ВЕСТНИК УДМУРТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. КОМПЬЮТЕРНЫЕ НАУКИ
МАТЕМАТИКА 2020. Т. 30. Вып. 2. С. 221–236.

УДК 517.926, 517.977

© *А. А. Козлов*

КРИТЕРИЙ РАВНОМЕРНОЙ ГЛОБАЛЬНОЙ ДОСТИЖИМОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Рассматривается линейная нестационарная управляемая система

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

с кусочно-непрерывными и ограниченными ω-периодическими матрицами коэффициентов $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$. Управление в системе (1) строится по принципу линейной обратной связи $u = U(t)x$ с кусочно-непрерывной и ограниченной матричной функцией $U(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Для замкнутой системы

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U(t))x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

исследуется вопрос об условиях ее равномерной глобальной достижимости. Наличие последнего свойства у системы (2) означает существование такой матричной функции $U(t)$, $t \in \mathbb{R}$, которая обеспечивает для матрицы Коши $X_U(t,s)$ этой системы выполнение равенств $X_U((k+1)T, kT) = H_k$ при фиксированном $T > 0$ и произвольных $k \in \mathbb{Z}$, $\det H_k > 0$. Представленная задача решается в предположении равномерной полной управляемости (в смысле Калмана) системы (1), соответствующей замкнутой системе (2), т. е. при условии существования для системы (1) таких чисел $\sigma > 0$ и $\alpha_i > 0$, $i = \overline{1,4}$, что при всяких числе $t_0 \in \mathbb{R}$ и векторе $\xi \in \mathbb{R}^n$ справедливы неравенства

$$\alpha_1\|\xi\|^2 \leqslant \xi^* \int_{t_0}^{t_0+\sigma} X(t_0,s)B(s)B^*(s)X^*(t_0,s)\,ds\,\xi \leqslant \alpha_2\|\xi\|^2,$$

$$\alpha_3\|\xi\|^2 \leqslant \xi^* \int_{t_0}^{t_0+\sigma} X(t_0+\sigma,s)B(s)B^*(s)X^*(t_0+\sigma,s)\,ds\,\xi \leqslant \alpha_4\|\xi\|^2,$$

в которых $X(t,s)$ — матрица Коши линейной системы (1) при $u(t) \equiv 0$. Доказано, что свойство равномерной полной управляемости (в смысле Калмана) периодической системы (1) является необходимым и достаточным условием равномерной глобальной достижимости соответствующей системы (2).

Ключевые слова: линейная управляемая система с периодическими коэффициентами, равномерная полная управляемость, равномерная глобальная достижимость.

DOI: 10.35634/vm200206

Пусть $\mathbb{R}^n$ — n-мерное векторное евклидово пространство с нормой $\|x\| = \sqrt{x^*x}$ для любого вектора $x \in \mathbb{R}^n$ (символ * здесь и всюду далее означает операцию транспонирования вектора или матрицы); M_{mn} — пространство вещественных $(m \times n)$-матриц со спектральной (операторной) нормой $\|A\| = \max\limits_{x \neq 0} \|Ax\|/\|x\|$, т. е. нормой, индуцируемой евклидовыми нормами в векторных пространствах $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$; $\mathrm{M}_n := \mathrm{M}_{nn}$; $E \in \mathrm{M}_n$ — единичная матрица.

Рассмотрим линейную нестационарную управляемую систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad n, m \in \mathbb{N}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

с кусочно-непрерывными и ограниченными ω-периодическими матрицами коэффициентов $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$. Выбирая управление u в системе (1) по принципу линейной обратной связи

$$u = U(t)x,$$

где U — некоторая кусочно-непрерывная и ограниченная ω-периодическая $(m \times n)$-матрица, получим замкнутую однородную систему с кусочно-непрерывными и ограниченными ω-периодическими коэффициентами

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U(t))x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Обозначим через $X_U(t,s)$, $t,s \in \mathbb{R}$, матрицу Коши системы (2) с управлением U, а через $X(t,s) := X_0(t,s)$, $t,s \in \mathbb{R}$, — матрицу Коши системы (2) с нулевым управлением, т. е. системы

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Замечание 1 (см. [1,2, с. 302–303]). Для матрицы Коши линейной однородной ω-периодической системы (3) справедливо [3, с. 183] равенство $X(t+\omega,0) = X(t,0)X(\omega,0)$, поэтому при всех $t \in \mathbb{R}$ и $l \in \mathbb{Z}$ выполняются соотношения

$$X(t+l\omega,0) = X(t+(l-1)\omega+\omega,0) = X(t+(l-1)\omega,0)X(\omega,0) =$$

$$= X(t+(l-2)\omega,0)X^2(\omega,0) = \ldots = X(t,0)X^l(\omega,0).$$

При любых фиксированных числах $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ обозначим через $\mathcal{M}_n(\alpha,\beta) \subset \mathrm{M}_n$ множество квадратных матриц n-го порядка, удовлетворяющих оценкам $\|\Lambda\| \leqslant \alpha$ и $\det\Lambda \geqslant \beta$.

Определение 1 (см. [4], [2, с. 253]). Будем говорить, что система (2) обладает следующими свойствами:

1) *T-равномерной глобальной достижимости относительно неограниченного множества* $\mathbb{U} \subset \mathrm{M}_{mn}$, если для любых $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ найдется такая величина $d = d(\alpha,\beta) > 0$, при которой для произвольной матрицы $\Lambda \in \mathcal{M}_n(\alpha,\beta)$ и всякого $t_0 \in \mathbb{R}$ существует измеримое и ограниченное управление $U\colon [t_0, t_0+T] \to \mathbb{U}$, удовлетворяющее при всех $t \in [t_0, t_0+T]$ оценке $\|U(t)\| \leqslant d(\alpha,\beta)$ и гарантирующее для матрицы Коши $X_U(t,s)$ системы (2) выполнение равенства
$$X_U(t_0+T, t_0) = \Lambda;$$

2) *T-равномерной глобальной достижимости*, если она T-равномерно глобально достижима относительно множества $\mathbb{U} = \mathrm{M}_{mn}$;

3) *равномерной глобальной достижимости*, если она T-равномерно глобально достижима при некотором $T > 0$.

Замечание 2. Термин «равномерная глобальная достижимость» был введен В. А. Зайцевым и Е. Л. Тонковым в работе [4] для линейных нестационарных систем (2) с кусочно-непрерывными и ограниченными коэффициентами и управлением. Определение 1 отличается от введенного в [4] расширением функционального класса множества управляющих воздействий. В таком случае появляется возможность изучения свойства равномерной глобальной достижимости у систем (2) с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами.

Замечание 3. Свойство равномерной глобальной достижимости системы (2) дает возможность управления всем конечномерным базисом пространства решений этой системы на произвольном временно́м отрезке фиксированной длины T, т. е. позволяет выбрать такое матричное управление U, при котором совокупность $\{x_i(t)\}_{i=1}^n$ линейно-независимых решений системы (2) с этим управлением и начальными условиями — соответствующими векторами e_i, $i=\overline{1,n}$, канонического ортонормированного базиса пространства $\mathbb{R}^n$ — через время T будет совпадать с произвольным наперед заданным правым базисом этого пространства.

На основании свойства равномерной глобальной достижимости устанавливается глобальная управляемость различных асимптотических инвариантов [6, 7] линейной системы (2) (см., например, монографию [2]), в том числе и ее глобальная ляпуновская приводимость [2, с. 259], [5].

