

УДК 539.3:624.04

**ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ТОЛСТОСТЕННОЙ ТРУБЕ, СВОЙСТВА КОТОРОЙ ЗАВИСЯТ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ**

*канд. техн. наук, доцент Л.А. ГУРЬЕВА,  
И.Г. ГУРЬЕВ, Н.В. АКимова, С.С. СИДорова*

*Рассмотрены вопросы расчета упругих толстостенных цилиндров, находящихся под действием стационарного температурного поля. Определены температурные напряжения в толстостенной трубе, свойства которой не зависят от температуры. Проанализирован случай, когда модуль Юнга является функцией температуры, а коэффициенты Пуассона и линейного расширения постоянны.*

Анализ температурных напряжений и деформаций в конструктивных элементах различного типа двигателей и установок, работающих при высоких температурах, имеет исключительно большое значение. В самом деле, от интенсивности и характера распределения этих напряжений и деформаций зависят длительная прочность, термическая усталость, термическое выпучивание и другие аналогичные явления. Актуальность этих вопросов возрастает в связи с наметившейся тенденцией к повышению рабочих температур в различного рода агрегатах и установках.

Расчеты температурных напряжений и деформаций конструкций, работающих при высокой температуре, когда свойства материалов становятся зависящими от нее, связаны со значительными трудностями [1, 2, 3]. Это, по-видимому, является причиной весьма малого количества публикаций по этим исключительно актуальным проблемам.

Рассмотрим цилиндрическую трубу внутреннего радиуса  $a$  и наружного  $b$ , находящуюся под действием стационарного температурного поля  $T = T(r)$ . Через  $T$  обозначим температуру, отсчитываемую от начальной постоянной температуры, соответствующей естественному состоянию трубы. Примем, что модуль Юнга является функцией температуры, а коэффициент Пуассона  $\nu$  и коэффициент линейного расширения  $\alpha$  постоянны.

Для решения задачи потребовались уравнения теории упругости в цилиндрической системе координат  $r, \theta, z$ . При этом в физические уравнения был введен дополнительный температурный член на основе гипотезы Дюгамеля – Неймана.

Использование закона Гука, формул Каши и уравнения равновесия привело к получению дифференциального уравнения для функции радиального перемещения  $U(r)$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dU}{dr} \cdot \left(1 + \frac{r}{E} \frac{d\bar{E}}{dr}\right) - \frac{U}{r^2} \cdot \left(1 - \frac{\nu}{1-\nu} \cdot \frac{r}{E} \frac{d\bar{E}}{dr}\right) - \frac{1+\nu}{1-\nu} \cdot \alpha \cdot \left(\frac{dT}{dr} + \frac{T}{E} \frac{d\bar{E}}{dr}\right) + \\ + \frac{\nu\epsilon}{1-\nu} \cdot \frac{1}{E} \cdot \frac{d\bar{E}}{dr} = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где  $\bar{E} = E(r)/(1+\nu) \cdot (1-2\nu)$ ,  $\epsilon = \epsilon_z = const$  – осевая деформация.

Стационарное распределение температуры  $T(r)$  при условиях  $T|_{r=a} = T_a$ ,  $T|_{r=b} = 0$  имеет вид

$$T = -\frac{1}{\varpi} \cdot \ln\left(\frac{r}{b}\right), \quad \varpi = \frac{\ln(b/a)}{T_a} \tag{2}$$

Зависимость модуля  $E$  от температуры принята в виде

$$E(T) = E_0 \cdot e^{-\beta T}, \quad \beta > 0. \tag{3}$$

Уравнение (1) имеет точное решение в элементарных функциях при значениях  $b/a = 2$ ,  $\varpi = \beta$ .

