

УДК 624.072

**РАСЧЕТ БЕСКОНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ ПЕРЕКРЕСТНЫХ БАЛОК  
НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ ВАРИАЦИОННО-РАЗНОСТНЫМ МЕТОДОМ****канд. техн. наук, доц. О.В. КОЗУНОВА, К.А. СИРОШ  
(Белорусский государственный университет транспорта, Гомель)**

В данной работе авторы рассматривают методику расчета бесконечной системы перекрестных балок на упругом основании вариационно-разностным методом. Системой перекрестных балок на упругом основании чаще всего моделируют ленточные фундаменты мелко заложения под здания различного функционального назначения. Вариационно-разностный метод является одним из численно-аналитических способов расчета строительных конструкций, основан на вариационных принципах метода Ритца-Тимошенко и на минимуме полной потенциальной энергии всей системы согласно принципу Лагранжа, а также приближен к реальности условиям работы системы «фундамент – основание». В качестве упругого основания в работе принималось однослойное изотропное искусственное основание, как упругий слой, ограниченный по толщине. Численная апробация результатов расчета системы перекрестных балок на упругом основании осуществлена с использованием программного пакета MATHEMATICA.

**Ключевые слова:** бесконечная система перекрестных балок, метод Ритца-Тимошенко, вариационно-разностный метод, упругое основание, упругий слой, контактная зона, прогибы балки, осадки основания, контактные напряжения, внутренние усилия.

**Введение.** На первых этапах развития теории балок на упругом полупространстве было принято, что особого различия результатов расчета в условиях пространственной и плоской задач не должно быть (подобно расчету по гипотезе Винклера) [1]. Однако дальнейшие исследования [2] показали, что разница в результатах очень велика, и при расчете ленточных фундаментов в условиях плоской задачи получаются совершенно недопустимые запасы прочности [1, гл. 4, рисунки 115, 126, 131]. Задачи о балках в пространственных условиях сложнее, и поэтому методов их решения предложено гораздо меньше.

Вихгард в своей работе [3], исходя из формулы Буссинеска, указал, что если искомый закон реактивных давлений  $p(x, y)$  зависит от координат элемента этих давлений, то он связан с осадками грунта под балкой  $W(x, y)$  [1, формула 32]. И для упрощения Вихгард предложил считать, что в поперечном направлении реактивные давления распределяются равномерно, и в тождестве осадок грунта и прогибов балки брать осредненные в поперечном направлении осадки.

Проктор [4], как и Вихгард, исходил из уравнений (32), (33) [1] и предположения, что реактивные давления распределены в поперечном направлении равномерно, и в качестве величины осадок в уравнении тождества прогибов балки и осадки грунта (33) принимал их величину вдоль средней оси балки. Что касается прогибов балки, то балка настолько жестка в поперечном направлении, что изгибом ее в этом направлении можно пренебречь. Однако, кроме предположений и гипотез, ни Вихгард, ни Проктор не смогли предоставить окончательного решения задачи расчета бесконечной балки в пространственных условиях.

Исследования по решению этой задачи продолжил В.И. Кузнецов, который считал, что решение Проктора довольно громоздко, а точность невелика, и в своей работе [5] предложил другой вариант решения, приняв за неизвестную функцию реактивные давления, а не осадки, как у Проктора. Решение Кузнецова тоже очень трудоемко и значительного распространения не получило.

Проще, но не менее точен оказался метод Б.Н. Жемочкина [6], аналогичный его же методу для расчета полос в условиях плоской задачи. Разница лишь в том, что здесь используется вместо формулы Фламана для плоской задачи формула Буссинеска для пространственной задачи. Балка разбивается в продольном направлении на ряд прямоугольников, внутри которых давления, передаваемые подошвой балки грунту, считаются постоянными. Неизвестными считаются интенсивности напряжений в каждой ступени эпюры. Как и Проктор, Жемочкин пренебрег тем, что при равномерном распределении давлений в поперечном направлении получается «лунка», и поэтому прогибы балки и осадки грунта под ней вдоль продольной оси и вне ее совпадать не будут.

Эта неточность отсутствует в решениях задач о балках конечной длины на упругом полупространстве [1; 2], в которых М.И. Горбуновым-Посадовым был использован тот же метод, который он использовал для решения полос в плоской задаче [7; 8]. Однако в случае решения пространственной задачи контактного взаимодействия бесконечных полос, лент, балок и упругого основания в качестве исходного уравнения для реактивных давлений  $p(x, y)$  Горбунов-Посадов взял двойной степенной ряд с неизвестными коэффициентами, как и в выражении для осадки грунта  $W(x, y)$ . Причем неизвестные коэффициенты степенного ряда для осадки грунта  $A_{2i, 2k}$  являются линейными функциями коэффициентов степенного ряда для реактивных давлений  $a_{2i, 2k}$ .