Определение 2 (см. [2, с. 253], [5]). Будем говорить, что система (2) обладает *свойством глобальной ляпуновской приводимости*, если для любой кусочно-непрерывной и ограниченной $(n{\times}n)$-матрицы $C(t)$, $t\in\mathbb{R}$, найдется кусочно-непрерывное и ограниченное управление $\widehat{U}\colon \mathbb{R}\to \mathrm{M}_{mn}$, обеспечивающее асимптотическую эквивалентность [8] линейной системы

$$\dot z = C(t)z,\quad z\in\mathbb{R}^n,\quad t\in\mathbb{R}, \tag{4}$$

и системы (2) с управлением $U=\widehat{U}(t)$, $t\in\mathbb{R}$, т. е. найдется линейное преобразование (преобразование Ляпунова [3, с. 153–154]) $x=L(t)z$ с обратимой абсолютно непрерывной функцией $L=L(t)$, заданной на множестве вещественных чисел со значениями во множестве $(n\times n)$-матриц и удовлетворяющей для всех $t\in\mathbb{R}$ оценке $\|L(t)\|+\|L^{-1}(t)\|+ + \sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\int_t^{t+1}\|\dot L(\tau)\|\,d\tau<\infty$, связывающее систему (2), замкнутую управлением $U=\widehat{U}(t)$ при всех $t\in\mathbb{R}$, и систему (4).

Задача о глобальной ляпуновской приводимости (равно как и задача о равномерной глобальной достижимости) системы (2) решается (см., например, [2, с. 281–324]) при условии равномерной полной управляемости системы (1), соответствующей замкнутой линейной системе (2).

Определение 3 (см. [9]). Система (1) называется *равномерно вполне управляемой* (в смысле Калмана), если существуют такие числа $\sigma>0$ и $\alpha_i>0$, $i=\overline{1,4}$, что при всяком $t_0\in\mathbb{R}$ имеют место неравенства

$$\alpha_1E\leqslant W(t_0,t_0+\sigma)\leqslant\alpha_2E,\quad \alpha_3E\leqslant\widehat{W}(t_0,t_0+\sigma)\leqslant\alpha_4E, \tag{5}$$

в которых *матрица управляемости* (*матрица Калмана*) $W(\cdot,\cdot)$ определяется равенством

$$W(t_0,t_0+\sigma):=\int_{t_0}^{t_0+\sigma}X(t_0,s)B(s)B^*(s)X^*(t_0,s)\,ds,$$

где, как и ранее, E — единичная матрица, $X(t,s)$ — матрица Коши линейной системы (3),

$$\widehat{W}(t_0,t_0+\sigma):=X(t_0+\sigma,t_0)W(t_0,t_0+\sigma)X^*(t_0+\sigma,t_0).$$

Замечание 4. Здесь неравенства (5) понимаются в смысле квадратичных форм и означают выполнение для любого вектора $\xi\in\mathbb{R}^n$ обычных числовых неравенств

$$\alpha_1\|\xi\|^2\leqslant\xi^*W(t_0,t_0+\sigma)\xi=\int_{t_0}^{t_0+\sigma}\|\xi^*X(t_0,s)B(s)\|^2\,ds\leqslant\alpha_2\|\xi\|^2;$$

$$\alpha_3\|\xi\|^2\leqslant\xi^*\widehat{W}(t_0,t_0+\sigma)\xi=\int_{t_0}^{t_0+\sigma}\|\xi^*X(t_0+\sigma,s)B(s)\|^2\,ds\leqslant\alpha_4\|\xi\|^2.$$

Для равномерно вполне управляемых дву- и трехмерных стационарных линейных систем В. А. Зайцевым [10], а для четырехмерных стационарных — В. А. Зайцевым (совместно с А. Ф. Габдрахимовым) [11] доказана равномерная глобальная достижимость в классе кусочно-постоянных управлений. И. Н. Сергеевым [12] при помощи метода приведения к канонической форме (см. подробнее о данном методе, например, в [13, с. 41–53], [14, с. 243–316]) была установлена равномерная глобальная достижимость стационарной системы (2) произвольной размерности фазового пространства при условии полной управляемости соответствующей системы (1). В случае нестационарной линейной системы (1) с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными [6, с. 252] коэффициентами, заданной в специальном виде — в нижней форме Хессенберга, В. А. Зайцевым получены [15], [16, теорема 4.5] достаточные условия равномерной глобальной достижимости соответствующей системы (3). Для линейных же нестационарных систем (3) общего вида с кусочно-непрерывными и ограниченными коэффициентами решение задачи об их равномерной глобальной достижимости было получено С. Н. Поповой и Е. К. Макаровым [2, с. 310–325], [5] лишь для двумерного случая и в предположении равномерной полной управляемости (по Калману) соответствующей системы (1) и кусочной равномерной непрерывности [2, с. 264–265] матрицы при управлении $B(\cdot)$.

Определение 4 (см. [1], [2, с. 264–265], [17]). Будем говорить, что матричная функция B, $B\colon \mathbb{R} \to \mathrm{M}_{nm}$, *кусочно равномерно непрерывна* на $\mathbb{R}$, если

1) $B(\cdot)$ — кусочно-непрерывная матричная функция на $\mathbb{R}$;

2) существует такое число $\Delta > 0$, что длина каждого интервала непрерывности I_i, $i \in \mathbb{I}$, функции $B(\cdot)$ удовлетворяет неравенству $|I_i| \geqslant \Delta$;

3) для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\Delta = \Delta(\varepsilon) > 0$, что для каждого $i \in \mathbb{I}$ и всех $t, s \in I_i$, удовлетворяющих неравенству $|t-s| \leqslant \Delta$, выполнено соотношение $\|B(t)-B(s)\| \leqslant \varepsilon$.

Замечание 5. Легко заметить, что всякая кусочно-непрерывная и ограниченная ω-периодическая функция принадлежит множеству кусочно равномерно непрерывных функций.

Теорема 1 (см. [2, с. 310–325], [5]). *Для любой двумерной линейной нестационарной σ-равномерно вполне управляемой системы* (1) *с кусочно непрерывными и ограниченными коэффициентами и кусочно равномерно непрерывной матрицей $B(\cdot)$ соответствующая замкнутая система* (2) *обладает свойством 4σ-равномерной глобальной достижимости.*

Автору настоящей статьи удалось отказаться от требования кусочной равномерной непрерывности матрицы $B(\cdot)$ и установить [18], [19, теорема 2.4] равномерную глобальную достижимость системы (2) с кусочно-непрерывными и ограниченными коэффициентами любого порядка n и квадратной $(n \times n)$-матрицей $B(\cdot)$, однако при более сильном (см. [19, пример 2.1]), чем равномерная полная управляемость (по Калману), условии равномерной интегральной невырожденности [18], [19, с. 23], [20] матрицы $B(\cdot)$. Обобщением же теоремы 1 на случай произвольных двумерных линейных систем (2) с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами является полученная автором данной работы совместно с И. В. Инц следующая теорема.

Теорема 2 (см. [21]). *Если двумерная линейная управляемая система* (1) *с локально интегрируемыми и интегрально ограниченными коэффициентами равномерно вполне управляема, то соответствующая замкнутая система* (2) *является равномерно глобально достижимой.*

Замечание 6. В статье [21] (в том числе и при доказательстве теоремы 2) И. В. Инц и А. А. Козлов пользуются иным, отличным от калмановского (см. определение 3), но эквивалентным последнему в классе кусочно-непрерывных и ограниченных систем (1) определением равномерной полной управляемости, предложенным Е. Л. Тонковым в работе [22].

Определение 5 (см. [22], [2, с. 93]). Система (1) обладает *свойством равномерной полной управляемости* (по Тонкову), если существуют такие числа $\sigma > 0$ и $\gamma > 0$, что при любых $t_0 \geqslant 0$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n$ на отрезке $[t_0, t_0 + \sigma]$ найдется измеримое и ограниченное управление $u = u(t)$, при всех $t \in [t_0, t_0 + \sigma]$ удовлетворяющее неравенству $\|u(t)\| \leqslant \gamma \|x_0\|$ и переводящее вектор начального состояния $x(t_0) = x_0$ системы (1) в ноль на этом отрезке.

Иных результатов по глобальной достижимости систем (2) на сегодняшний день не имеется.

В работе [1] С. Н. Поповой был установлен критерий глобальной ляпуновской приводимости ω-периодической системы с кусочно-непрерывными и ограниченными коэффициентами.