При этих значениях из (2) и (3) имеем

$$E(T) = \frac{1}{b} \cdot E_0 \cdot r,$$

и уравнение (1) приводится к уравнению типа Эйлера

$$r^2 \cdot \frac{d^2 U}{dr^2} + 2 \cdot r \cdot \frac{dU}{dr} - U \cdot \frac{1-2 \cdot \nu}{1-\nu} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \cdot \frac{\alpha}{\varpi} \cdot \left(1 + \ln \frac{r}{b}\right) \cdot r + \frac{\nu \cdot \varepsilon}{1-\nu} \cdot r = 0. \quad (4)$$

Решение неоднородного уравнения имеет вид

$$U = C_1 \cdot r^{\frac{\mu+1}{2}} + C_2 \cdot r^{\frac{\mu-1}{2}} - \frac{\alpha}{\varpi} \cdot (1+\nu) \cdot r \cdot \ln \frac{r}{b} + \left[ \frac{3 \cdot \alpha}{\varpi} \cdot (1-\nu^2) - \frac{\alpha}{\varpi} \cdot (1+\nu) + \nu \cdot \varepsilon \right] \cdot r. \quad (5)$$

Подставляя (5) в физические уравнения, найдём напряжения  $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$ .

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E_0}{b(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ C_1 [(1-\nu)\mu_1 + \nu] r^{\mu_1} + C_2 [(1-\nu)\mu_2 + \nu] r^{\mu_2} + \frac{\alpha}{\varpi} (1+\nu)(1-2\nu)r \right\}, \\ \sigma_\theta &= \frac{E_0}{b(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ C_1 [\nu\mu_1 + (1-\nu)] r^{\mu_1} + C_2 [\nu\mu_2 + (1-\nu)] r^{\mu_2} + \frac{2\alpha}{\varpi} (1+\nu)(1-2\nu)r \right\}, \\ \sigma_z &= \frac{E_0}{b(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ C_1 \nu(\mu_1 + 1) r^{\mu_1} + C_2 \nu(\mu_2 + 1) r^{\mu_2} + \frac{\alpha}{\varpi} (1+\nu)(1-2\nu)r \ln \frac{r}{b} + \right. \\ &\quad \left. + \left[ \frac{\alpha}{\varpi} \nu(3+\nu-6\nu^2) + (1+\nu)(1-2\nu)\varepsilon \right] r \right\}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\mu_1 = -\frac{\mu+1}{2}, \quad \mu_2 = \frac{\mu-1}{2}, \quad \mu = \sqrt{\frac{5-9\nu}{1-\nu}}.$

Определяя постоянные  $C_1, C_2, \varepsilon$  из условий

$$\sigma_r|_{r=a} = 0, \quad \sigma_r|_{r=b} = 0, \quad \int_a^b r \cdot \sigma_z dr = 0,$$

получим

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\alpha}{\varpi} \frac{(1+\nu)(1-2\nu) \left( 2^{\frac{3-\mu}{2}} - 1 \right) b^{\frac{3+\mu}{2}}}{\left[ (1-\nu)\mu_1 + \nu \right] (1-2^{-\mu}) 2^{\frac{3+\mu}{2}}}, \\ C_2 &= -\frac{\alpha}{\varpi} \frac{(1+\nu)(1-2\nu) \left( 2^{\frac{3+\mu}{2}} - 1 \right) b^{\frac{3-\mu}{2}}}{\left[ (1-\nu)\mu_2 + \nu \right] (1-2^{-\mu}) 2^{\frac{3+\mu}{2}}}, \\ \varepsilon &= \frac{\alpha}{\varpi} \left\{ \frac{3\nu}{(1-2^{-3})(1-2^{-\mu}) 2^{\frac{3+\mu}{2}}} \left[ \frac{1-\mu \left( 2^{\frac{-3+\mu}{2}} - 1 \right) \left( 2^{\frac{3-\mu}{2}} - 1 \right)}{(3-\mu)(1+\nu)\mu_1 + \nu} - \frac{1+\mu \left( 2^{\frac{-3-\mu}{2}} - 1 \right) \left( 2^{\frac{3+\mu}{2}} - 1 \right)}{(3+\mu)(1-\nu)\mu_2 + \nu} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{7-3\ln 2}{24(1-2^{-3})} - \frac{\nu(3+\nu-6\nu^2)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \right\}. \end{aligned}$$