Решение задач контактного взаимодействия для изгибаемых конструкций на упругом основании методами теории упругости [9] и строительной механики [10] получило свое дальнейшее развитие в работах С.В. Босакова, С.Д. Семенюка, О.В. Козуновой [11–16], в которых учитывалась неоднородность (слоистость) упругого основания, его физическая нелинейность, ползучесть бетона и другие усложняющие параметры контактирующих тел.

Научная литература по применению вариационных методов в решениях контактных задач теории упругости весьма скудна из-за сложности их решения, особенно для изгибаемых конструкций. При расчете системы перекрестных балок на упругом основании авторами принимается, что система перекрестных балок представляет совокупность ортогональных жестко соединенных между собой стержней, находящихся на упругом основании, с осями, расположенными в одной плоскости, совпадающей с одной из главных осей инерции балок.

**Гипотезы и допущения.** При расчете системы перекрестных балок на упругом основании в условиях пространственной задачи вводятся следующие гипотезы и допущения:

- для расчетной области упругого основания – гипотезы и допущения линейной теории упругости и малых упруго-пластических деформаций Илюшина при учете физической нелинейности материала балок [9; 10; 17];
- для контактной зоны системы «фундамент – основание» – между бесконечной системой перекрестных балок и основанием могут возникать как сжимающие, так и растягивающие напряжения и отсутствуют силы трения;
- распределение нормальных реактивных давлений по ширине каждой балки считается постоянным [1];
- для балки справедливы гипотезы и допущения плоского изгиба балки [10].

**Постановка задачи.** Рассматривается бесконечная регулярная система перекрестных балок на упругом основании постоянной изгибной жесткости  $EJ_x$ ,  $EJ_y$  под действием симметричной нагрузки. В силу симметрии бесконечная система перекрестных балок разбивается на ряд базовых фрагментов в виде крестообразных пересечений этих балок (рисунок 1), соединенных в систему. И бесконечная система заменяется на совокупность двух пересекающихся балок, свободно опирающихся на упругое основание.

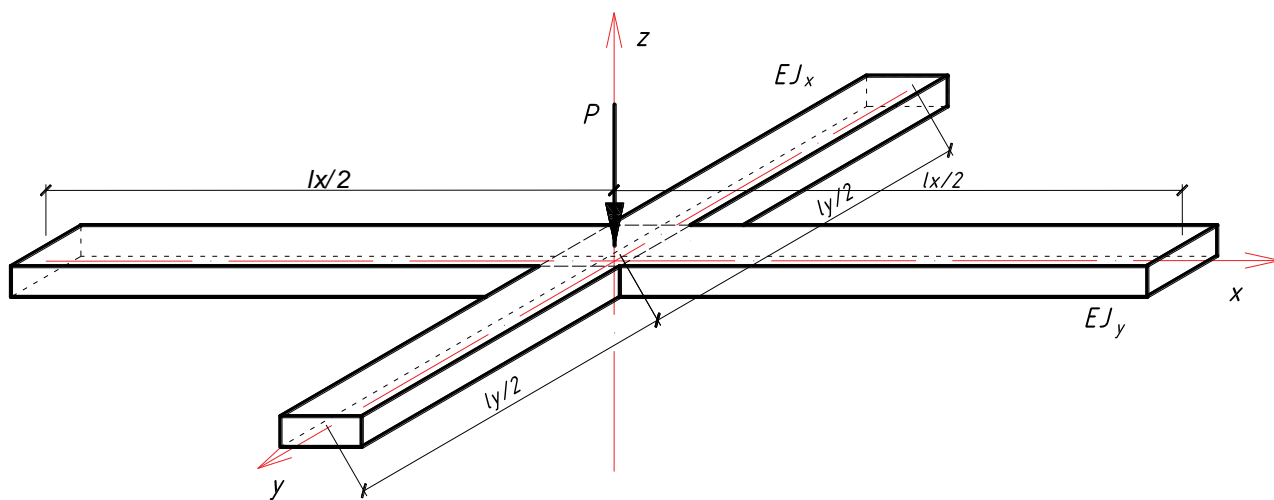


Рисунок 1. – Бесконечная система перекрестных балок на упругом основании (фрагмент крестообразных пересечений балок)

Линейные размеры балок обозначены как  $l_x$ ,  $l_y$ . Поперечные сечения балок принимаются постоянными. Внешняя нагрузка действует перпендикулярно и симметрично плоскости осей системы перекрестных балок.

