\mathbf{t}^{\mu}f(\mathbf{t})d\mathbf{t}\ \ (\mathbf{x}>0),\qquad(1)$$

здесь [1, п.28.4;2–3] $\mathbf{x}=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathrm{R}^n$ ; $\mathbf{t}=(t_1,t_2,...,t_n)\in\mathrm{R}^n$; $\mathbf{x}\cdot\mathbf{t}=\sum\limits_{n=1}^{n}x_nt_n$; $\mathbf{x}>\mathbf{t}$ означает $x_1>t_1,...,x_n>t_n$, аналогично для знаков $<$, $\leq$, $\geq$; $\int\limits_{\mathbf{0}}^{\infty}=\int\limits_{\mathbf{0}}^{\infty}\int\limits_{\mathbf{0}}^{\infty}\cdots\int\limits_{\mathbf{0}}^{\infty}$;множества $\mathrm{N}_0=\mathrm{N}\bigcup\{0\}$,$\mathrm{N}_0^n=\mathrm{N}_0\times\mathrm{N}_0\times...\times\mathrm{N}_0$, $\mathrm{R}^n_+=\{\mathbf{x}\in\mathrm{R}^n,\ \mathbf{x}>0\}$;

$\mathbf{m}=(m_1,m_2,...,m_n)\in\mathrm{N}_0^n$ и $m_1=m_2=...=m_n$; $\mathbf{n}=(\overline{n}_1,\overline{n}_2,...,\overline{n}_n)\in\mathrm{N}_0^n$ и $\overline{n}_1=\overline{n}_2=...=\overline{n}_n$; $\mathbf{p}=(p_1,p_2,...,p_n)\in\mathrm{N}_0$ и $p_1=p_2=...=p_n$; $\mathbf{q}=(q_1,q_2,...,q_n)\in\mathrm{N}_0$ and $q_1=q_2=...=q_n$) ($0\leq\mathbf{m}\leq\mathbf{q}$, $0\leq\mathbf{n}\leq\mathbf{p}$);

$\eta=(\eta_1,\eta_2,...,\eta_n)\in\mathrm{C}^n$; $\mu=(\mu_1,\mu_2,...,\mu_n)\in\mathrm{C}^n$;

$\delta=(\delta_1,\delta_2,...,\delta_n)\in\mathrm{R}^n_+$; $\gamma=(\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n)\in\mathrm{R}^n_+$; $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n)\in\mathrm{R}^n_+$;

$\mathbf{a}_i=(a_{i_1},a_{i_2},...,a_{i_n})$, $1\leq i\leq p$, $a_{i_1},a_{i_2},...,a_{i_n}\in\mathrm{C}$ $(1\leq i_1\leq p_1,...,1\leq i_n\leq p_n)$;

$\mathbf{b}_j=(b_{j_1},b_{j_2},...,b_{j_n})$, $1\leq j\leq q$, $b_{j_1},b_{j_2},...,b_{j_n}\in\mathrm{C}$ $(1\leq j_1\leq q_1,...,1\leq j_n\leq q_n)$;

$\alpha_i=(\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},...,\alpha_{i_n})$, $1\leq i\leq p$, $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},...,\alpha_{i_n}\in\mathrm{R}_1^+$ $(1\leq i_1\leq p_1,...,1\leq i_n\leq p_n)$;

$\beta_j=(\beta_{j_1},\beta_{j_2},...,\beta_{j_n})$, $1\leq j\leq q$, $\beta_{j_1},\beta_{j_2},...,\beta_{j_n}\in\mathrm{R}_1^+$ $(1\leq j_1\leq q_1,...,1\leq j_n\leq q_n)$;

$\mathbf{k}=(k_1,k_2,...,k_n)\in\mathrm{N}_0^n$ $(k_i\in\mathrm{N}_0,\ i=1,2,...,n)$ мультииндекс с $\mathbf{k}!=k_1!\cdots k_n!$ и $|\mathbf{k}|=k_1+k_2+...+k_n$;для $l=(l_1,l_2,...,l_n)\in\mathrm{R}^n_+$