Теорема 3 (см. [1], [2, с. 300–310]). *Система* (1) *с кусочно-непрерывными и ограниченными ω-периодическими коэффициентами равномерно вполне управляема* (*по Калману*) *тогда и только тогда, когда соответствующая замкнутая система* (2) *обладает свойством глобальной ляпуновской приводимости.*

Доказательство этого критерия основано на нижеприведенных теореме 4 и следствии 1, а также лемме 2, представленных в той же работе [1] (см. также монографию [2, с. 289–295]). Прежде чем переходить к их формулировке, введем по аналогии со статьей [1] следующие, используемые нами далее соглашения и обозначения. Всюду далее будем использовать определение равномерной полной управляемости (в смысле Калмана) (см. определение 3). Для произвольной матрицы $H = \{h_{ij}\}_{i,j=1}^{n} \in M_n$ обозначим через $(H)_k \in M_k$ ее ведущую главную подматрицу [23, с. 479] порядка k, т. е. матрицу, составленную из элементов, стоящих в первых k столбцах и строках. Для любых положительных чисел r и ρ через $\mathcal{H}(r, \rho)$ будем обозначать множество всех тех матриц $H \in M_n$, для которых выполнена оценка $\|H - E\| \leqslant r$, а определители всех ведущих главных подматриц (т. е. главные угловые миноры [23, с. 30]) удовлетворяют неравенствам $\det(H)_i \geqslant \rho$, $i = \overline{1, n}$; т. е. совокупность вида

$$\mathcal{H}(r, \rho) = \{H \in M_n \colon \|H - E\| \leqslant r, \quad \det(H)_j \geqslant \rho, \quad j = 1, \ldots, n\}.$$

Теорема 4 (см. [1], [2, с. 289–294]). *Если система* (1) *σ-равномерно вполне управляема, $B(\cdot)$ кусочно равномерно непрерывна, то для каждого $t_0 \in \mathbb{R}$ найдется такая обратимая матрица $F = F(t_0) \in \mathrm{M}_n$, обеспечивающая выполнение следующего свойства: для любых $r > 0$ и $0 < \rho \leqslant 1$ существует не зависящая от t_0 величина $\theta = \theta(r, \rho) > 0$ такая, что для всякой матрицы $H \in \mathcal{H}(r, \rho)$ найдется кусочно-непрерывное управление $U \colon [t_0, t_0 + \sigma] \to \mathrm{M}_{mn}$, $\|U(t)\| \leqslant \theta$ при всех $t \in [t_0, t_0 + \sigma]$, при котором матрица Коши $X_U(t, s)$ системы* (2) *удовлетворяет равенству*

$$X_U(t_0 + \sigma, t_0) = X(t_0 + \sigma, t_0) F H F^{-1}.$$

Замечание 7. Пользуясь терминологией работы [2, с. 274], в дальнейшем будем говорить, что матрица $F(t_0)$ образует *базис чистых движений* для системы (1) на отрезке $[t_0, t_0 + \sigma]$.

Следствие 1 (см. [1], [2, с. 295]). *Если система* (1) *σ-равномерно вполне управляема, матрица $B(\cdot)$ кусочно равномерно непрерывна, то для любых $r>0$ и $0<\rho\leqslant 1$ существует не зависящая от t_0 величина $\theta=\theta(r,\rho)>0$ такая, для каждого $t_0\in\mathbb{R}$ найдется такая обратимая матрица $F=F(t_0)\in\mathrm{M}_n$ (образующая для системы* (1) *базис чистых движений), при которой для всяких матриц с положительными диагональными элементами нижней треугольной L и верхней треугольной G существует кусочно-непрерывное и ограниченное управление $U\colon[t_0,t_0+\sigma]\to\mathrm{M}_{mn}$, $\|U(t)\|\leqslant\theta$ при $t\in[t_0,t_0+\sigma]$, обеспечивающее для системы* (1) *равенство*

$$X_U(t_0+\sigma,t_0)=X(t_0+\sigma,t_0)FLGF^{-1}.$$

Замечание 8. Пусть $\sigma:=n\omega$. Известно (см. замечание 28.1 работы [2]), что если матрица $F:=F(0)$ образует базис чистых движений для ω-периодической системы (1) на отрезке $[0,\sigma]$, то она образует такой базис на каждом из отрезков $[k\sigma,(k+1)\sigma]$, $k\in\mathbb{Z}$. Кроме того, в силу теоремы 4 и замечания 27.1 работы [2] для этой матрицы F найдутся числа $g=g(F)>0$ и $f=f(F)>0$, которые обеспечивают оценки $\|F^{-1}\|\leqslant g$ и $\|F\|\cdot\|F^{-1}\|\leqslant f$.

Оказывается справедливо и более сильное, чем теорема 3, утверждение об эквивалентности равномерной полной управляемости системы (1) с кусочно-непрерывными и ограниченными ω-периодическими коэффициентами и равномерной глобальной достижимости соответствующей замкнутой системы (2). Доказательству этого утверждения и посвящена данная работа.

Прежде чем переходить к установлению основного результата работы, сформулируем некоторые ранее известные (см. ниже лемму 1 и теорему 5) и докажем одно новое (см. далее лемму 2) утверждения, относящиеся прежде всего не к области дифференциальных уравнений, а к теории матриц, но при этом играющие важную роль в наших дальнейших рассуждениях.

В работе [1] (см. также [2, с. 301]) по глобальной ляпуновской приводимости равномерно вполне управляемых ω-периодических систем (2) С. Н. Поповой была установлена следующая лемма.

Лемма 1 (см. [1], [2, с. 301]). *Для любой невырожденной $(n\times n)$-матрицы X найдется нижняя треугольная матрица $L\in\mathrm{M}_n$ с единичной диагональю, такая, что в QR-разложении произведения XL ортогональная матрица $Q\in\mathrm{M}_n$ при некотором $k\in\mathbb{N}$ удовлетворяет равенству $Q^k=E$, а верхнетреугольная матрица R имеет положительные диагональные элементы.*

Пусть $\mathcal{LU}_n\subset\mathrm{M}_n$ — совокупность всех верхне- и нижнетреугольных матриц n-го порядка с положительными диагональными элементами. Тогда для произвольных чисел $r\geqslant 1$ и $0<\rho\leqslant 1$ через $\mathcal{LU}_n(r,\rho)\subset\mathrm{M}_n$ обозначим множество верхне- и нижнетреугольных матриц

$$\mathcal{LU}_n(r,\rho):=\{H\in\mathcal{LU}_n\colon \|H\|\leqslant r,\quad \det H\geqslant\rho\}.$$

В статье [24] автором настоящей работы была получена необходимая нам в дальнейшем факторизация матриц из $\mathcal{M}_n(\alpha,\beta)$ с помощью матриц, принадлежащих множеству $\mathcal{LU}_n(r,\rho)$.

Теорема 5 (см. [24]). *При любых фиксированных числах $\alpha>0$ и $\beta>0$ существуют такие $r=r(\alpha,\beta)\geqslant 1$ и $\rho=\rho(\beta)\in(0,1]$, что для всякой матрицы $H\in\mathcal{M}_n(\alpha,\beta)$ найдутся матрицы $H_i\in\mathcal{LU}_n(r,\rho)$, $i=\overline{1,9}$, при которых матрица H представляется в виде $H=H_9\cdot\ldots\cdot H_1$.*

Замечание 9. Из доказательства само́й теоремы 5 (см. теорему 2.2 работы [24]) следует, что входящие в разложение матрицы $H \in \mathcal{M}_n(\alpha, \beta)$ сомножители $H_i \in \mathcal{LU}_n(r, \rho)$, имеющие нечетные индексы, являются верхними треугольными, а четные же индексы — нижними треугольными матрицами с положительными диагональными элементами.

Имеет место следующая лемма.