Для напряжений (6) окончательно имеем

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E_0 \alpha}{b\omega} \left( \lambda_1 r^{\frac{-1-\mu}{2}} - \lambda_2 r^{\frac{-1+\mu}{2}} + r \right), \\ \sigma_\theta &= \frac{E_0 \alpha}{b\omega} \left( \lambda_1' r^{\frac{-1-\mu}{2}} - \lambda_2' r^{\frac{-1+\mu}{2}} + 2r \right), \\ \sigma_z &= \frac{E_0 \alpha}{b\omega} \left( \lambda_1'' r^{\frac{-1-\mu}{2}} - \lambda_2'' r^{\frac{-1+\mu}{2}} + r \ln \frac{r}{b} + \omega r \right). \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\left( 2^{\frac{3-\mu}{2}} - 1 \right) b^{\frac{3+\mu}{2}}}{(1-2^{-\mu}) 2^{\frac{3+\mu}{2}}}, & \lambda_2 &= \frac{\left( 2^{\frac{3+\mu}{2}} - 1 \right) b^{\frac{3-\mu}{2}}}{(1-2^{-\mu}) 2^{\frac{3+\mu}{2}}}, \\ \lambda_1' &= \frac{\nu \mu_1 + (1-\nu)}{(1-\nu) \mu_1 + \nu} \lambda_1, & \lambda_2' &= \frac{\nu \mu_2 + (1-\nu)}{(1-\nu) \mu_2 + \nu} \lambda_2, \\ \lambda_1'' &= \frac{\nu(\mu_1 + 1)}{(1-\nu) \mu_1 + \nu} \lambda_1, & \lambda_2'' &= \frac{\nu(\mu_2 + 1)}{(1-\nu) \mu_2 + \nu} \lambda_2, \\ \omega &= \frac{3\nu}{1-2^{-3}} \left[ \frac{(1-\mu) \left( 2^{\frac{-3+\mu}{2}} - 1 \right) \lambda_1}{(3-\mu)[(1-\nu) \mu_1 + \nu] b^{\frac{3+\mu}{2}}} - \frac{(1+\mu) \left( 2^{\frac{-3-\mu}{2}} - 1 \right) \lambda_2}{(3+\mu)[(1-\nu) \mu_2 + \nu] b^{\frac{3-\mu}{2}}} \right] + \frac{7-3 \ln 2}{24(1-2^{-3})}. \end{aligned}$$

В работе проведено исследование распределения температурных напряжений  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$ ,  $\sigma_z$  по толщине стенки толстостенных цилиндров с отношением

$$k = r_1/r_2 \quad (r_1 = 0,15; \quad r_2 = 0,3 \text{ м}) \quad \text{при } \nu = 0,3; \quad \alpha = 12 \cdot 10^{-6} 1/\text{град}; \quad T = 100^\circ \text{С}; \quad T = 200^\circ \text{С}.$$

Рассмотрены случаи:

- 1) изменения температуры по логарифмическому закону при  $T = 100^\circ \text{С}$ ;  $T = 200^\circ \text{С}$  и  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ Мпа} = \text{const}$ ;
- 2) использования формул (7) при  $E(T) = (1/r_2) E_0 r$ ;  $E_0 = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ;  $T = 100^\circ \text{С}$ ;  $T = 200^\circ \text{С}$ ;
- 3) использования формул [4] и (7) при  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа} = \text{const}$ ;  $E(T) = (1/r_2) E_0 r$ ;  $E_0 = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ;  $T = 200^\circ \text{С}$ . Результаты исследований представлены на рис. 1 – 3;
- 4) использования формул [4] и (7) при  $T = 100^\circ \text{С}$ ;  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ Мпа} = \text{const}$ ;  $E(T) = (1/r_2) E_0 r$ ;  $E_0 = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ . Результаты исследований представлены на рис. 4 – 6.