**Граничные условия задачи.** На границах принятой расчетной области основания горизонтальные перемещения  $u = 0$ ,  $v = 0$ . В контактной зоне справедливо равенство осадок основания прогибам балок.

Для крайних точек балок (точки 153, 161, 165, 173) вводятся смешанные граничные условия

$$Q_z \Big|_{x=\pm \frac{l_x}{2}} = -EJ_y \frac{d^3 w}{dx^3} = 0, \quad Q_z \Big|_{y=\pm \frac{l_y}{2}} = -EJ_x \frac{d^3 w}{dy^3} = 0, \quad \varphi_x \Big|_{y=\pm \frac{l_y}{2}} = \frac{dw}{dy} = 0, \quad \varphi_y \Big|_{x=\pm \frac{l_x}{2}} = \frac{dw}{dx} = 0. \quad (1)$$

**Алгоритм линейного расчета.** При линейном (упругом) расчете упругое основание заменяется расчетной областью для решения пространственной задачи (рисунок 2). Основание аппроксимируется симметричной объемной разбивочной сеткой с постоянными шагами по осям:  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$ . В результате чего получено 96 ячеек и 175 узловых точек.

Объемная ячейка рассматриваемой расчетной области представляет собой куб с размерами граней  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$ , где  $\Delta x = \Delta y = \Delta z$  (рисунок 3).

Решение задачи строится в перемещениях, принимая за неизвестные компоненты вектора узловых перемещений  $u_i(x, y, z)$ ,  $v_i(x, y, z)$ ,  $w_i(x, y, z)$ . При решении поставленной задачи энергия деформации подсчитывается для каждой ячейки, а затем суммируется по объему упругого основания. При этом система дифференциальных уравнений после замены интегро-дифференциальных выражений функционалов энергий конечно-разностными аппроксимациями преобразуется в систему линейных алгебраических уравнений, решение которой позволяет найти неизвестные компоненты вектора  $u_i(x, y, z)$ ,  $v_i(x, y, z)$ ,  $w_i(x, y, z)$ . Чтобы найти энергию деформации в центре объемной ячейки расчетной области, необходимо сперва найти функционал энергии деформаций упругого основания для

центров граней ячейки через известные зависимости плоской задачи теории упругости: соотношения Коши и обобщенный закон Гука. Так как ячейка расчетной области представляет собой параллелепипед с попарно-равными гранями, достаточно определить энергию деформации для трех граней (рисунок 4).