Лемма 2. *Для произвольных чисел $r > 0$ и $0 < \rho \leqslant 1$ найдутся такие величины $r_1 = r_1(r) > 0$ и $\rho_1 = \rho_1(r, \rho) \in (0, 1]$, при которых справедливо включение $\mathcal{LU}_n(r, \rho) \subset \mathcal{H}(r_1, \rho_1)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем произвольные числа $r > 0$ и $0 < \rho \leqslant 1$ и рассмотрим множество $\mathcal{LU}_n(r, \rho)$. Возьмем любую матрицу $G = \{g_{ij}\}_{i,j=1}^n$ из этого множества и покажем, что найдутся такие числа $r_1 = r_1(r) > 0$ и $\rho_1 = \rho_1(r, \rho) \in (0, 1]$, при которых выполняется включение $G \in \mathcal{H}(r_1, \rho_1)$. Так как G — треугольная матрица с положительной диагональю, то справедливо равенство $\det G = \prod_{i=1}^n g_{ii}$, из которого, используя неравенство Адамара [23, с. 565] $\det G \leqslant \|Ge_1\| \cdot \ldots \cdot \|Ge_n\|$ и оценки $g_{ii} \leqslant \|Ge_i\| \leqslant \|G\| \leqslant r$, $i = \overline{1, n}$, и $\det G \geqslant \rho$, верные в силу включения $G \in \mathcal{LU}_n(r, \rho)$, для элементов g_{ii}, $i = \overline{1, n}$, следуют соотношения $g_{ii} = \det G / (g_{11} \cdot \ldots \cdot g_{i-1\,i-1} \cdot g_{i+1\,i+1} \cdot \ldots \cdot g_{nn}) \geqslant \rho / (\|G_1\| \cdot \ldots \|G_{i-1}\| \cdot \|G_{i+1}\| \cdot \ldots \cdot \|G_n\|) \geqslant \rho / r^{n-1}$. Тогда, ввиду треугольности матрицы G, при всех $i = \overline{1, n}$ имеют место оценки $\det(G)_i = \prod_{k=1}^i g_{kk} \geqslant (\rho / r^{n-1})^i \geqslant (\rho / (r+1)^{n-1})^n$. Отсюда и из неравенств $\|G - E\| \leqslant \|G\| + 1 \leqslant r + 1$, справедливых в силу принадлежности $G \in \mathcal{LU}_n(r, \rho)$, положив $r_1 := r + 1$ и $\rho_1 := (\rho / r_1^{n-1})^n$, получим требуемые соотношение $G \in \mathcal{H}(r_1, \rho_1)$ и, ввиду произвольности матрицы $G \in \mathcal{LU}_n(r, \rho)$, включение $\mathcal{LU}_n(r, \rho) \subset \mathcal{H}(r_1, \rho_1)$. Лемма 2 доказана. $\square$

Основным результатом настоящей работы является нижеприведенное утверждение.

Теорема 6. *Система (1) с кусочно-непрерывными и ограниченными ω-периодическими коэффициентами равномерно вполне управляема тогда и только тогда, когда соответствующая замкнутая система (2) обладает свойством равномерной глобальной достижимости.*

Д о к а з а т е л ь с т в о н е о б х о д и м о с т и будем проводить в соответствии с доказательством необходимости теоремы 3 работы [1] (см. также [2, теорема 28.1]). Пусть $\sigma := n\omega$. Поскольку система (1) σ-равномерно вполне управляема, то, ввиду замечания 8, на основании теоремы 4 построим для этой системы матрицу $F_1 \in \mathrm{M}_n$, образующую базис чистых движений на каждом из отрезков $[k\sigma, (k+1)\sigma]$, $k \in \mathbb{Z}$. Так как матрица Коши $X((k+1)\sigma, k\sigma) = X(\sigma, 0)$ однородной периодической системы не зависит от $k \in \mathbb{Z}$, то положим $X := F_1^{-1} X((k+1)\sigma, k\sigma) F_1$. Применяя лемму 1, найдем такую нижнетреугольную матрицу $L \in \mathrm{M}_n$ с единичной диагональю, что выполняется равенство $XL = QR$, где Q — ортогональная матрица, удовлетворяющая равенству $Q^l = E$ для некоторого $l \in \mathbb{N}$, а верхнетреугольная матрица $R \in \mathrm{M}_n$ имеет положительные диагональные элементы. Тогда матрица R^{-1} — верхнетреугольная, с положительными диагональными элементами. Пользуясь следствием 1, на каждом из отрезков $[k\sigma, (k+1)\sigma]$, $k \in \mathbb{Z}$, построим такое кусочно-непрерывное и ограниченное управление $U_1(\cdot)$, что матрица Коши $X_{U_1}(t, s)$, $t, s \geqslant 0$, системы (2) с этим управлением удовлетворяет равенствам

$$X_{U_1}((k+1)\sigma, k\sigma) = X((k+1)\sigma, k\sigma) F_1 (L R^{-1}) F_1^{-1} = F_1 X L R^{-1} F_1^{-1} = \\ = F_1 Q R R^{-1} F_1^{-1} = F_1 Q F_1^{-1}. \tag{6}$$

Заметим, что управление $U_1 = U_1(\cdot)$ может быть выбрано σ-периодическим. Обозначим через $\delta_1 > 0$ величину, удовлетворяющую при каждом $t \in \mathbb{R}$ соотношению $\|U_1(t)\| \leqslant \delta_1$.

Применим к нестационарной системе (2) с управлением $U = U_1(t)$, $t \in \mathbb{R}$, т. е. к системе

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U_1(t))x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R},$$

преобразование $x = F_1 y$ с постоянной невырожденной матрицей $F_1 \in \mathrm{M}_n$, получим линейную нестационарную систему с σ-периодическими кусочно-непрерывными и ограниченными коэффициентами

$$\dot{y} = F_1^{-1}\dot{x} = F_1^{-1}(A(t) + B(t)U_1(t))x = F_1^{-1}(A(t) + B(t)U_1(t))F_1 y, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

для матрицы Коши $Y_{U_1}(t,s)$ которой при всех $t, s \in \mathbb{R}$, очевидно, справедливо равенство $Y_{U_1}(t,s) = F_1^{-1}X_{U_1}(t,s)F_1$, а значит, ввиду формул (6), выполняются и соотношения

$$Y_{U_1}(\sigma,0) = F_1^{-1}X_{U_1}(\sigma,0)F_1 = F_1^{-1}(F_1QF_1^{-1})F_1 = Q.$$

Положим $a := \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|A(t)\|$, $b := \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \|B(t)\|$ и покажем, что матричная функция $Y_{U_1}(t,0)$ переменной $t \in \mathbb{R}$ является матрицей Ляпунова. Прежде всего, в силу замечания 1 и определения матрицы Q имеют место соотношения $Y_{U_1}(t + l\sigma, 0) = Y_{U_1}(t,0)Y_{U_1}^l(\sigma,0) = Y_{U_1}(t,0)Q^l = Y_{U_1}(t,0)$, поэтому матричная функция $Y_{U_1}(t,0)$ является периодической с периодом $l\sigma$. Тогда, на основании замечания 8, обозначая через $f_1 > 0$ величину, обеспечивающую оценку $\|F_1^{-1}\|\,\|F_1\| \leqslant f(F_1) =: f_1$, оценим сверху при всяком $t \in \mathbb{R}$ норму этой функции. Используя периодичность функции $Y_{U_1}(t,0)$, $t \in \mathbb{R}$, лемму Гронуолла–Беллмана [3, с. 108], элементарные свойства нормы матрицы, а также определения величин a, b, f_1, δ_1, имеем соотношения

$$\begin{gathered}
\|Y_{U_1}(t,0)\| \leqslant \sup_{t\in\mathbb{R}} \|Y_{U_1}(t,0)\| = \sup_{t\in[0,l\sigma]} \|Y_{U_1}(t,0)\| \leqslant \\
\leqslant \sup_{t\in[0,l\sigma]} \left(\exp\Big\| \int_0^t F_1^{-1}(A(\tau) + B(\tau)U_1(\tau))F_1\, d\tau \Big\| \right) \leqslant \\
\leqslant \sup_{t\in[0,l\sigma]} \left(\exp\Big(\int_0^t \|F_1^{-1}(A(\tau) + B(\tau)U_1(\tau))F_1\| d\tau \Big) \right) \leqslant \\
\leqslant \sup_{t\in[0,l\sigma]} \left(\exp\Big(\|F_1^{-1}\|\|F_1\| \int_0^t (\|A(\tau)\| + \|B(\tau)\|\,\|U_1(\tau)\|) d\tau \Big) \right) \leqslant \\
\leqslant \exp\left(\|F_1^{-1}\|\|F_1\| \int_0^{l\sigma} \Big(\|A(\tau)\| + \|B(\tau)\|\,\|U_1(\tau)\| \Big) d\tau \right) \leqslant \\
\leqslant \exp\big(f_1(a + b\delta_1)l\sigma \big) =: \Delta_1.
\end{gathered} \tag{8}$$

