УДК 512.643

О факторизации строго регулярных матриц
About the factorization of strongly regular matrices

А.А. Козлов, К.Д. Калита, Л.А. Антоненко
A.A. Kozlov, K.D. Kalita, L.A. Antonenko
Полоцкий государственный университет
Polotsk State University, Novopolotsk
Email: kozlovaa@tut.by, KalitaKD@yandex.ru, 19kb1.antonenko.l@pdu.by

Аннотация. В данной работе введены понятия строго положительной регулярности и строго ρ-положительной регулярности матриц. Установлены теоремы о разложении произвольной матрицы с положительным определителем в виде произведения шести строго положительно регулярных матриц (три из которых - ортогональные), а также в виде произведения пяти строго ρ-положительных матриц.

Abstract: In this paper we introduce strongly positively regular and strongly ρ-positively regular matrices definitions. We establish theorems about the factorization of strongly regular matrices as the product of six strongly positively regular matrices and as the product of five strongly ρ-positively regular matrices.

Ключевые слова: строго положительно регулярные матрицы, факторизация матриц.
Keywords: strongly positively regular matrices, matrices factorization.

Пусть $\mathbb{R}^n$ – n-мерное евклидово векторное пространство с нормой $\|x\|=\sqrt{x^T x}$ (символ T означает операцию транспонирования матрицы или вектора); $e_1, e_2, ..., e_n$ – векторы (столбцы) канонического ортонормированного базиса пространства $\mathbb{R}^n$; $E=[e_1,...,e_n]$ – единичная матрица; M_{mn} – пространство вещественных матриц размерности $m \times n$ со спектральной (операторной) нормой $\|H\|=\max\limits_{\|x\|=1}\|Hx\|$, т.е. нормой, индуцируемой на M_{mn} евклидовой нормой в пространствах $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$ [1, с.357]; $\mathrm{M}_n := \mathrm{M}_{nn}$.

Определение 1. Для любого числа $k=\overline{1,n}$ и всякой матрицы $H=\{h_{ij}\}_{i,j=1}^n \in \mathrm{M}_n$ через $(H)_k \in \mathrm{M}_k$ обозначим ее *ведущую главную подматрицу порядка* k [1, с. 30], т.е. $(H)_1 = h_{11}$, $(H)_2 = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}, ...,$ $(H)_n = H$. *Ведущими главными минорами* матрицы H будем называть определители ведущих главных подматриц матрицы H.

Определение 2. Матрица $H \in \mathrm{M}_n$ называется *строго регулярной* [2, с. 97], если при всех $i=\overline{1,n}$ справедливы соотношения неравенства $\det(H)_i \neq 0$.

Определение 3. Будем говорить, что квадратная матрица $H \in \mathrm{M}_n$ является *строго положительно регулярной*, если при каждом $i=\overline{1,n}$ выполняются неравенства $\det(H)_i > 0$.

Определение 4. Возьмем произвольное $\rho > 0$. Матрица $H \in \mathrm{M}_n$ называется *строго ρ-положительно регулярной*, если при каждом $i=\overline{1,n}$ имеют место соотношения $\det(H)_i > \rho$.

Обозначим через $U, L \in \mathrm{M}_n$ соответственно верхне- и нижнетреугольную матрицы с положительными диагональными элементами.

Теорема 1. *Если матрица $H \in \mathrm{M}_n$ является строго положительно регулярной, то и матрица LHU обладает этим свойством.*

Теорема 2. *Свойство строго положительной регулярности сохраняется при операции транспонирования.*

Замечание 1. Свойство строгой положительной регулярности в общем случае не инвариантно относительно операции взятия обратной матрицы. При этом отметим, что если строго положительно регулярная матрица принадлежит множеству ортогональных матриц, то обратная к ней матрица также обладает свойством строгой положительной регулярности.

Теорема 3. *Для любых величин $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ и всякой матрицы $H \in \mathrm{M}_n$, удовлетворяющей оценкам $\det H > \alpha$ и $\|H\| \le \beta$, существуют такие матрица перестановок $P \in \mathrm{M}_n$ и число $\rho_1 = \rho_1(\rho) > 0$, при которых для всех $i = \overline{1,n}$ справедливы оценки $|\det(PH)_i| \ge \rho_1$.*

Теорема 4. *Для всякой матрицы перестановок $P \in \mathrm{M}_n$ найдется такая верхнетреугольная матрица $U \in \mathrm{M}_n$ с единицами на главной диагонали, что для каждого $i = \overline{1,n}$ выполняются неравенства $|\det(UP)_i| \ge 1$.*

Теорема 5. *Для любого числа $\rho > 0$ и произвольной матрицы $G \in \mathrm{M}_n$, удовлетворяющей оценке $\det G > \rho > 0$, найдется такая верхнетреугольная матрица $U \in \mathrm{M}_n$ с единицами на главной диагонали, что произведение UG представляется в виде $UG = H_1 E H_2$ где $H_1, H_2 \in \mathrm{M}_n$ – некоторые заданные строго положительно регулярные матрицы, а $E \in \mathrm{M}_n$ – матрица, полученная из единичной матрицы заменой некоторого четного количества диагональных элементов на -1.*