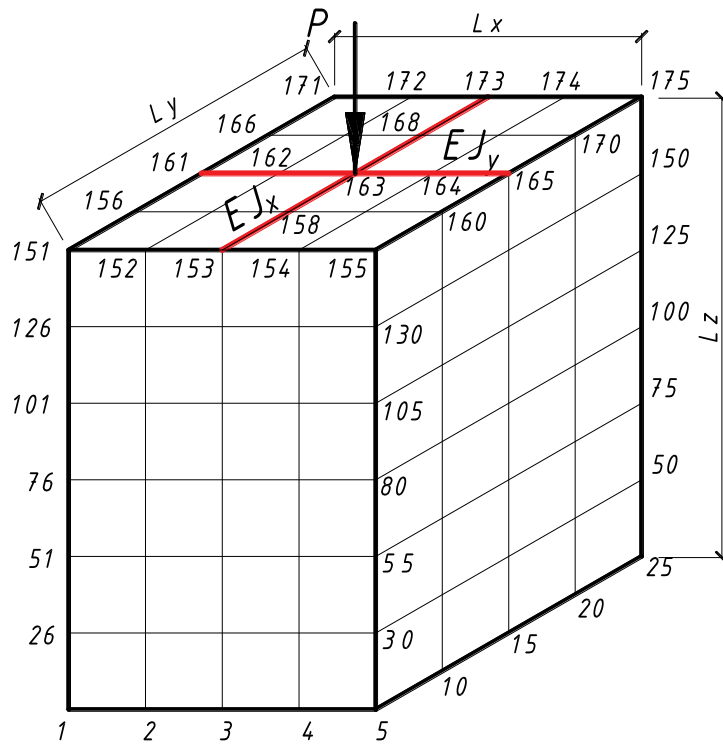


Рисунок 2. – Расчетная область для решения пространственной задачи

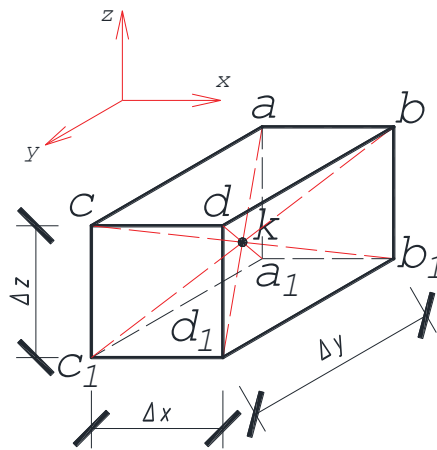


Рисунок 3. – Объемная ячейка расчетной области

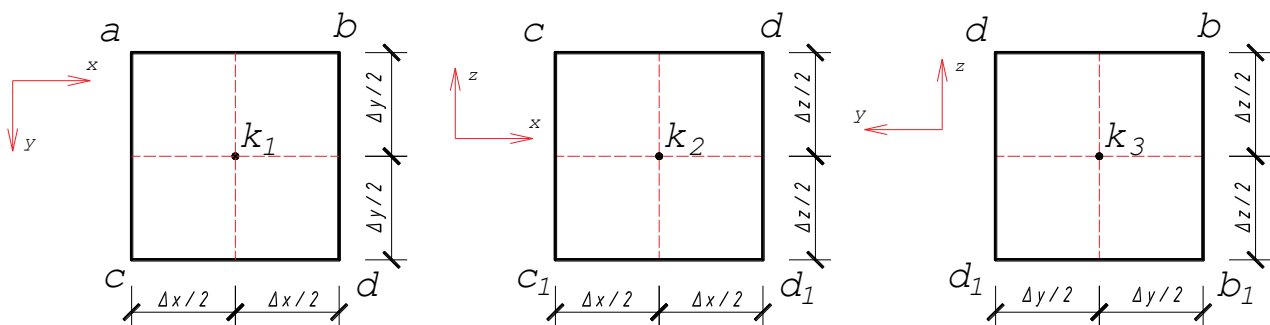


Рисунок 4. – Прямоугольные грани кубической ячейки расчетной области с центрами в точках  $k_1, k_2, k_3$

Рассматриваем первую грань кубической ячейки метода конечных разностей с центром в точке  $k_1$ .

Записываем выражения для деформаций  $\varepsilon_x^{(k_1)}$ ,  $\varepsilon_y^{(k_1)}$ ,  $\gamma_{xy}^{(k_1)}$  в точке  $k_1$  как среднее арифметическое деформаций в вершинах прямоугольника  $abcd$ , а именно:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x^{(k_1)} &= \frac{\partial u_{k_1}}{\partial x} = \left( \frac{u_b + u_d}{2} - \frac{u_a + u_c}{2} \right) \cdot \frac{1}{\Delta x} = \frac{u_b + u_d - u_a - u_c}{2\Delta x}; \\ \varepsilon_y^{(k_1)} &= \frac{\partial v_{k_1}}{\partial y} = \left( \frac{v_c + v_d}{2} - \frac{v_a + v_b}{2} \right) \cdot \frac{1}{\Delta y} = \frac{v_c + v_d - v_a - v_b}{2\Delta y};\end{aligned}\quad (2)$$

$$\gamma_{xy}^{(k_1)} = \frac{\partial u_{k_1}}{\partial y} + \frac{\partial v_{k_1}}{\partial x} = \left( \frac{u_c + u_d}{2} - \frac{u_a + u_b}{2} \right) \cdot \frac{1}{\Delta y} + \left( \frac{v_b + v_d}{2} - \frac{v_a + v_c}{2} \right) \cdot \frac{1}{\Delta x} = \frac{u_c + u_d - u_a - u_b}{2\Delta y} + \frac{v_b + v_d - v_a - v_c}{2\Delta x}.$$

Рассматриваем вторую грань кубической ячейки метода конечных разностей с центром в точке  $k_2$ .