Оценим теперь сверху норму обратной для матрицы $Y_{U_1}(t,0)$. Матрица $Y_{U_1}^*(0,t)$ является нормированной в нуле $(l\sigma)$-периодической фундаментальной матрицей сопряженной системы

$$\dot{\eta} = -F_1^*\big(A(t) + B(t)U_1(t)\big)^*\big(F_1^{-1}\big)^*\eta, \quad \eta \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{9}$$

поэтому на основании элементарных свойств матрицы Коши и нормы матрицы, леммы Гронуолла–Беллмана [3, с. 108], а также определения величин a, b, f_1, δ_1 имеем аналогичные формулам (8) соотношения

$$\|Y_{U_1}^{-1}(t,0)\| = \|Y_{U_1}(0,t)\| = \|Y_{U_1}^*(0,t)\| \leqslant \sup_{t\in\mathbb{R}} \|Y_{U_1}^*(0,t)\| = \sup_{t\in[0,l\sigma]} \|Y_{U_1}^*(0,t)\| \leqslant$$
$$\leqslant \exp\left(\left\|\int_0^{l\sigma} \left(-F_1^*(A(\tau)+B(\tau)U_1(\tau))(F_1^{-1})^*\right) d\tau\right\|\right) \leqslant \qquad (10)$$
$$\leqslant \exp\bigl(f_1(a+b\delta_1)l\sigma\bigr) = \Delta_1.$$

Используя формулу (7), определения величин a, b, f_1, δ_1, Δ_1, установим, наконец, оценку сверху нормы производной $\dot{Y}_{U_1}(t,0)$ матрицы Коши системы (7). Имеют место неравенства

$$\|\dot{Y}_{U_1}(t,0)\| \leqslant \sup_{t\in\mathbb{R}} \|\dot{Y}_{U_1}(t,0)\| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{t\in\mathbb{R}} \Bigl\|F_1^{-1}\bigl(A(t)+B(t)U_1(t)\bigr)F_1 Y_{U_1}(t,0)\Bigr\| \leqslant f_1(a+b\delta_1)\Delta_1.$$

Тогда очевидна оценка

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \int_t^{t+1} \|\dot{Y}_{U_1}(\tau,0)\| \leqslant f_1(a+b\delta_1)\Delta_1. \qquad (11)$$

Таким образом, в силу оценок (9), (10) и (11) заключаем, что $Y_{U_1}(t,0)$ — матрица Ляпунова.

Рассмотрим теперь линейную нестационарную управляемую систему

$$\dot{y} = F_1^{-1}(A(t)+B(t)U_1(t))F_1 y + F_1^{-1}B(t)u, \quad y\in\mathbb{R}^n, \quad u\in\mathbb{R}^m, \quad t\in\mathbb{R}. \qquad (12)$$

Система (12) является [2, с. 97–98] σ-равномерно вполне управляемой (в смысле Калмана), а ее коэффициенты, очевидно, кусочно-непрерывными и σ-периодическими на $\mathbb{R}$ функциями. Применив к этой системе преобразование Ляпунова $y = Y_{U_1}(t,0)\xi$, с учетом равенств (7) имеем соотношения

$$\dot{y} = \dot{Y}_{U_1}(t,0)\xi + Y_{U_1}(t,0)\dot{\xi} = \Bigl(F_1^{-1}\bigl(A(t)+B(t)U_1(t)\bigr)F_1 Y_{U_1}(t,0)\Bigr)\xi + Y_{U_1}(t,0)\dot{\xi} =$$
$$= F_1^{-1}\bigl(A(t)+B(t)U_1(t)\bigr)F_1 y + Y_{U_1}(t,0)\dot{\xi}.$$

Отсюда и из формулы (12), приравнивая правые части этих равенств, получим систему

$$\dot{\xi} = Y_{U_1}(0,t)F_1^{-1}B(t)u, \quad t\in\mathbb{R}, \qquad (13)$$

которая является (см., например, теорему 5.3 работы [2, с. 98]) σ-равномерно вполне управляемой (а значит, $(l\sigma)$-равномерно вполне управляемой) системой с кусочно-непрерывными, ограниченными и, очевидно, $(l\sigma)$-периодическими коэффициентами и нулевой матрицей при ξ.

Зафиксируем произвольные числа $\alpha > 0$ и $\beta > 0$. Возьмем любую матрицу $\Lambda \in \mathcal{M}(\alpha,\beta)$ и положим

$$\Lambda_1 := F_1^{-1}\Lambda F_1 \in \mathrm{M}_n. \qquad (14)$$

Обозначим

$$\vartheta := l\sigma \quad \text{и} \quad \vartheta_1 := 5\vartheta. \qquad (15)$$

Поскольку линейная нестационарная система (12) с ϑ-периодическими коэффициентами ϑ-равномерно вполне управляема, то, ввиду замечания 8, на основании теоремы 4 построим для этой системы матрицу $F_2 \in \mathrm{M}_n$, образующую базис чистых движений на каждом из отрезков $[k\vartheta, (k+1)\vartheta]$, $k \in \mathbb{Z}$. Сформируем также матрицу

$$\Lambda_2 := F_2^{-1}\,\Lambda_1 F_2 = \big(F_2^{-1}\,F_1^{-1}\Lambda F_1 F_2\big) \in \mathrm{M}_n. \tag{16}$$

Пусть в силу замечания 8 величина $f_2 > 0$ такова, что выполняется соотношение

$$\|F_2^{-1}\|\,\|F_2\| \leqslant f(F_2) =: f_2.$$

Тогда, ввиду последней оценки, включения $\Lambda \in \mathcal{M}(\alpha, \beta)$, а также определения величин f_1, f_2, для матрицы Λ_2 имеют место неравенства

$$\|\Lambda_2\| \leqslant \|F_2^{-1}\| \cdot \|F_1^{-1}\| \cdot \|\Lambda\| \cdot \|F_1\| \cdot \|F_2\| \leqslant \alpha f_1 f_2 =: \alpha_1(\alpha) = \alpha_1. \tag{17}$$

Кроме того, ввиду равенств (16) и включения $\Lambda \in \mathcal{M}(\alpha, \beta)$ для $\det \Lambda_2$ справедлива оценка

$$\det \Lambda_2 = \det\big(F_2^{-1}\,F_1^{-1}\Lambda F_1 F_2\big) = (\det F_2)^{-1} \cdot (\det F_1)^{-1} \cdot \det \Lambda \cdot \det F_1 \cdot \det F_2 = \det \Lambda \geqslant \beta.$$