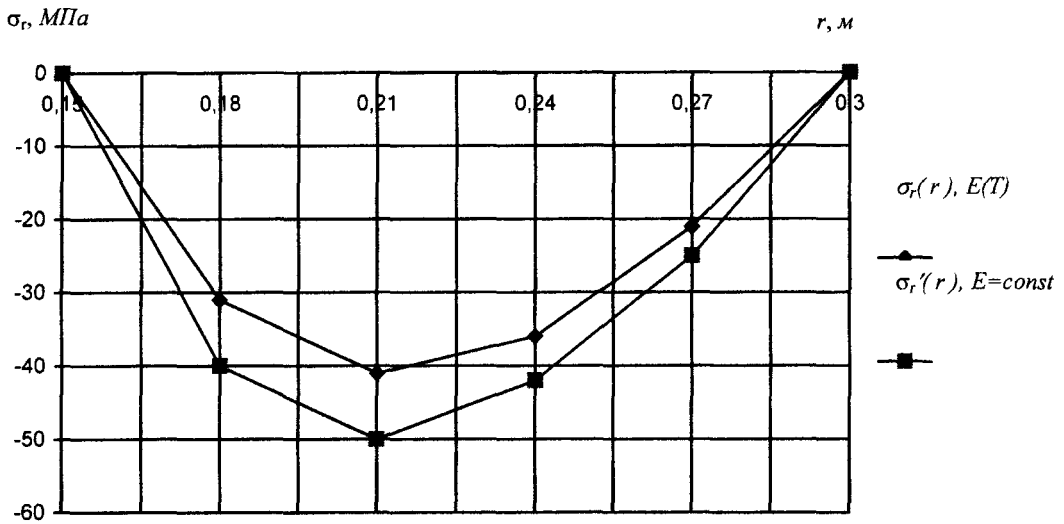


Рис. 1. Эпюры напряжений  $\sigma_r$  при  $T = 200^\circ C$

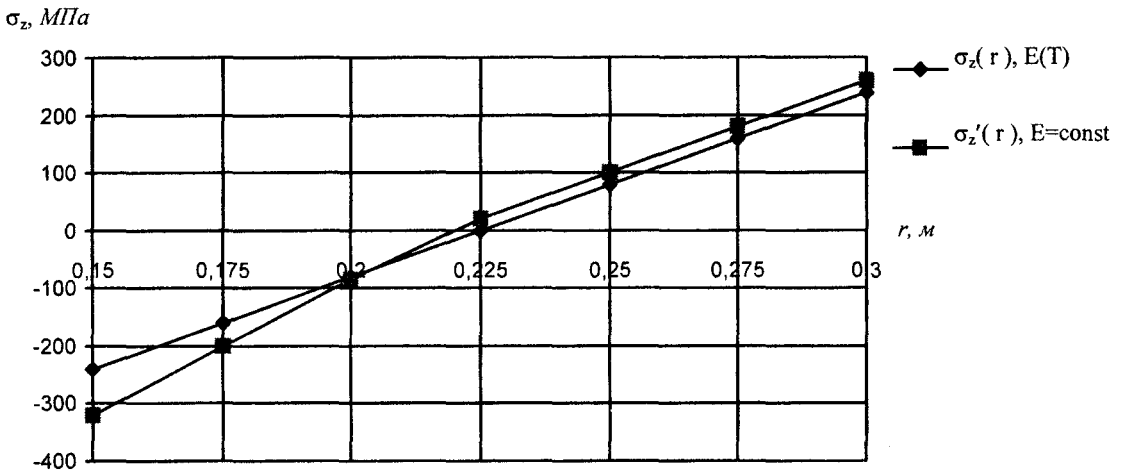


Рис. 2. Эпюры напряжений  $\sigma_z$  при  $T=200^\circ C$

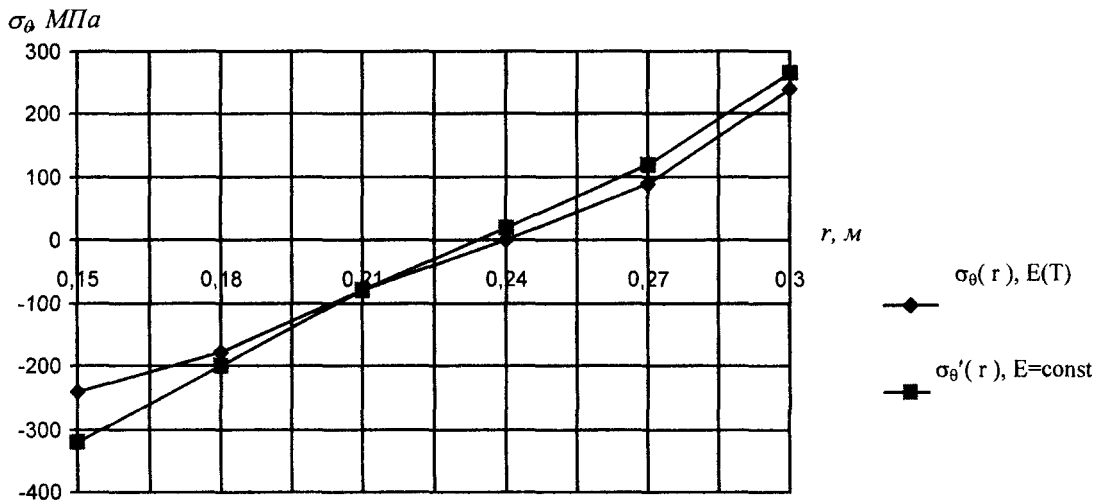


Рис. 3. Эпюры напряжений  $\sigma_\theta$  при  $T=200^\circ C$

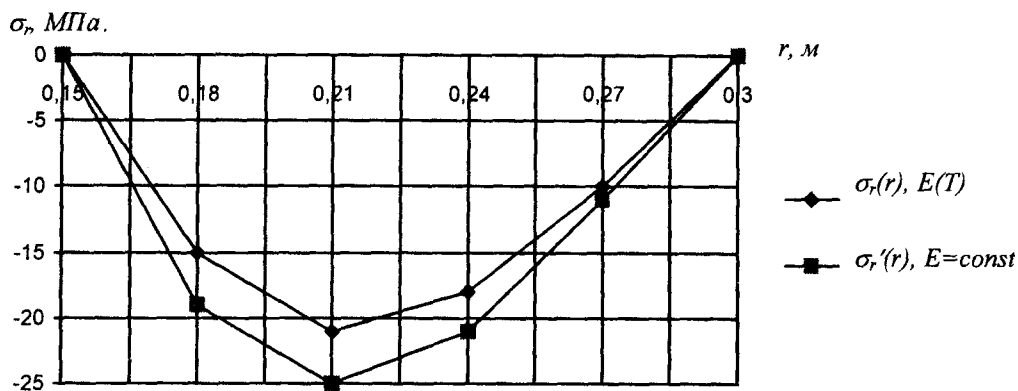


Рис. 4. Эпюры напряжений  $\sigma_r$  при  $T=100^\circ\text{C}$

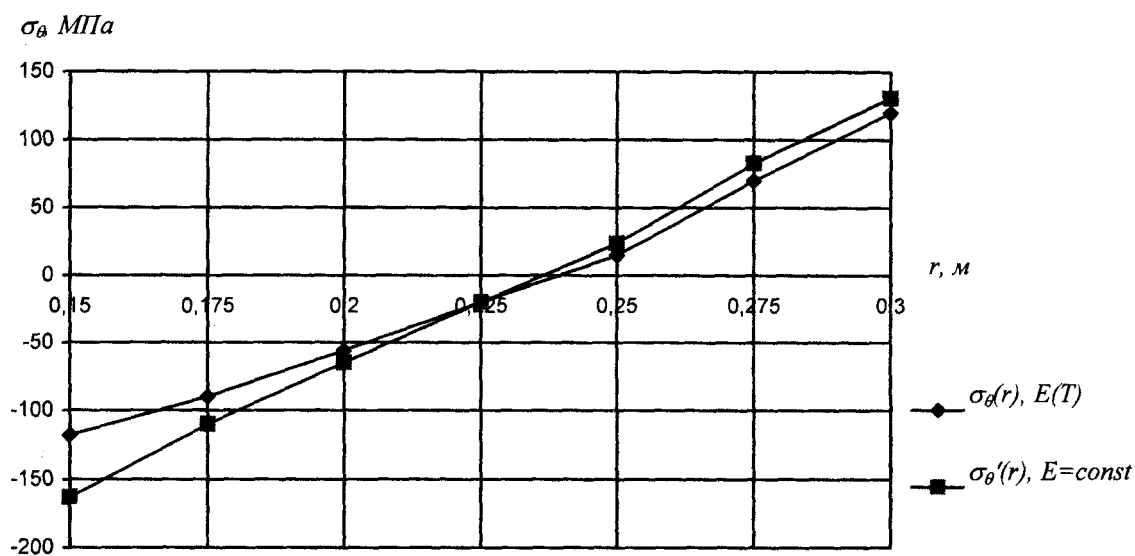


Рис. 5. Эпюры напряжений  $\sigma_\theta$  при  $T=100^\circ\text{C}$

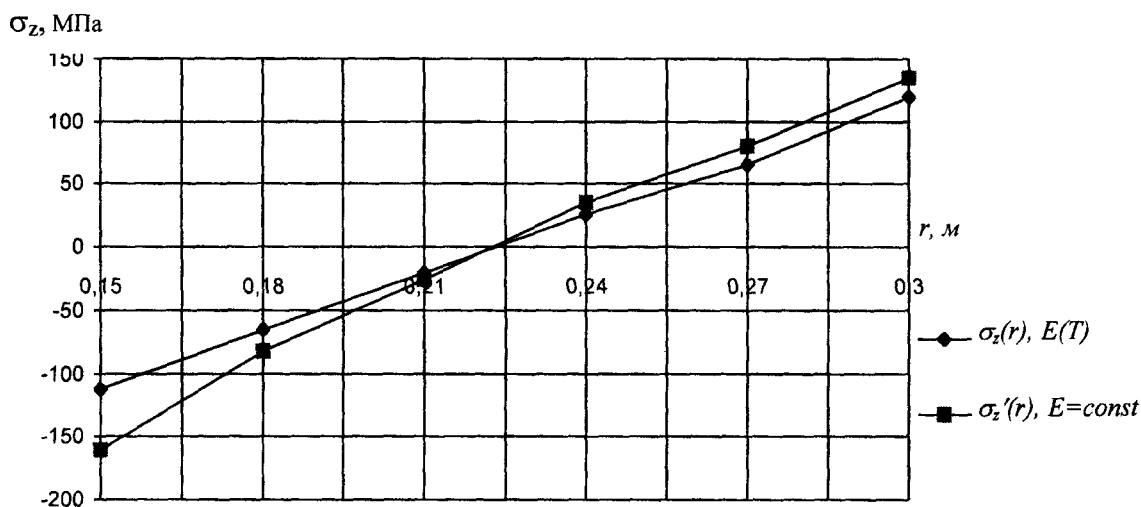


Рис. 6. Эпюры напряжений  $\sigma_z$  при  $T=100^\circ\text{C}$

**Проведенные исследования позволяют сделать следующие выводы:**

– исследование напряженного состояния нагретых толстостенных цилиндров показало, что в случае неравномерного нагрева в них развиваются температурные напряжения. Наибольшие напряжения возникают во внутренних точках цилиндра. Даже при сравнительно малом перепаде температур напряжения достигают весьма больших величин;

– в исследуемом цилиндре максимальное напряжение, подсчитанное по формуле (7), на 28 % меньше, чем при не зависящем от температуры модуле  $E$ .

**ЛИТЕРАТУРА**

1. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. – М.: Мир, 1964. – 311 с.
2. Прочность материалов и элементов конструкций в экстремальных условиях / Под ред. Г.С. Писаренко. – Киев: Наукова думка, 1980. – Т. 1. – 535 с.
3. Рекач В.Г. Руководство к решению задач по прикладной теории упругости. – М.: Высшая школа, 1984. – 287 с.
4. Справочник по сопротивлению материалов / Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В.; Отв. ред. Г.С. Писаренко. – Киев: Наукова думка, 1988. – 736 с.