Записываем выражения для деформаций  $\varepsilon_x^{(k_2)}$ ,  $\varepsilon_z^{(k_2)}$ ,  $\gamma_{xz}^{(k_2)}$  в точке  $k_2$  как среднее арифметическое деформаций в вершинах прямоугольника  $cdc_1d_1$ , а именно:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x^{(k_2)} &= \frac{\partial u_{k_2}}{\partial x} = \left( \frac{u_d + u_{d_1}}{2} - \frac{u_c + u_{c_1}}{2} \right) \cdot \frac{1}{\Delta x} = \frac{u_d + u_{d_1} - u_c - u_{c_1}}{2\Delta x}; \\ \varepsilon_z^{(k_2)} &= \frac{\partial w_{k_2}}{\partial z} = \left( \frac{w_c + w_d}{2} - \frac{w_{c_1} + w_{d_1}}{2} \right) \cdot \frac{1}{\Delta z} = \frac{w_c + w_d - w_{c_1} - w_{d_1}}{2\Delta z};\end{aligned}\quad (3)$$

$$\begin{aligned}\gamma_{xz}^{(k_2)} &= \frac{\partial u_{k_2}}{\partial z} + \frac{\partial w_{k_2}}{\partial x} = \left( \frac{u_c + u_d}{2} - \frac{u_{c_1} + u_{d_1}}{2} \right) \cdot \frac{1}{\Delta z} + \left( \frac{w_d + w_{d_1}}{2} - \frac{w_c + w_{c_1}}{2} \right) \cdot \frac{1}{\Delta x} = \\ &= \frac{u_c + u_d - u_{c_1} - u_{d_1}}{2\Delta z} + \frac{w_d + w_{d_1} - w_c - w_{c_1}}{2\Delta x}.\end{aligned}$$

Рассматриваем третью грань кубической ячейки метода конечных разностей с центром в точке  $k_3$ .

Записываем выражения для деформаций  $\varepsilon_y^{(k_3)}$ ,  $\varepsilon_z^{(k_3)}$ ,  $\gamma_{yz}^{(k_3)}$  в точке  $k_3$  как среднее арифметическое деформаций в вершинах прямоугольника  $dbd_1b_1$ , а именно:

$$\begin{aligned}\varepsilon_y^{(k_3)} &= \frac{\partial v_{k_3}}{\partial y} = \left( \frac{v_d + v_{d_1}}{2} - \frac{v_b + v_{b_1}}{2} \right) \cdot \frac{1}{\Delta y} = \frac{v_d + v_{d_1} - v_b - v_{b_1}}{2\Delta y}; \\ \varepsilon_z^{(k_3)} &= \frac{\partial w_{k_3}}{\partial z} = \left( \frac{w_d + w_b}{2} - \frac{w_{d_1} + w_{b_1}}{2} \right) \cdot \frac{1}{\Delta z} = \frac{w_d + w_b - w_{d_1} - w_{b_1}}{2\Delta z};\end{aligned}\quad (4)$$

$$\begin{aligned}\gamma_{yz}^{(k_3)} &= \frac{\partial v_{k_3}}{\partial z} + \frac{\partial w_{k_3}}{\partial y} = \left( \frac{v_d + v_b}{2} - \frac{v_{d_1} + v_{b_1}}{2} \right) \cdot \frac{1}{\Delta z} + \left( \frac{w_d + w_{d_1}}{2} - \frac{w_b + w_{b_1}}{2} \right) \cdot \frac{1}{\Delta y} = \\ &= \frac{v_d + v_b - v_{d_1} - v_{b_1}}{2\Delta z} + \frac{w_d + w_{d_1} - w_b - w_{b_1}}{2\Delta y}.\end{aligned}$$

Энергия деформаций прямоугольной ячейки размерами  $(\Delta x \cdot \Delta y)$  с центром в точке  $k_1$  усредненно будет равна

$$U_{i,j}^{(k_1)} = \frac{E_k}{2(1+\mu_k)} \left[ \frac{\mu_k}{1-2\mu_k} (\varepsilon_x^{(k_1)} + \varepsilon_y^{(k_1)})^2 + (\varepsilon_x^{(k_1)})^2 + (\varepsilon_y^{(k_1)})^2 + \frac{1}{2} (\gamma_{xy}^{(k_1)})^2 \right] \Delta x \Delta y, \quad (5)$$

где  $E_k, \mu_k$  – упругие постоянные в центре кубической ячейки основания;  
 $i, j$  – номер узловой точки вдоль осей  $X$  и  $Y$  соответственно.

Аналогично формуле (5) энергия деформаций прямоугольной ячейки размерами  $(\Delta x \cdot \Delta z)$  с центром в точке  $k_2$  усредненно будет равна

$$U_{i,t}^{(k_2)} = \frac{E_k}{2(1+\mu_k)} \left[ \frac{\mu_k}{1-2\mu_k} (\varepsilon_x^{(k_2)} + \varepsilon_z^{(k_2)})^2 + (\varepsilon_x^{(k_2)})^2 + (\varepsilon_z^{(k_2)})^2 + \frac{1}{2} (\gamma_{xz}^{(k_2)})^2 \right] \Delta x \Delta z, \quad (6)$$

где  $i, t$  – номер узловой точки вдоль осей  $X$  и  $Z$  соответственно.