Таким образом, отсюда и из формулы (17) следует включение $\Lambda_2 \in \mathcal{M}(\alpha_1, \beta)$. Тогда на основании теоремы 5 найдутся числа $r = r(\alpha_1, \beta) \geqslant 1$ и $\rho = \rho(\beta) \in (0, 1]$ и такие матрицы $H_i \in \mathcal{LU}(\rho, r)$, $i = \overline{1, 9}$, при которых матрица $\Lambda_2 \in \mathcal{M}(\alpha_1, \beta)$ представляется в виде

$$\Lambda_2 = H_9 \cdot H_8 \cdot \ldots \cdot H_1. \tag{18}$$

По лемме 2 существуют величины $r_1 = r_1(r)$ и $\rho_1 = \rho_1(\rho) \in (0, 1]$, при которых справедливо соотношение $\mathcal{LU}(\rho, r) \subset \mathcal{H}(r_1, \rho_1)$. Тогда в силу определения величин $r_1, \rho_1, r, \rho, \alpha_1, \beta$ и матриц H_i при всех $i = \overline{1, 9}$ имеет место включение $H_i \in \mathcal{H}(r_1, \rho_1) = \mathcal{H}(r_1(\alpha, \beta), \rho_1(\alpha, \beta))$, а значит, для матриц H_i, $i = \overline{1, 9}$, и равномерно вполне управляемой системы (13) справедливы теорема 4 и, ввиду замечания 9, ее следствие 1. Пользуясь этим следствием, для каждого $i = \overline{1, 4}$ и всех $j \in \mathbb{Z}$ на отрезках $[(i + 5j - 1)\vartheta, (i + 5j)\vartheta]$ построим матрицу $F_2 \in \mathrm{M}_n$, образующую базис чистых движений на каждом из этих отрезков, и такие кусочно-непрерывные и ограниченные управления $U^{(i)} = U^{(i)}(t)$, $t \in [(i{+}5j{-}1)\vartheta, (i{+}5j)\vartheta]$, при которых для матрицы Коши системы (13) с этими управлениями выполняются равенства

$$\Xi_{U^{(i)}}\big((i + 5j)\vartheta, (i + 5j - 1)\vartheta\big) = F_2\,H_{2i}H_{2i-1}F_2^{-1}, \quad i = \overline{1, 4}, \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{19}$$

На основании же теоремы 4 для всех $j \in \mathbb{Z}$ на отрезках $[(5j{+}4)\vartheta, 5(j{+}1)\vartheta]$ также построим базис чистых движений (очевидно, совпадающий с матрицей $F_2 \in \mathrm{M}_n$) и найдем кусочно-непрерывные и ограниченные управления $U^{(5)} = U^{(5)}(\cdot)$, обеспечивающие для матрицы Коши системы (13) с такими управлениями равенства

$$\Xi_{U^{(5)}}\big(5(j + 1)\vartheta, (5j + 4)\vartheta\big) = F_2\,H_9 F_2^{-1}, \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{20}$$

Положим $U_2(t) \equiv U^{(i)}(t)$, $t \in [(i + 5j - 1)\vartheta, (i + 5j)\vartheta)$, $i = \overline{1, 5}$, $j \in \mathbb{Z}$. Тогда управление $U_2(\cdot)$ — кусочно-непрерывная и ограниченная на $\mathbb{R}$ матричная функция, которая при каждом $t \in \mathbb{R}$ удовлетворяет оценке $\|U_2(t)\| \leqslant \max\{\|U^{(i)}(t)\|, t \in [(i + 5j - 1)\vartheta, (i + 5j)\vartheta), i = \overline{1, 5}, j \in \mathbb{Z}\} =: \delta_2$ и обеспечивает для матрицы Коши $\Xi_{U_2}(t, s)$, $t, s \in \mathbb{R}$, системы (13) в силу формул (19) и (20) равенства

$$\begin{aligned}\Xi_{U_2}((j + 1)\vartheta_1, j\vartheta_1) = \Xi_{U_2}(j\vartheta_1 + 5\vartheta, j\vartheta_1 + 4\vartheta) \cdot \Xi_{U_2}(j\vartheta_1 + 4\vartheta, j\vartheta_1 + 3\vartheta) \cdot \ldots \cdot \\ \cdot\, \Xi_{U_2}(j\vartheta_1 + \vartheta, j\vartheta_1) = (F_2 H_9 F_2^{-1}) \cdot (F_2 H_8 H_7 F_2^{-1}) \cdot \ldots \cdot (F_2 H_2 H_1 F_2^{-1}) = \\ = F_2(H_9 \cdot H_8 \cdot \ldots \cdot H_1)F_2^{-1}, \quad j \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Отсюда, из разложения (18) и определения (16) матрицы Λ_2 вытекает цепочка соотношений

$$\begin{aligned}\Xi_{U_2}((j+1)\vartheta_1, j\vartheta_1) = F_2(H_9 \cdot H_8 \cdot \ldots \cdot H_1)F_2^{-1} = F_2\Lambda_2 F_2^{-1} = \\ = F_2\bigl(F_2^{-1}\Lambda_1 F_2\bigr)F_2^{-1} = \Lambda_1, \quad j \in \mathbb{Z}.\end{aligned} \tag{21}$$

Применим к линейной нестационарной системе (13) с управлением $U_2(\cdot)$, т. е. к системе

$$\dot{\xi} = Y_{U_1}(0,t)F_1^{-1}B(t)U_2(t)\xi, \tag{22}$$

обратное ляпуновское преобразование

$$\xi = Y_{U_1}^{-1}(t,0)y. \tag{23}$$

Тогда отсюда, ввиду формулы (22), с учетом того, что $Y_{U_1}(t,s)$, $t,s \in \mathbb{R}$, является матрицей Коши системы (7), установим цепочку равенств

$$Y_{U_1}(0,t)F_1^{-1}B(t)U_2(t)Y_{U_1}(0,t)y = Y_{U_1}(0,t)F_1^{-1}B(t)U_2(t)\xi = \dot{\xi} = (Y_{U_1}^{-1}(t,0)y)^{\cdot} =$$

$$= -Y_{U_1}^{-1}(t,0)\dot{Y}_{U_1}(t,0)Y_{U_1}^{-1}(t,0)y + Y_{U_1}^{-1}(t,0)\dot{y} =$$

$$= -Y_{U_1}^{-1}(t,0)\Bigl(F_1^{-1}\bigl(A(t) + B(t)U_1(t)\bigr)F_1\Bigr)Y_{U_1}(t,0)Y_{U_1}^{-1}(t,0)y + Y_{U_1}^{-1}(t,0)\dot{y}.$$

Поэтому, ввиду верного при всех $t \in \mathbb{R}$ равенства $Y_{U_1}^{-1}(t,0) = Y_{U_1}(0,t)$, имеет место соотношение

$$Y_{U_1}(0,t)F_1^{-1}B(t)U_2(t)Y_{U_1}(0,t)y = -Y_{U_1}(0,t)\Bigl(F_1^{-1}\bigl(A(t) + B(t)U_1(t)\bigr)F_1\Bigr)y + Y_{U_1}(0,t)\dot{y}.$$

Преобразуя последнее равенство, на основании того, что формула (23) — ляпуновское преобразование, заключаем, что система (22) асимптотически эквивалентна [8] линейной системе

$$\dot{y} = F_1^{-1}\Bigl(A(t)F_1 + B(t)\Bigl(U_1(t)F_1 + U_2(t)Y_{U_1}(0,t)\Bigr)\Bigr)y. \tag{24}$$

В силу формулы (23) для матрицы Коши $\widetilde{Y}(t,s)$, $t,s \in \mathbb{R}$, этой системы при всех $t,s \in \mathbb{R}$ выполняется равенство $\widetilde{Y}(t,s) = Y_{U_1}(t,0)\,\Xi_{U_2}(t,s)\,Y_{U_1}^{-1}(s,0)$, и поэтому верны соотношения

$$\widetilde{Y}\bigl((j+1)\vartheta_1, j\vartheta_1\bigr) = Y_{U_1}\bigl((j+1)\vartheta_1, 0\bigr)\,\Xi_{U_2}\bigl((j+1)\vartheta_1, j\vartheta_1\bigr)\,Y_{U_1}^{-1}(j\vartheta_1, 0), \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{25}$$

Поскольку матрица Коши $Y_{U_1}(t,0)$ системы (7) $(l\sigma)$-периодична, то она является и ϑ_1-периодической функцией ввиду равенств (15). Поэтому при каждом $j \in \mathbb{Z}$ справедливы равенства

$$Y_{U_1}(j\vartheta_1,0) = Y_{U_1}((j-1)\vartheta_1 + \vartheta_1, 0) = Y_{U_1}((j-1)\vartheta_1, 0) = \ldots = Y_{U_1}(\vartheta_1, 0) = Y_{U_1}(0,0) = E$$