Для всякого $\alpha \in [0, 2\pi)$ и некоторых $k, l \in \{1, ..., n\}$, где $k < l$, обозначим $(n \times n)$-матрицу

$$J_{kl}(\alpha) := \cos\alpha \cdot e_k e_k^T + \sin\alpha \cdot e_k e_l^T - \sin\alpha \cdot e_l e_k^T + \cos\alpha \cdot e_l e_l^T.$$

Возьмем любое число $p \in \mathbb{N}$, $p \le \left[\dfrac{n}{2}\right]$ (здесь скобки $[\cdot]$ означают целую часть числа), и рассмотрим пары $(k_i, l_i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ чисел, удовлетворяющих неравенствам $1 \le k_1 < l_1 < k_2 < l_2 < \ldots < k_p < l_p \le n$.

Определим квадратную матрицу J следующим образом:

$$J = J(k_1, l_1, k_2, l_2, ..., l_p) := E + \sum_{i=1}^{p} \left(J_{k_i l_i}\left(\frac{\pi}{3}\right) - e_{k_i} e_{k_i}^T - e_{l_i} e_{l_i}^T \right) \in \mathrm{M}_n.$$

Пусть, кроме того, $\overline{E} := E(k_1, l_1, k_2, l_2, ..., l_p)$ – квадратная матрица, полученная из единичной матрицы заменой диагональных элементов $e_{k_i k_i}$ и $e_{l_i l_i}$, $i = \overline{1, p}$, числом -1.

Теорема 6. *Для матрицы* $J \in \mathrm{M}_n$ *выполняется равенство* $J^3 = \overline{E}$ *и оценки* $\det(J)_i \geq 1/2$, $i = \overline{1, n}$.

Теорема 7. *Для любых числа* $\rho > 0$ *и матрицы* $G \in \mathrm{M}_n$, *удовлетворяющей оценке* $\det G > \rho > 0$, *найдутся такие строго положительно регулярные матрицы* $H_i \in \mathrm{M}_n$, $i = \overline{1, 6}$, *что матрица* G *представляется в виде* $G = \prod_{i=1}^{6} H_i$.

По аналогии с матрицей J определим следующие $(n \times n)$-матрицы

$$S_{kl}^{(1)} := 3 \cdot e_k e_k^T - 2 \cdot e_k e_l^T + 8 \cdot e_l e_k^T - 5 \cdot e_l e_l^T \text{ и } S_{kl}^{(2)} := 5 \cdot e_k e_k^T + 2 \cdot e_k e_l^T - 8 \cdot e_l e_k^T - 3 \cdot e_l e_l^T.$$

Для ранее зафиксированных пар $(k_i, l_i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ чисел, удовлетворяющих неравенствам $1 \leq k_1 < l_1 < k_2 < l_2 < \ldots < k_p < l_p \leq n$, обозначим через $S^{(1)} \in \mathrm{M}_n$ и $S^{(2)} \in \mathrm{M}_n$ матрицы

$$S^{(1)} := E + \sum_{i=1}^{p} S_{k_i l_i}^{(1)} - \sum_{i=1}^{p} (e_{k_i} e_{k_i}^T + e_{l_i} e_{l_i}^T) \text{ и } S^{(2)} := E + \sum_{i=1}^{p} S_{k_i l_i}^{(2)} - \sum_{i=1}^{p} (e_{k_i} e_{k_i}^T + e_{l_i} e_{l_i}^T).$$

Теорема 8. *Для матрицы* $\overline{E} \in \mathrm{M}_n$ *справедливо представление* $\overline{E} = S^{(1)} \cdot S^{(2)}$.

Теорема 9. *При любых числе* $\rho > 0$ *и матрице* $G \in \mathrm{M}_n$, *удовлетворяющей оценке* $\det G > \rho > 0$, *существуют такие число* $\rho_1 = \rho_1(\rho) > 0$ *и строго* ρ_1*-положительно регулярные матрицы* $H_i \in \mathrm{M}_n$, $i = \overline{1, 5}$, *что имеет место разложение* $G = \prod_{i=1}^{5} H_i$.

Следствие 3. *Для всякого вещественного числа* $\rho > 0$ *и матрицы* $G \in \mathrm{M}_n$, *удовлетворяющей неравенству* $|\det G| > \rho > 0$, *найдутся строго регулярные матрицы* $H_i \in \mathrm{M}_n$, $i = \overline{1, 3}$, *при которых выполняется равенство* $G = H_3 H_2 H_1$.

Результаты работы получены в рамках Государственной программы научных исследований на 2020-2025 годы «Конвергенция-2025».

Литература

1. Хорн, Р. Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон. – М.: Мир, 1989. – 655 с.

2. Тыртышников, Е.Е. Методы численного анализа / Е.Е. Тыртышников. – Москва, 2006. – 291 с.

УДК 519.62:517.92+517.2