Энергия деформаций прямоугольной ячейки размерами  $(\Delta y \cdot \Delta z)$  с центром в точке  $k_3$  аналогично формулам (5, 6) усредненно будет равна

$$U_{j,t}^{(k_3)} = \frac{E_{k_3}}{2(1+\mu_k)} \left[ \frac{\mu_k}{1-2\mu_k} (\varepsilon_y^{(k_3)} + \varepsilon_z^{(k_3)})^2 + (\varepsilon_x^{(k_3)})^2 + (\varepsilon_z^{(k_3)})^2 + \frac{1}{2} (\gamma_{yz}^{(k_3)})^2 \right] \Delta y \Delta z, \quad (7)$$

где  $j, t$  – номер узловой точки вдоль осей  $Y$  и  $Z$  соответственно.

Последовательность этапов расчета дает алгоритм линейного расчета системы перекрестных балок методом Ритца-Тимошенко [15; 17].

В работе [16] ранее давалась предложенная форма функционала полной потенциальной энергии, с учетом энергии деформации упругого основания, физически нелинейного и неоднородного. Функционал энергии деформаций упругого основания в единице объема [17] можно представить в виде:

$$U_f = \frac{E \cdot \mu}{2(1+\mu)(1-2\mu)} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)^2 + \frac{E}{2(1+\mu)} (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + \frac{E}{4(1+\mu)} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{xz}^2), \quad (8)$$

где  $E, \mu$  – упругие постоянные упругого основания.

Обозначим элемент объема через  $dv$ , полная энергия деформации упругого основания будет иметь вид

$$U = \int \int \int_{z,y,x} U_f dx dy dz = \int_v U_f dv. \quad (9)$$

При составлении функционала энергии деформаций упругого основания не учитывается работа сил собственного веса упругого основания, т.к. они уравновешены начальным напряженным состоянием уже в упругом основании, а работа самоуравновешенной системы сил на малых возможных перемещениях равна нулю. Это означает, что при поиске полного напряженного состояния рассматриваемой задачи необходимо на полученное решение наложить напряженное состояние от сил собственного веса основания.

Энергия изгиба двух перекрестных балок определяется по формуле

$$\Omega = \Omega_x + \Omega_y = \frac{EJ_x}{2} \int_{-l_x}^{l_x} \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{EJ_y}{2} \int_{-l_y}^{l_y} \left( \frac{d^2 w}{dy^2} \right)^2 dy, \quad (10)$$

где  $EJ_x, EJ_y$  – изгибные жесткости балок.

Энергию деформаций конструкции обычно отождествляют с энергией изгиба конструкции, пренебрегая деформациями сдвига [10; 15]. Это вполне оправдано для рассматриваемой бесконечной системы перекрестных балок.

Потенциал внешней нагрузки определяется из следующей формулы:

$$\Pi = - \left( \int_{-l_x}^{l_x} q(x) w(x) dx + \int_{-l_y}^{l_y} q(y) w(y) dy \right). \quad (11)$$

Функционал полной энергии имеет вид

$$\mathcal{E} = U + \Omega + \Pi. \quad (12)$$

Неизвестные перемещения  $u_i(x, y, z)$ ,  $v_i(x, y, z)$ ,  $w_i(x, y, z)$  можно найти из условия обращения в нуль производных от полной энергии по каждому из перемещений, т.к. в состоянии статического равновесия функционал полной энергии  $\mathcal{E}$  должен иметь минимум, то есть

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial v_i} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial u_i} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial w_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, N, \quad (13)$$

где  $N$  – число узловых точек параллелепипеда.

Численная апробация результатов расчета для упругого основания осуществляется с использованием программного пакета компьютерной алгебры MATHEMATICA [18].

**Результаты линейного расчета.** Для численного нахождения решения приняты следующие исходные данные:  $l_x = l_y = 4$  м,  $l_z = 6$  м,  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 1$  м,  $EJ_x = 2000$  кНм<sup>2</sup>,  $EJ_y = 2000$  кНм<sup>2</sup>,  $E = 3,06 \cdot 10^{10}$  МПа;  $\mu = 1/6$ ,  $P = 2000$  кН.