и, значит, $Y_{U_1}^{-1}(j\vartheta_1, 0) = E$. Отсюда и из формул (21) и (25) с учетом верного при $t \in \mathbb{R}$ равенства $Y_{U_1}^{-1}(t,0) = Y_{U_1}(0,t)$ следуют соотношения

$$\widetilde{Y}(\vartheta_1, 0) = Y_{U_1}(\vartheta_1, 0) \cdot \Lambda_1 \cdot Y_{U_1}^{-1}(\vartheta_1, 0) = \Lambda_1. \tag{26}$$

Применив к системе (24) обратное ляпуновское преобразование $y = F_1^{-1}x$, получим систему

$$F_1^{-1}\dot{x} = F_1^{-1}\Bigl(A(t)F_1 + B(t)\Bigl(U_1(t)F_1 + U_2(t)Y_{U_1}(0,t)\Bigr)\Bigr)F_1^{-1}x,$$

и значит,

$$\dot{x} = \Big(A(t) + B(t)\Big(U_1(t) + U_2(t)Y_{U_1}(0,t)F_1^{-1}\Big)\Big)x. \tag{27}$$

Последняя является системой (2), замкнутой управлением $U(t) = U_1(t) + U_2(t)Y_{U_1}(0,t)F_1^{-1}$, которое, очевидно, является кусочно-непрерывной и ограниченной матричной функцией. Из замечания 8 и того, что матрица F_1 образует базис чистых движений системы (1), следует существование такого числа $g_1 := g_1(F_1)$, при котором справедливо неравенство $\|F_1^{-1}\| \leqslant g_1$. Тогда отсюда и из определения управления $U(\cdot)$, а также величин $\delta_1, \delta_2, \Delta_1$ вытекает оценка

$$\|U(t)\| \leqslant \|U_1(t)\| + \|U_2(t)\|\,\|Y_{U_1}(0,t)\|\,\|F_1^{-1}\| \leqslant \delta_1 + \delta_2\Delta_1 g_1 =: d. \tag{28}$$

Так как системы (27) и (24) связаны ляпуновским преобразованием $x = F_1 y$, то для их матриц Коши $X_U(t,s)$ и $\widetilde{Y}(t,s)$, $t,s \in \mathbb{R}$, выполняется равенство $X_U(t,s) = F_1\,\widetilde{Y}(t,s)\,F_1^{-1}$. Поэтому ввиду равенств (15), а также формул (26) и (14) справедливы соотношения

$$X_U(5l\sigma,0) = X_U(\vartheta_1,0) = F_1\widetilde{Y}(\vartheta_1,0)F_1^{-1} = F_1\Lambda_1F_1^{-1} = F_1\big(F_1^{-1}\Lambda F_1\big)F_1^{-1} = \Lambda,$$

с учетом оценок (28) означающие $(5l\sigma)$-равномерную глобальную достижимость линейной системы (2) с кусочно-непрерывными и ограниченными ω-периодическими коэффициентами.

Достаточность. Из равномерной глобальной достижимости линейной дифференциальной системы (2) следует (см., например, [10, теорема 2]) ее глобальная ляпуновская приводимость. Поскольку же на основании теоремы 3 глобальная ляпуновская приводимость ω-периодической системы (2) с кусочно-непрерывными и ограниченными коэффициентами эквивалентна условию равномерной полной управляемости линейной управляемой системы (1), соответствующей системе (2), то достаточность, а вместе с ней и теорема 6 доказаны. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Попова С. Н. Глобальная управляемость полной совокупности ляпуновских инвариантов периодических систем // Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39. № 12. С. 1627–1636. http://mi.mathnet.ru/de10961
2. Макаров Е. К., Попова С. Н. Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем. Минск: Беларус. навука, 2012.
3. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998.
4. Зайцев В. А., Тонков Е. Л. Достижимость, согласованность и метод поворотов В. М. Миллионщикова // Известия вузов. Математика. 1999. № 2. С. 45–56. http://mi.mathnet.ru/ivm560
5. Макаров Е. К., Попова С. Н. О глобальной управляемости полной совокупности ляпуновских инвариантов двумерных линейных систем // Дифференциальные уравнения. 1999. Т. 35. № 1. С. 97–106. http://mi.mathnet.ru/de9861
6. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966.
7. Изобов Н. А. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Сер. Математический анализ. М.: ВИНИТИ, 1974. Т. 12. С. 71–146. http://mi.mathnet.ru/intm30
8. Богданов Ю. С. Об асимптотически эквивалентных линейных дифференциальных системах // Дифференциальные уравнения. 1965. Т. 1. № 6. С. 707–716. http://mi.mathnet.ru/de8686

9. Kalman R. E. Contribution to the theory of optimal control // Boletín de la Sociedad Matemátika Mexicana. 1960. Vol. 5. No. 1. P. 102–119.
10. Зайцев В. А. Глобальная достижимость и глобальная ляпуновская приводимость двумерных и трехмерных линейных управляемых систем с постоянными коэффициентами // Вестник Удмуртского университета. Математика. 2003. № 1. С. 31–62. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=22419350
11. Габдрахимов А. Ф., Зайцев В. А. Ляпуновская приводимость четырехмерных линейных стационарных управляемых систем в классе кусочно-постоянных управлений // Вестник Удмуртского университета. Математика. 2006. № 1. С. 25–40. https://elibrary.ru/item.asp?id=12110126
12. Сергеев И. Н. Об управлении решениями линейного дифференциального уравнения // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 2009. Т. 64. № 3. С. 25–33.
13. Смирнов Е. Я. Стабилизация программных движений. СПб.: Изд-во С.-Петербургского ун-та, 1997.
14. Гайшун В. И. Введение в теорию линейных нестационарных систем. М.: УРСС, 2004.
15. Зайцев В. А. Равномерная глобальная достижимость и глобальная ляпуновская приводимость линейных управляемых систем в форме Хессенберга // Итоги науки и техники. Сер. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2017. Т. 132. С. 33–37. http://mi.mathnet.ru/into160
16. Зайцев В. А. К теории стабилизации управляемых систем: дис. . . . д-ра физ.-матем. наук / Ижевск, 2015. 293 с.
17. Попова С. Н. Управление асимптотическими инвариантами линейных систем: дис. . . . д-ра физ.-матем. наук / Ижевск, 2004. 264 с.
18. Козлов А. А., Макаров Е. К. О равномерной глобальной достижимости линейных управляемых систем в невырожденном случае // Веснiк ВДУ. 2007. № 3 (45). С. 100–109.
19. Козлов А. А. Управление показателями Ляпунова дифференциальных систем с разрывными и быстро осциллирующими коэффициентами: дис. . . . канд. физ.-матем. наук / Минск, 2008. 111 с.
20. Козлов А. А., Макаров Е. К. Об управлении показателями Ляпунова линейных систем в невырожденном случае // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43. № 5. С. 621–627.
21. Козлов А. А., Инц И. В. О равномерной глобальной достижимости двумерных линейных систем с локально интегрируемыми коэффициентами // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27. Вып. 2. С. 178–192. https://doi.org/10.20537/vm170203
22. Тонков Е. Л. Критерий равномерной управляемости и стабилизация линейной рекуррентной системы // Дифференциальные уравнения. 1979. Т. 15. № 10. С. 1804–1813. http://mi.mathnet.ru/de3820
23. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989.
24. Козлов А. А. Критерий равномерной глобальной достижимости линейных систем // Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета. 2018. Т. 52. С. 47–58. https://doi.org/10.20537/2226-3594-2018-52-04

Поступила в редакцию 30.08.2019

Козлов Александр Александрович, к. ф.-м. н., доцент, заведующий кафедрой высшей математики, Полоцкий государственный университет, 211440, Республика Беларусь, г. Новополоцк, ул. Блохина, 29.
E-mail: kozlovaa@tut.by

Цитирование: А. А. Козлов. Критерий равномерной глобальной достижимости периодических систем // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2020. Т. 30. Вып. 2. С. 221–236.

MATHEMATICS 2020. Vol. 30. Issue 2. Pp. 221–236.