$\mathbf{D}^l=\frac{\partial^{|l|}}{(\partial x_1)^{l_1}\cdots(\partial x_n)^{l_n}}$, $\mathbf{dt}=dt_1\cdot dt_2\cdots dt_n$;$\mathbf{t}^{\mu}=t^{\mu_1}\cdots t^{\mu_n}$;$f(\mathbf{t})=f(t_1,t_2,...,t_n)$; функция

$$\mathrm{H}^{\mathbf{m},\,\mathbf{n}}_{\mathbf{p},\,\mathbf{q}}\left[\frac{\lambda\mathbf{x}^{\gamma}}{\mathbf{t}^{\delta}}\left|\begin{array}{c}(\mathbf{a}_i,\alpha_i)_{1,p}\\(\mathbf{b}_j,\beta_j)_{1,q}\end{array}\right.\right]=\prod_{k=1}^{n}\mathrm{H}^{m_k,\,\overline{n}_k}_{p_k,\,q_k}\left[\frac{\lambda x_k^{\gamma_k}}{t_k^{\delta_k}}\left|\begin{array}{c}(a_{i_k},\alpha_{i_k})_{1,p_k}\\(b_{j_k},\beta_{j_k})_{1,q_k}\end{array}\right.\right]$$

представляет собой произведение H–функций $\mathrm{H}^{m,\,n}_{p,\,q}[z]$ [4, главы 1–2]. В работе преобразование (1) изучается в весовых пространствах $\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\,\overline{2}}$ суммируемых функций $f(\mathbf{x})=f(x_1,x_2,...,x_n)$ на $\mathrm{R}^{\mathbf{n}}_+$, таких что:

$$\|f\|_{\overline{v},\overline{2}}=\{\int_{R^1_+}x_n^{v_n\cdot2-1}\{\cdots\{\int_{R^1_+}x_2^{v_2\cdot2-1}$$

Работа выполнена в рамках программы ГПНИ "Конвергенция–2025 подпрограмма "Математические методы и модели Республика Беларусь.

$$[\int_{R^1_+} x_1^{v_1\cdot 2-1}|f(x_1,...,x_n)|^2 dx_1]dx_2\}\cdot\cdot\}dx_n\}^{1/2}<\infty,$$

$(\overline{2}=(2,...,2)$, $\overline{v}=(v_1,...,v_n)\in \mathrm{R}^n$, $v_1=v_2=...=v_n)$. Преобразование (1) представляем как композицию многомерного H–преобразования [3] и элементарных операторов $\mathbf{M}_\zeta$, $\mathbf{W}_\sigma$, $\mathbf{N}_a$ :

$$(\mathbf{M}_\zeta f)(\mathbf{x})=\mathbf{x}^\zeta f(\mathbf{x})\ (\zeta=(\zeta_1,\zeta_2,...,\zeta_n)\in \mathrm{C}^n),$$

$$(\mathbf{W}_\sigma f)(\mathbf{x})=f(\frac{\mathbf{x}}{\sigma})\ (\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)\in \mathrm{R}^n_+),$$

$$(\mathbf{N}_a f)(\mathbf{x})=f(\mathbf{x}^a)\ (a=(a_1,a_2,...,a_n)\in \mathrm{R}^n, a\neq 0). \tag{2}$$

Получаем

$$\big(\mathrm{H}_{\eta,\mu;\gamma,\delta,\lambda}f\big)(\mathbf{x})=\delta^{-1}\lambda^{(\mu+1)/\delta}(\mathbf{N}_\gamma\mathbf{M}_{\eta/\gamma}\mathrm{H}\mathbf{M}_{-(\mu+1)/\delta}\mathbf{W}_{1/\lambda}\mathbf{N}_{-1/\delta}f)(\mathbf{x}). \tag{3}$$

Тогда свойства преобразования (1) будут следовать из соответствующих утверждений для H–преобразования [3],свойств операторов (2) [2–3]и представления (3). Получены условия ограниченности и взаимной однозначности оператора преобразования (1) из одних пространств $\mathfrak{L}_{\overline{\nu},\overline{2}}$ в другие, доказан аналог формулы интегрирования по частям, получены два других интегральных представления для (1) и выведены две формулы его обращения в зависимости от значений параметров $\eta,\mu,\gamma,\delta,\lambda$.

**Литература**

1. *Самко С.Г., Килбас А,А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. - Минск: Наука и техника, 1987. - 688с.

2. *Ситник С.М., Скоромник О.В., Шлапаков С.А.* Многомерное общее интегральное преобразование со специальными функциями в ядре // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. - 2019. - №3(104). - С. 18 - 27.

3. *Sitnik S.M., Skoromnik O.V.* One-dimensional and multi-dimensional integral transforms of Buschman-Erdelyi type with Legendre Functions in kernels // Transmutation Operators and Applications. Trends in Mathematics. - Cham, Switzerland : Birkhauser Basel (Springer), 2020. - P. 293 - 319.

4. *Kilbas, A.A., Saigo M.H.* H - Transforms. Theory and Applications / A.A. Kilbas, M.H. Saigo. - London: Chapman and Hall. CRC Press, 2004. - 401 p.