Перемещения в законтурных точках симметричны относительно границы расчетной области и равны перемещениям узловых точек балок (таблица 1).

Таблица 1. – Результаты вычисления перемещений

Балка в направлении оси X		Балка в направлении оси Y	
Узловые точки	Перемещения, м	Узловые точки	Перемещения, м
161, 161'	0,00817	153, 153'	0,00831
162	-0,00822	158	-0,00832
163	0,00854	163	0,00854
164	-0,00822	168	-0,00814
165, 165'	0,00817	173, 173'	0,00805

На рисунке 5 приведены графики перемещений узлов перекрестных балок в двух вертикальных сечениях: в направлении оси X по узловым точкам 161, 162, 163, 164, 165, в направлении оси Y по узловым точкам 153, 158, 163, 168, 173.

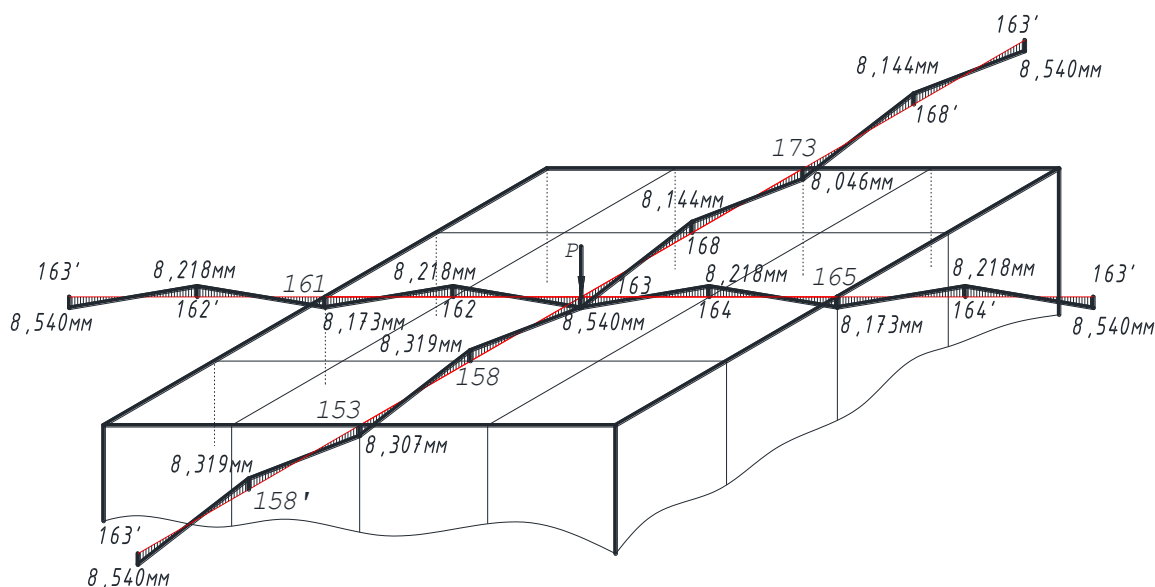


Рисунок 5. – График перемещений узлов перекрестных балок под действием сосредоточенной нагрузки P

Внутренние усилия в балках можно определить по следующим дифференциальным зависимостям, используя конечные разности

$$M_x(y) = -EI_x \frac{d^2 w}{dy^2}; \quad M_y(x) = -EI_y \frac{d^2 w}{dx^2}; \quad (14)$$

$$Q_z(x) = -EI_y \frac{d^3 w}{dx^3}; \quad Q_z(y) = -EI_x \frac{d^3 w}{dy^3}. \quad (15)$$

**Заключение.** В рассматриваемой работе авторами предложено вариационно-разностным методом исследовать параметры напряженно-деформированного состояния ленточных фундаментов на упругом основании, как бесконечной системы перекрестных балок, расположенных на упругом полупространстве с ограничением глубины сжимаемой толщи. Построен и реализован алгоритм упругого расчета с учетом линейной работы материала балок, составлена программа с использованием компьютерного пакета MATHEMATICA, проведена ее апробация.