A. A. Kozlov

The criterion of uniform global attainability of periodic systems

Keywords: linear control system with periodic coefficients, uniform complete controllability, uniform global attainability.

MSC2010: 34D08, 34H05, 93C15

DOI: 10.35634/vm200206

We consider a linear time-varying control system

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

with piecewise continuous and bounded ω-periodic coefficient matrices $A(\cdot)$ and $B(\cdot)$. We construct control of the system (1) as a linear feedback $u = U(t)x$ with piecewise continuous and bounded matrix function $U(t)$, $t \in \mathbb{R}$. For the closed-loop system

$$\dot{x} = (A(t) + B(t)U(t))x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

the conditions of its uniform global attainability are studied. The latest property of the system (2) means existence of matrix $U(t)$, $t \in \mathbb{R}$, ensuring equalities $X_U((k+1)T, kT) = H_k$ for the state-transition matrix $X_U(t,s)$ of the system (2) with fixed $T > 0$ and arbitrary $k \in \mathbb{Z}$, $\det H_k > 0$. The problem is solved under the assumption of uniform complete controllability (by Kalman) of the system (1), corresponding to the closed-loop system (2), i.e. assuming the existence of such numbers $\sigma > 0$ and $\alpha_i > 0$, $i = \overline{1,4}$, that for any number $t_0 \in \mathbb{R}$ and vector $\xi \in \mathbb{R}^n$ the following inequalities hold:

$$\alpha_1 \|\xi\|^2 \leqslant \xi^* \int_{t_0}^{t_0+\sigma} X(t_0, s)B(s)B^*(s)X^*(t_0, s)\, ds\, \xi \leqslant \alpha_2 \|\xi\|^2,$$

$$\alpha_3 \|\xi\|^2 \leqslant \xi^* \int_{t_0}^{t_0+\sigma} X(t_0+\sigma, s)B(s)B^*(s)X^*(t_0+\sigma, s)\, ds\, \xi \leqslant \alpha_4 \|\xi\|^2,$$

where $X(t,s)$ is the state-transition matrix of linear system (1) with $u(t) \equiv 0$. It is proved that the property of uniform complete controllability (by Kalman) of the periodic system (1) is a necessary and sufficient condition of uniform global attainability of the corresponding system (2).

Funding. The work was completed within the framework of State program of scientific research of the Republic of Belarus "Convergence — 2020" (subprogram 1, task 1.2.01).

REFERENCES

1. Popova S. N. Global controllability of the complete set of Lyapunov invariants of periodic systems, *Differential Equations*, 2003, vol. 39, no. 12, pp. 1713–1723.
https://doi.org/10.1023/B:DIEQ.0000023551.43484.e5
2. Makarov E. K., Popova S. N. *Upravlyaemost' asimptoticheskikh invariantov nestatsionarnykh lineinykh sistem* (Controllability of asymptotic invariants of non-stationary linear systems), Minsk: Belarus. Navuka, 2012.
3. Demidovich B. P. *Lektsii po matematicheskoi teorii ustoichivosti* (Lectures on the mathematical stability theory), Moscow: Moscow State University, 1998.
4. Zaitsev V. A., Tonkov E. L. Attainability, compatibility and V. M. Millionshchikov's method of rotations, *Russian Mathematics*, 1999, no. 2, pp. 42–52.
https://zbmath.org/?q=an:1049.93504
5. Makarov E. K., Popova S. N. The global controllability of a complete set of Lyapunov invariants for two-dimensional linear systems, *Differential Equations*, 1999, vol. 35, no. 1, pp. 97–107.

6. Bylov B. F., Vinograd R. E., Grobman D. M., Nemytskii V. V. *Teoriya pokazatelei Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoichivosti* (Theory of Lyapunov exponents and its application to problems of stability), Moscow: Nauka, 1966.
7. Izobov N. A. Linear systems of ordinary differential equations, *Journal of Soviet Mathematics*, 1976, vol. 5, no. 1, pp. 46–96. https://doi.org/10.1007/BF01091661
8. Bogdanov Yu. S. On asymptotically equivalent linear differential systems, *Differ. Uravn.*, 1965, vol. 1, no. 6, pp. 707–716 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/de8686
9. Kalman R. E. Contribution to the theory of optimal control, *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*, 1960, vol. 5, no. 1, pp. 102–119.
10. Zaitsev V. A. Global attainability and global reducibility of two- and tree-dimensional linear control systems with constant coefficients, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika*, 2003, no. 1, pp. 31–62 (in Russian). https://www.elibrary.ru/item.asp?id=22419350
11. Gabdrakhimov A. F., Zaitsev V. A. Lyapunov's reducibility for four-dimensional linear stationary control systems in the class of piecewise-constant controls, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika*, 2006, no. 1, pp. 25–40 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/vuu244
12. Sergeev I. N. Controlling solutions to a linear differential equation, *Moscow University Mathematics Bulletin*, 2009, vol. 64, issue 3, pp. 113–120.
https://doi.org/10.3103/S0027132209030048
13. Smirnov E. Ya. *Stabilizatsiya programmnykh dvizhenii* (Stabilization of program motion), Saint Petersburg: Saint Petersburg State University, 1997.
14. Gaishun I. V. *Vvedenie v teoriyu lineinykh nestatsionarnykh sistem* (Introduction to the theory of linear nonstationary systems), Moscow: URSS, 2004.
15. Zaitsev V. A. Uniform global attainability and global Lyapunov reducibility of linear control systems in the Hessenberg form, *Journal of Mathematical Sciences*, 2018, vol. 230, issue 5, pp. 677—682.
https://doi.org/10.1007/s10958-018-3768-2
16. Zaitsev V. A. *To the theory of stabilization of control systems*, Dr. Sci. (Phys.–Math.) Dissertation, Izhevsk, 2015, 293 p. (In Russian).
17. Popova S. N. *Control over asymptotical invariants of linear systems*, Dr. Sci. (Phys.–Math.) Dissertation, Izhevsk, 2004, 264 p. (In Russian).
18. Kozlov A. A., Makarov E. K. About uniform global attainability of linear control systems in the non-degenerate case, *Vestn. Vitsebsk. Dzyarzh. Univ.*, 2007, no. 3 (45), pp. 100–109 (in Russian).
19. Kozlov A. A. *Control of Lyapunov exponents of differential systems with discontinuous and fast oscillated coefficients*, Cand. of Sci. (Phys.–Math.) Dissertation, Minsk, 2008, 111 p. (In Russian).
20. Kozlov A. A., Makarov E. K. On the control of Lyapunov exponents of linear systems in the non-degenerate case, *Differential Equations*, 2007, vol. 43, no. 5, pp. 636–642.
https://doi.org/10.1134/S0012266107050072
21. Kozlov A. A., Ints I. V. On uniform global attainability of two-dimensional linear systems with locally integrable coefficients, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2017, vol. 27, issue 2, pp. 178–192 (in Russian).
https://doi.org/10.20537/vm170203
22. Tonkov E. L. A criterion of uniform controllability and stabilization of a linear recurrent system, *Differ. Uravn.*, 1979, vol. 15, no. 10, pp. 1804–1813 (in Russian).
http://mi.mathnet.ru/eng/de3820
23. Horn R., Johnson C. *Matrix analysis*, Cambridge: Cambridge University Press, 1988.
Translated under the title *Matrichnyi analiz*, Moscow: Mir, 1989.
24. Kozlov A. A. The criterion of uniform global attainability of linear systems, *Izvestiya Instituta Matematiki i Informatiki Udmurtskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2018, vol. 52, pp. 47–58 (in Russian). https://doi.org/10.20537/2226-3594-2018-52-04

Received 30.08.2019

Kozlov Aleksandr Aleksandrovich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Head of Department of Higher Mathematics, Polotsk State University, ul. Blokhina, 29, Novopolotsk, 211440, Belarus.
E-mail: kozlovaa@tut.by

Citation: A. A. Kozlov. The criterion of uniform global attainability of periodic systems, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2020, vol. 30, issue 2, pp. 221–236.