В результате проведенных исследований замечено: при граничных условиях и числовых данных, принятых в поставленной задаче, балки изгибаются волнообразно, что предположительно в натурных условиях при выбранных размерах расчетной области и требует уточнения глубины сжимаемой толщи упругого основания.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Горбунов-Посадов, М.И. Расчет конструкций на упругом основании / М.И. Горбунов-Посадов, Т.А. Маликова, В.И. Соколов. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Стройиздат, 1984. – 639 с.
2. Горбунов-Посадов, М.И. Балки и плиты на упругом основании / М.И. Горбунов-Посадов. – М. : Машстройиздат, 1949. – 238 с.
3. Wieghardt, K. Über den Balken auf nachgiebiger Unterlage / K. Wieghardt // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. – 1922. – Vol. 2. – S. 165–184.
4. Проктор, Г.Э. Об изгибе балки, лежащей на сплошном упругом основании без гипотезы Винклера – Циммермана : дипломная работа в Петроградском технол. ин-те / Г.Э. Проктор. – Петроград, 1922. – 98 с.
5. Кузнецов, В.И. Вопросы статического расчета верхнего строения пути / В.И. Кузнецов. – М. : Трансжелдориздат, 1940. – 136 с.
6. Жемочкин, Б.Н. Практические методы расчета фундаментных балок и плит на упругом основании / Б.Н. Жемочкин, А.П. Сеницын. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Госстройиздат, 1962. – 240 с.
7. Горбунов-Посадов, М.И. Осадки и давления под жесткими прямоугольными фундаментными плитами / М.И. Горбунов-Посадов // Строительная промышленность. – 1940. – № 8 – С. 15–21.
8. Горбунов-Посадов, М.И. Плиты на упругом основании / М.И. Горбунов-Посадов. – М. : Госстройиздат, 1941. – 76 с.
9. Александров, А.В. Основы теории упругости и пластичности / А.В. Александров, В.Д. Потапов. – М. : Высш. шк., 1990. – 400 с.
10. Ржаницын, Р.А. Строительная механика / Р.А. Ржаницын. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Высш. шк., 1991. – 439 с.
11. Босаков, С.В. Расчет системы перекрестных балок на двухслойном упругом основании / С.В. Босаков, Я.Д. Семенюк // Вестн. Брест. политехн. ин-та. Сер. Стр-во и архитектура. – 2000. – № 1. – С. 14–16.
12. Босаков, С.В. Расчет железобетонных пространственных фундаментов, как системы перекрестных балок, на упругом основании с учетом ползучести бетона / С.В. Босаков, С.Д. Семенюк // Вестн. БГТУ. Сер. Стр-во и архитектура. – 2001. – № 1. – С. 13–16.
13. Босаков, С.В. Статические расчеты плит на упругом основании / С.В. Босаков. – Минск : БНТУ, 2002. – 127 с.
14. Семенюк, С.Д. Железобетонные и пространственные фундаменты жилых и гражданских зданий на неравномерно деформированном основании : моногр. / С.Д. Семенюк. – Могилев : Белорус.-Рос. ун-т, 2003. – 269 с.
15. Босаков, С.В. Метод Ритца в контактных задачах теории упругости : моногр. / С.В. Босаков. – Брест : БрГТУ, 2006. – 108 с.
16. Босаков, С.В. Вариационно-разностный подход в решении контактной задачи для нелинейно упругого неоднородного основания. Плоская деформация. Теория расчета. Часть 1 / С.В. Босаков, О.В. Козунова // Вестн. БНТУ. – 2009. – № 1. – С. 5–13.
17. Тимошенко, С.П. Теория упругости / С.П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – 2-е изд. – М. : Наука, 1979. – 560 с.
18. Дьяконов, В.П. Mathematica 5/6/7. Полное руководство / В.П. Дьяконов. – М. : ДМК Пресс, 2010. – 624 с.

Поступила 21.09.2021

## CALCULATION OF AN INFINITE SYSTEM OF CROSS BEAMS ON AN ELASTIC BASE BY THE VARIATION-DIFFERENCE METHOD

**O. KOZUNOVA, K. SIROSH**

*In this paper, the authors consider the method of calculating an infinite system of cross beams on an elastic base by the variational-difference method. The system of cross beams on an elastic base is most often modeled as shallow strip foundations for buildings of various functional purposes. The variation-difference method is one of the numerical and analytical methods for calculating building structures, it is based on the variational principles of the Ritz-Timoshenko method and on the minimum of the total potential energy of the entire system according to the Lagrange principle, and is also close to the real operating conditions of the foundation – base. A single-layer isotropic artificial base was used as an elastic base in the work, as an elastic layer limited in thickness. Numerical approximation of the results of calculation of the system of cross beams on an elastic base was carried out using the MATHEMATICA software package.*

**Keywords:** *Infinite system of cross beams, Ritz-Timoshenko method, variation-difference method, elastic base, elastic layer, contact zone, deflections of the beam, precipitation of the base, contact stresses, internal forces.*